Math. A.
324
m/1

Kleyers Encyklopädie

Lehrbuch des Projektionszeichnens I.

Von J. Vonderlinn

Math. A. 324 (1

Kleyers

Encyklopädie

der gesamten

mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

Abteilung:

Das Projektionszeichnen.

C

Lehrbuch

des

Projektionszeichnens.

Erster Teil:

Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen.

Mit 271 Erklärungen und 226 in den Text gedruckten Figuren.

Für den Schulunterricht und das Selbststudium

bearbeitet

nach System Kleyer

von

J. Vonderlinn

Privatdozent an der technischen Hochschule in München.

[1889]

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Gso. 32224

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch bildet einen Teil der Kleyerschen Encyklopädie; es sind in demselben die wichtigsten und fundamentalen Lagenbeziehungen zwischen den Raumgrössen: Punkt, (gerade) Linie, und (ebene) Fläche und die durch dieselben bedingten geometrischen Konstruktionen behandelt.

Als Beispiel für die Projektion einer Linie diente zweckmässig die rechtwinklige Projektion des Kreises und wurden die unmittelbar aus dem Projektionsverfahren sich ergebenden wichtigsten und gebräuchlichsten Ellipsen-Konstruktionen abgeleitet.

Was die gewählten Darstellungsmethoden anbetrifft, so habe ich mit der rechtwinkligen Projektion auf eine Ebene begonnen und zwar deshalb, weil ich diese Projektionsmethode für die geeignetste halte, das Anschauungs- und Vorstellungsvermögen des Schülers, ohne welches ein Studium der darstellenden Geometrie überhaupt nicht möglich ist, zu wecken und zu fördern.

Anschliessend an die rechtwinklige Projektion auf eine Projektionsebene, behandle ich dann die rechtwinklige Projektion auf zwei oder mehrere Projektionsebenen, die sogenannte Monge'sche Methode, welche vor allen übrigen Darstellungsverfahren am raschesten und sichersten den Schüler in das Wesen der darstellenden Geometrie einführt.

Ich habe absichtlich nicht mit der Centralprojektion begonnen, denn meine auf Grund jahrelanger Beobachtungen gemachte Erfahrung geht dahin, dass das Studium der Centralprojektion und damit jenes der Perspektive sich nur dann leicht und mit wahrem Verständnis vollzieht, wenn eine genügende Vertrautheit mit den Gesetzen der Monge'schen Projektion dem Schüler als Grundlage dient. In den folgenden Büchern finden auch die übrigen Projektions-

methoden eingehende Behandlung. Das Studium des vornehmlich für den Anfänger geschriebenen Buches setzt nur die elementarsten mathematischen Vorkenntnisse voraus und sind deshalb auch alle jene aus anderen Disziplinen entnommenen Sätze in diesem Werke wörtlich angeführt.

Die grosse Verbreitung der Kleyer'schen Encyklopädie ist ein Beweis dafür, dass das darin befolgte System ein richtiges und zweckmässiges ist. Möge daher auch dieses Buch einen grossen Leserkreis finden.

Schliesslich kann ich nicht umhin, der geehrten Verlagshandlung für die ausserordentlich sorgfältige Ausstattung des Buches, sowie für das stets bereitwillige Eingehen auf meine Wünsche hinsichtlich der nach meinen Originalzeichnungen hergestellten Figuren meinen wärmsten Dank auszusprechen.

München, Oktober 1888.

J. Vonderlinn.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

1) Ueber das Projektionszeichnen im allgemeinen 1
2) Ueber die rechtwinklige Projektion auf eine Projektionsebene 3
A) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Punktes 4
B) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Linie 8
a) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Linie im allgemeinen 8
b) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Geraden 9
c) Gelöste Aufgaben 16
d) Ungelöste Aufgaben 20
C) Ueber die gegenseitige Lage von Punkten und Geraden und ihren Projektionen 20
D) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Fläche 22
a) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Fläche im allgemeinen 22
b) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Ebene 23
c) Gelöste Aufgaben 25
E) Ueber die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden, Ebenen und ihren Projektionen 27
a) Ueber die Lagen eines Punktes zu einer Ebene 27
b) Ueber die Lagen einer Geraden zu einer Ebene 28
α) Ueber die Lagen einer Geraden zu einer Ebene im allgemeinen . 28
β) Ueber die Projektion einer ebenen Figur im allgemeinen 30
γ) Ueber die Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur . . 30
δ) Gelöste Aufgaben 32
ε) Ungelöste Aufgaben 44
ζ) Ueber den Zusammenhang zwischen der wahren Grösse eines Winkels und der Grösse seiner Projektion 46
η) Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt einer ebenen Figur und dem Inhalt ihrer Projektion 51
c) Ueber die Lagen zweier Ebenen 52
d) Ueber die Bestimmung des Winkels einer Geraden und einer beliebigen Ebene 53
e) Ueber die Bestimmung des Winkels zweier Ebenen 54
f) Gelöste Aufgaben 56
g) Ungelöste Aufgaben 63
F) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Kreises 64
a) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Kreises im allgemeinen 64
b) Ueber einige Eigenschaften der Ellipse 65
c) Gelöste Aufgaben 70
d) Ueber einige weitere Eigenschaften der Ellipse 75
e) Gelöste Aufgaben 81
f) Ueber einige weitere Konstruktionen der Ellipse 83
g) Ueber einige weitere Eigenschaften der Ellipse 86
h) Gelöste Aufgaben 88

Seite

3) Ueber die rechtwinklige Projektion auf mehrere Projektionsebenen 90

A) Ueber die rechtwinklige Projektion auf mehrere Projektionsebenen im allgemeinen 90

B) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Punktes 92

C) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Linie 98

a) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Linie im allgemeinen 98
b) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Geraden 98
d) Ueber die Bestimmung der wahren Länge einer gegebenen Strecke und ihrer Neigungswinkel mit den **Pr. Ebn.** 103
e) Gelöste Aufgaben 107

D) Ueber die gegenseitige Lage von Punkten und Geraden und ihren Projektionen 109

a) Ueber die Lagen eines Punktes zu einer Geraden 109
b) Ueber die Lagen zweier Geraden 109
c) Gelöste Aufgaben 110
d) Ungelöste Aufgaben 111

E) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Fläche 111

a) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Fläche im allgemeinen . . . 111
b) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Ebene 112

F) Ueber die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen und ihren Projektionen 113

a) Ueber die Lagen eines Punktes zu einer Ebene 113
b) Gelöste Aufgaben 114
c) Ungelöste Aufgaben 116
d) Ueber die Lagen einer Geraden zu einer Ebene 116

α) Ueber die Lagen einer Geraden zu einer Ebene im allgemeinen . 116
β) Gelöste Aufgaben 119
γ) Ungelöste Aufgaben 125
δ) Gelöste Aufgaben 125
ε) Ueber die Bestimmung der Winkel einer Ebene mit den **Pr. Ebn.** 127
ζ) Gelöste Aufgaben 129
η) Ueber den Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalte einer ebenen Figur und den Inhalten ihrer Projektionen 130
ϑ) Ueber die Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur, bezw. das Umlegen einer Ebene in die **Pr. Eb.** E_1 und E_2 . . . 131
ι) Gelöste Aufgaben 134
$\varkappa$) Ungelöste Aufgaben 138

e) Ueber die Lagen zweier Ebenen 139
f) Ueber die Bestimmung des Winkels einer Geraden mit einer Ebene . . 142
g) Ueber die Bestimmung des Winkels zweier Ebenen 143

G) Ueber die Einführung neuer Projektionsebenen 144

a) Ueber die Bestimmung der rechtwinkligen Projektion eines Punktes auf eine vierte **Pr. Eb.** E_4 144
b) Gelöste Aufgaben 149
c) Ungelöste Aufgaben 171

H) Andeutungen zur Lösung der ungelösten Aufgaben 175

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Das Projektionszeichnen.

1) Ueber das Projektionszeichnen im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter dem Projektionszeichnen?

Antwort. Unter dem Projektionszeichnen, siehe Erkl. 1, versteht man das Projizieren, siehe Erkl. 2, von irgend welchen Raumgrössen, siehe Erkl. 3, auf eine oder mehrere Projektionsebenen, siehe Erkl. 4.

Erkl. 1. Das Wort „Projektion“ stammt aus dem Lateinischen (projectio) und heisst Entwurf.

Erkl. 2. Das Wort „projizieren“ stammt aus dem Lateinischen (projicere) und heisst entwerfen.

Erkl. 3. Raumgrössen sind: Punkte, Linien, Flächen und Körper. (Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Raumgrössenlehre handeln.)

Erkl. 4. Projektionsebene heisst so viel als wie Entwerfungsebene oder Zeichnungsebene, d. i. also jene Ebene, in welcher die Zeichnung, d. h. die Projektion des Raumgebildes ausgeführt wird.

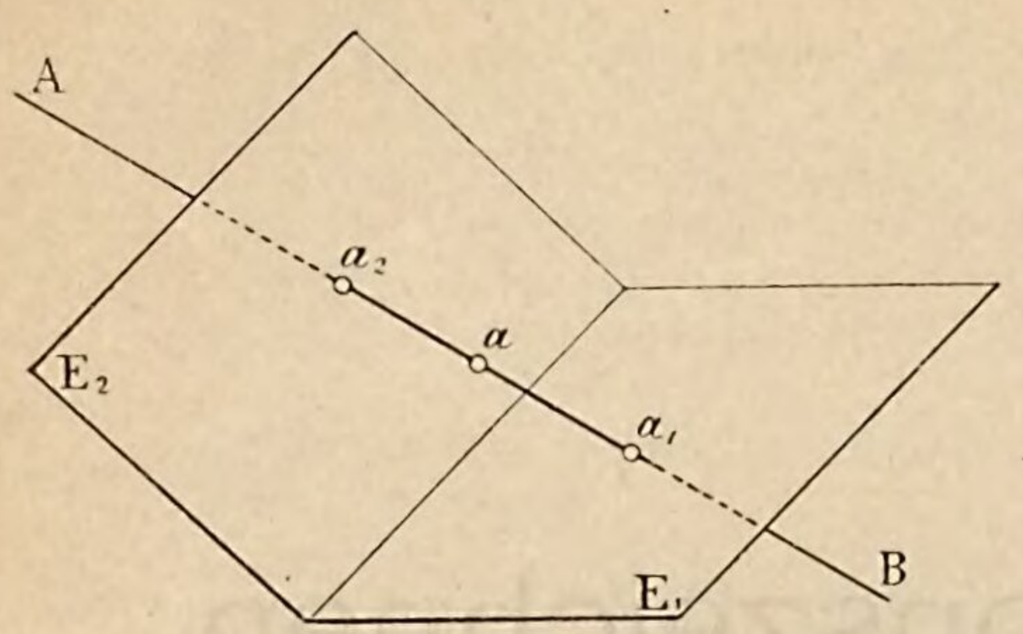
Theoretisch kann die Projektionsebene jede beliebige Lage einnehmen; es hat jedoch gewisse Vorteile für die Praxis, sie entweder horizontal, d. h. wagerecht, oder vertikal, d. h. senkrecht zur Horizontalebene zu wählen. Diese Vorteile bestehen hauptsächlich darin, dass die zu projizierenden Raumgebilde gegen die betreffende Projektionsebene eine einfachere Lage erhalten, wie dies später gezeigt werden soll, wodurch sich die Ausführung der Projektionszeichnung wesentlich vereinfacht.

Erkl. 5. In der Folge soll das Wort „Projektionsebene“ stets abgekürzt und zwar: „**Pr. Eb.**“ geschrieben werden.

Frage 2. Worin besteht das Projizieren einer Raumgrösse im allgemeinen?

Antwort. Das Projizieren einer Raumgrösse, z. B. eines Punktes auf eine oder

Figur 1.



mehrere Projektionsebenen, besteht im allgemeinen darin, dass durch den Punkt eine gerade Linie gezogen wird, die eine bestimmte Lage gegen die betr. **Pr. Eb.** hat.

Der Durchschnittspunkt dieser geraden Linie, welche „Projizierende“ oder „Projektionsstrahl“ heisst, mit der betreffenden **Pr. Eb.** ist die Projektion des Punktes.

So ist z. B., siehe Figur 1, durch den Punkt a die Projizierende AB gezogen, welche die **Pr. Eb.** E_1 in einem Punkte a_1, die **Pr. Eb.** E_2 in einem Punkt a_2 trifft.

a_1 und a_2 sind somit die Projektionen des Punktes a auf die Projektionsebenen E_1 und E_2.

Frage 3. Wodurch wird die Art und Weise des Projizierens, d. h. die Projektionsmethode bedingt?

Antwort. Die Art und Weise des Projizierens wird bedingt sowohl durch die Lage der Projizierenden unter sich, als auch gegen die **Pr. Eb.** In Rücksicht hierauf unterscheidet man verschiedene Projektionsmethoden.

Frage 4. Welches sind die wichtigsten Projektionsmethoden?

Antwort. Die wichtigsten Projektionsmethoden sind:

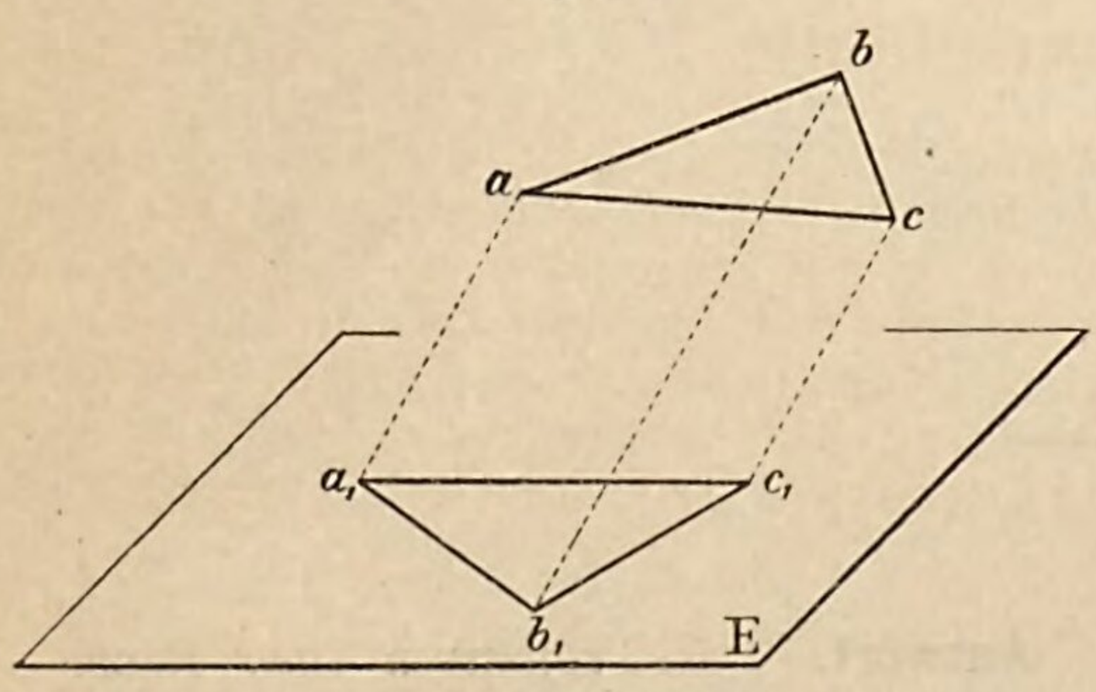
1. Die Parallelprojektion und zwar:
   a) Die rechtwinklige oder orthogonale, siehe Erkl. 6, Parallelprojektion.
   b. Die schiefwinklige oder klinogonale, siehe Erkl. 7, Parallelprojektion.
2. Die Centralprojektion.

Erkl. 6. Das Wort „orthogonal“ stammt aus dem Griechischen (orthos, gerade) und heisst rechteckig oder rechtwinklig.

Erkl. 7. Das Wort „klinogonal“ stammt gleichfalls aus dem Griechischen (klinos, geneigt) und heisst schiefwinklig.

Frage 5. Worin besteht der Unterschied zwischen der Parallel- und Centralprojektion?

Figur 2.

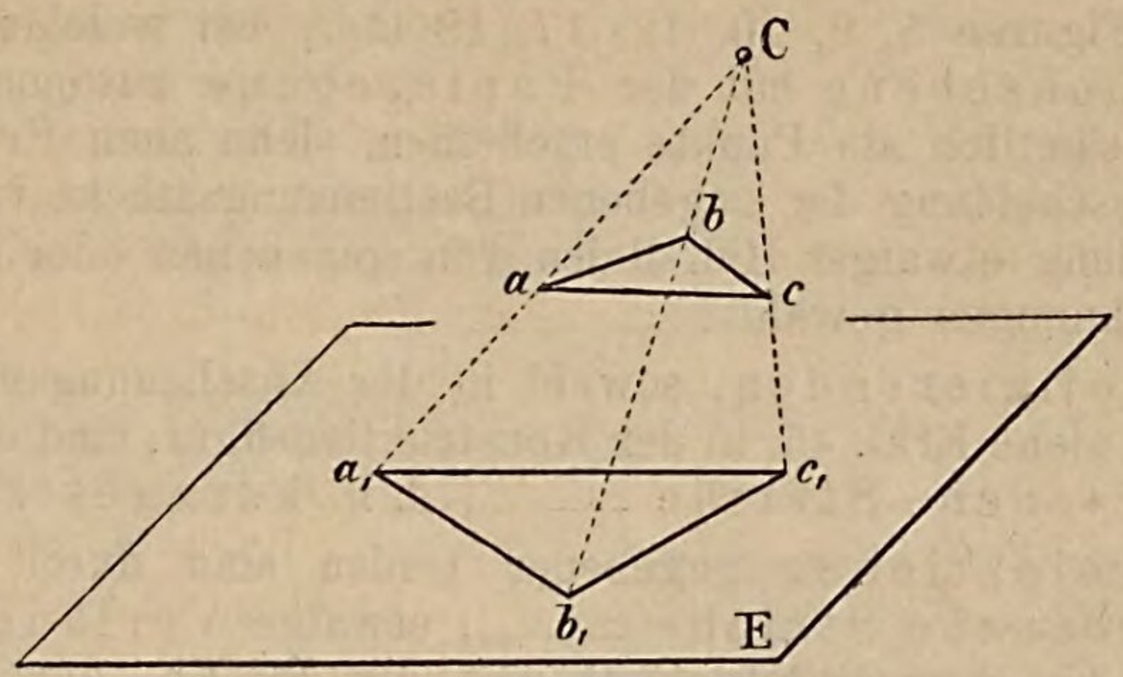


Antwort. Bei der Parallelprojektion sind die Projizierenden zu einander parallel, bei der Centralprojektion gehen sie durch einen festen Punkt, der Projektionscentrum, siehe Erkl. 8, oder Projektionsmittelpunkt heisst.

Figur 2 veranschaulicht eine Parallelprojektion eines Dreiecks abc, Figur 3 stellt eine Centralprojektion eines solchen Dreiecks aus dem Projektionsmittelpunkt C dar.

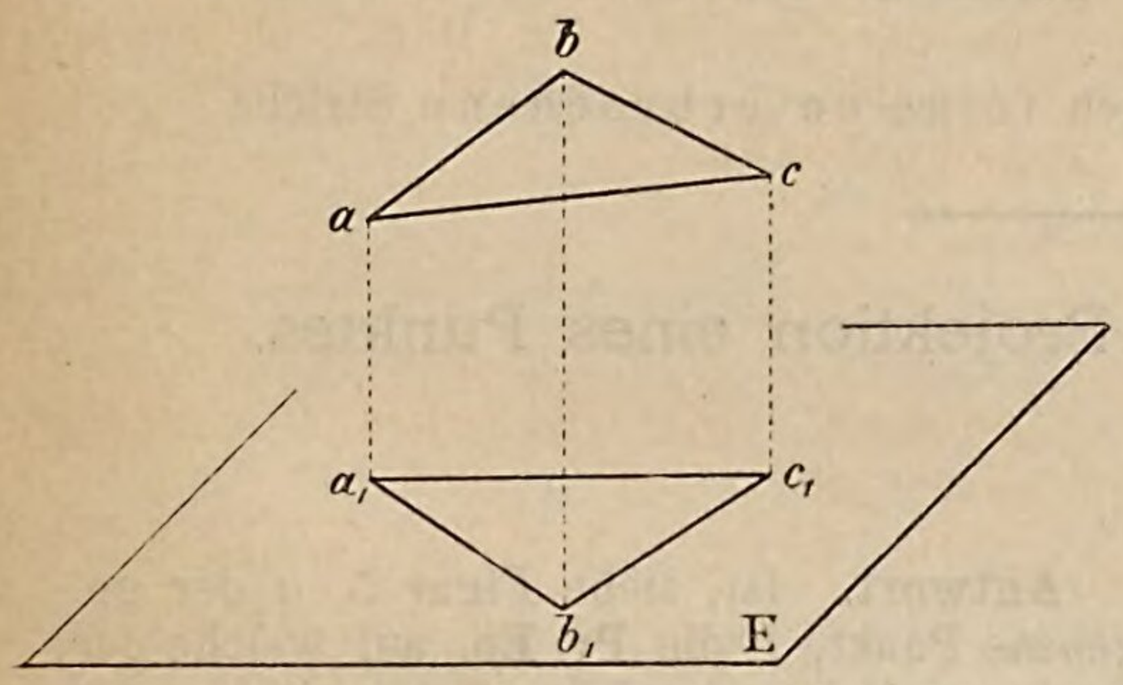
Erkl. 8. Das Wort „Centrum“ stammt aus dem Lateinischen und heisst Mittelpunkt.

Figur 3.



Frage 6. Worin besteht der Unterschied zwischen der rechtwinkligen und schiefwinkligen Parallelprojektion?

Figur 4.



Antwort. Bei der rechtwinkligen Parallelprojektion stehen die Projizierenden normal zur **Pr. Eb.**, bei der schiefwinkligen Parallelprojektion sind sie unter beliebigem aber gleichem Winkel gegen dieselbe geneigt (siehe Erkl. 9).

Figur 4 veranschaulicht eine rechtwinklige Parallelprojektion eines Dreiecks *abc* im Gegensatz zu der Figur 2, in welcher eine schiefwinklige Parallelprojektion eines Dreiecks *abc* dargestellt ist.

Erkl. 9. Die in den Antworten auf die Fragen 5 und 6 bisher bezeichneten Projektionsmethoden finden die mannigfaltigste Anwendung in der Technik.

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über das technische Zeichnen handeln.)

2) Ueber die rechtwinklige Projektion auf eine Projektionsebene.

Anmerkung 1. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man die Raumgrössen: Punkt, Linie und Fläche projiziert. Sobald man die genannten Raumgrössen in ihren mannigfaltigen gegenseitigen Lagen so projizieren kann, dass aus der Projektion die räumliche Lage entweder direkt erkennbar oder doch bestimmbar ist, vermag man auch alle die übrigen räumlichen, aus den oben genannten Raumgrössen zusammengesetzten Gebilde zu projizieren und aus der Projektionszeichnung auf die Lage und Gestalt des Raumgebildes selbst zu schliessen.

Anmerkung 2. Die folgenden Figuren sind teils parallelperspektivische Darstellungen zur Veranschaulichung des im Texte Angeführten, sogenannte

Anschauungsfiguren, wie z. B. die Figuren 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15 etc, teils wirkliche Projektionszeichnungen, sogenannte Konstruktionsfiguren, wie z. B. die Figuren 8, 9, 10, 12, 17, 19 etc., bei welchen die Zeichnungs- oder Projektionsebene mit der Papierebene zusammenfällt und die Projizierenden sämtlich als Punkte erscheinen, siehe auch Erkl. 18.

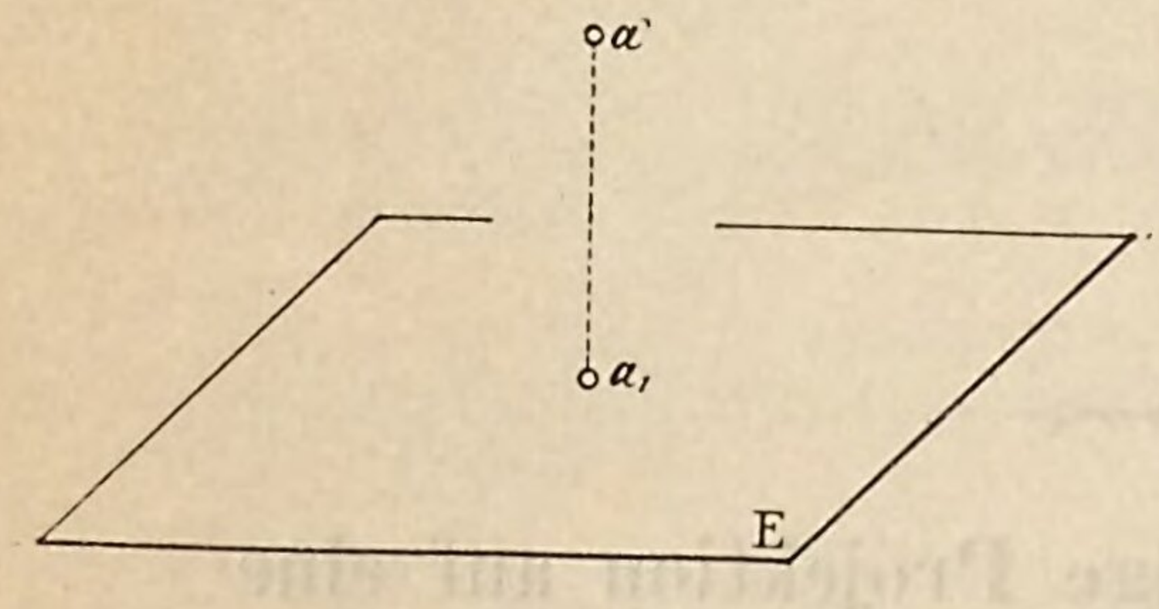
Zur Unterscheidung der gegebenen Bestimmungsstücke von dem Gesuchten und zur Unterscheidung etwaiger Hülfslinien von gegebenen oder gesuchten Linien sind folgende Bezeichnungen gewählt:

1) „Alle Projizierenden, sowohl in der Anschauungsfigur, als auch in Umlegungen, siehe Erkl. 45, in der Konstruktionsfigur, sind durch feine, kurze, unterbrochene Striche ----------, d. h. kurzgestrichelt bezeichnet."
2) „Alle Projektionen gegebener Linien sind durch mittelbreite ununterbrochene Striche ———, etwaige Verlängerungen gegebener Strecken bis zum Durchschnitt mit der **Pr. Eb.** durch feine, ununterbrochene Striche ———, darüber hinaus durch feine, längere, unterbrochene Striche – – – – – bezeichnet."
3) „Alle Projektionen gesuchter Linien sind durch noch breitere ununterbrochene Striche ——— bezeichnet."
4) „Alle Umlegungen sind strichpunktiert —·—·—· und zwar gegebene und gesuchte Linien in der Stärke wie unter 2) und 3) unterschieden, etwaige Verlängerungen gegebener oder gesuchter Strecken aber fein —·—·—· strichpunktiert gezeichnet."
5) „Alle übrigen Hülfslinien sind durch feine unterbrochene Striche – – – bezeichnet.

A) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Punktes.

Frage 7. Wie bestimmt man die rechtwinklige Projektion eines Punktes auf eine Projektionsebene?

Figur 5.



Antwort. Ist, siehe Figur 5, a der gegebene Punkt, E die **Pr. Eb.**, auf welche der Punkt projiziert werden soll, so denke man sich von dem Punkte a ein Perpendikel auf die **Pr. Eb.** E gefällt; der Fusspunkt a_1 dieses Perpendikels ist die Projektion des Punktes a auf die **Pr. Eb.** E.

Erkl. 10. Aus der in der Antwort auf die Frage 7 durchgeführten Projektion eines Punktes folgt der Satz:

„Die Projektion eines Punktes ist wieder ein Punkt."

Erkl. 11. Da es nur einen einzigen Fusspunkt des Perpendikels durch a, siehe Figur 5, gibt, so ist die rechtwinklige Projektion eines Punktes vollständig bestimmt, sobald die **Pr. Eb.** und der Punkt im Raume gegeben sind.

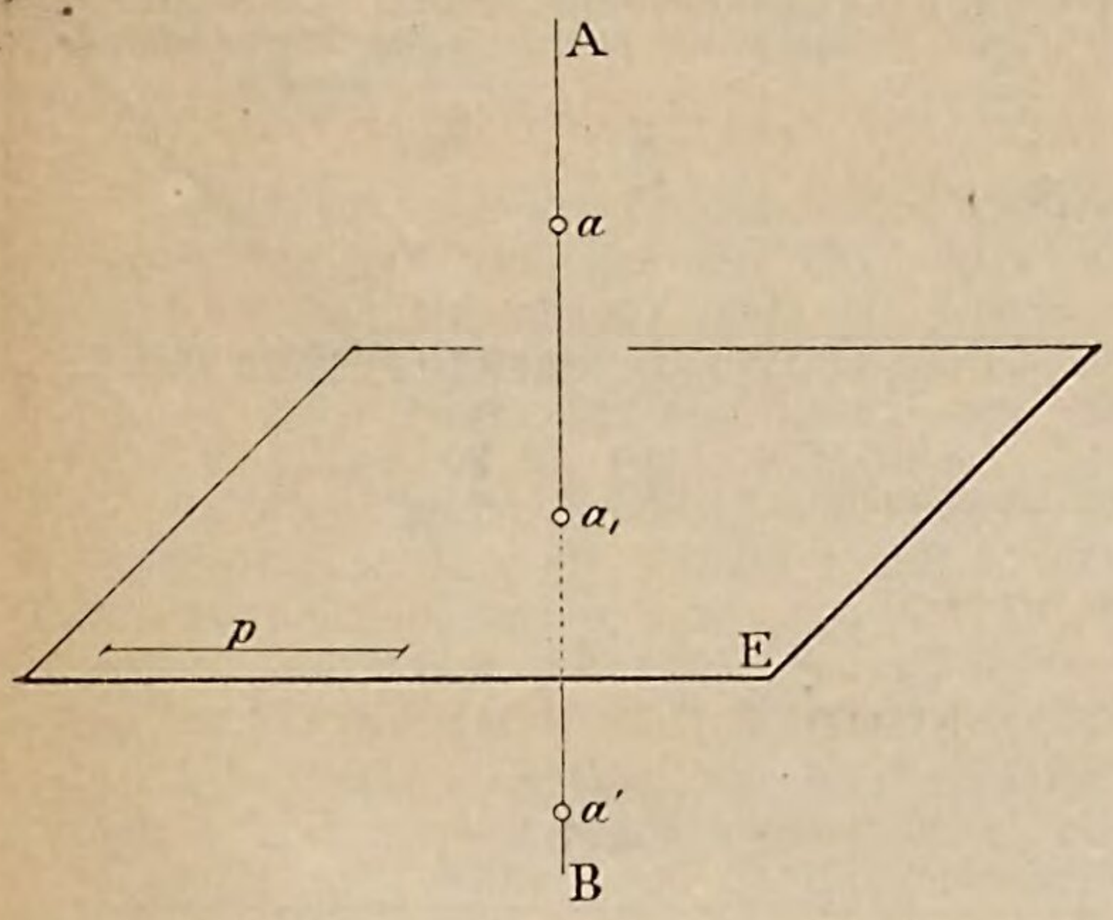
Erkl. 12. Zur Bezeichnung der Punkte und ihrer Projektionen benützt man die Buchstaben

des kleinen lateinischen Alphabets, indem man den Punkt und seine Projektion mit den gleichen Buchstaben bezeichnet, jedoch dem die Projektion bezeichnenden Buchstaben die arabische Ziffer 1 rechts unten beifügt.

Heissen, siehe Figur 4, z. B. die Punkte im Raume a, b, c, so führen ihre Projektionen die Bezeichnungen a_1, b_1, c_1 etc.

Frage 8. Wie bestimmt man umgekehrt bei gegebener Projektion eines Punktes dessen Lage im Raume?

Figur 6.



Antwort. Ist, siehe Figur 6, a_1 die rechtwinklige Projektion eines Punktes a, und denkt man sich in a_1 eine Normale AB zur **Pr. Eb.** E gezogen, so ist diese Normale der geometrische Ort für den zu bestimmenden Punkt a. Jeder Punkt von AB kann der gesuchte sein und um ihn zu erhalten, hat man nur nötig, seine Entfernung von der **Pr. Eb.** zu kennen. Sei diese Entfernung etwa durch die Strecke p gegeben, so denke man sich auf der Normalen AB von a_1 aus eine Länge gleich der Strecke p abgetragen, was nach zwei Seiten hin, nämlich nach $a_1 a$ und $a_1 a'$ geschehen kann.

Erkl. 13. Aus dem in der Antwort auf die Frage 8 Angeführten folgt der Satz:

„Für einen Punkt, dessen Projektion a_1 ist und der eine Entfernung gleich einer gegebenen Strecke p von der **Pr. Eb.** hat, gibt es zwei Lagen a und a' im Raume, welche auf verschiedenen Seiten der **Pr. Eb.** liegen."

Erkl. 14. Aus der Planimetrie ist bekannt, dass jeder Punkt eine gerade Linie in zwei Strahlen teilt, welche entgegengesetzte Richtung haben, von denen die eine „positiv" (in Zeichen +), die andere „negativ" (in Zeichen —) heisst.

Erkl. 15. Nach Erkl. 14 teilt somit der Punkt a_1, siehe Figur 6, die Normale AB in zwei Strahlen $a_1 A$ und $a_1 B$, von welchen der eine $a_1 A$ die positive, der andere $a_1 B$ die negative Richtung besitzen soll.

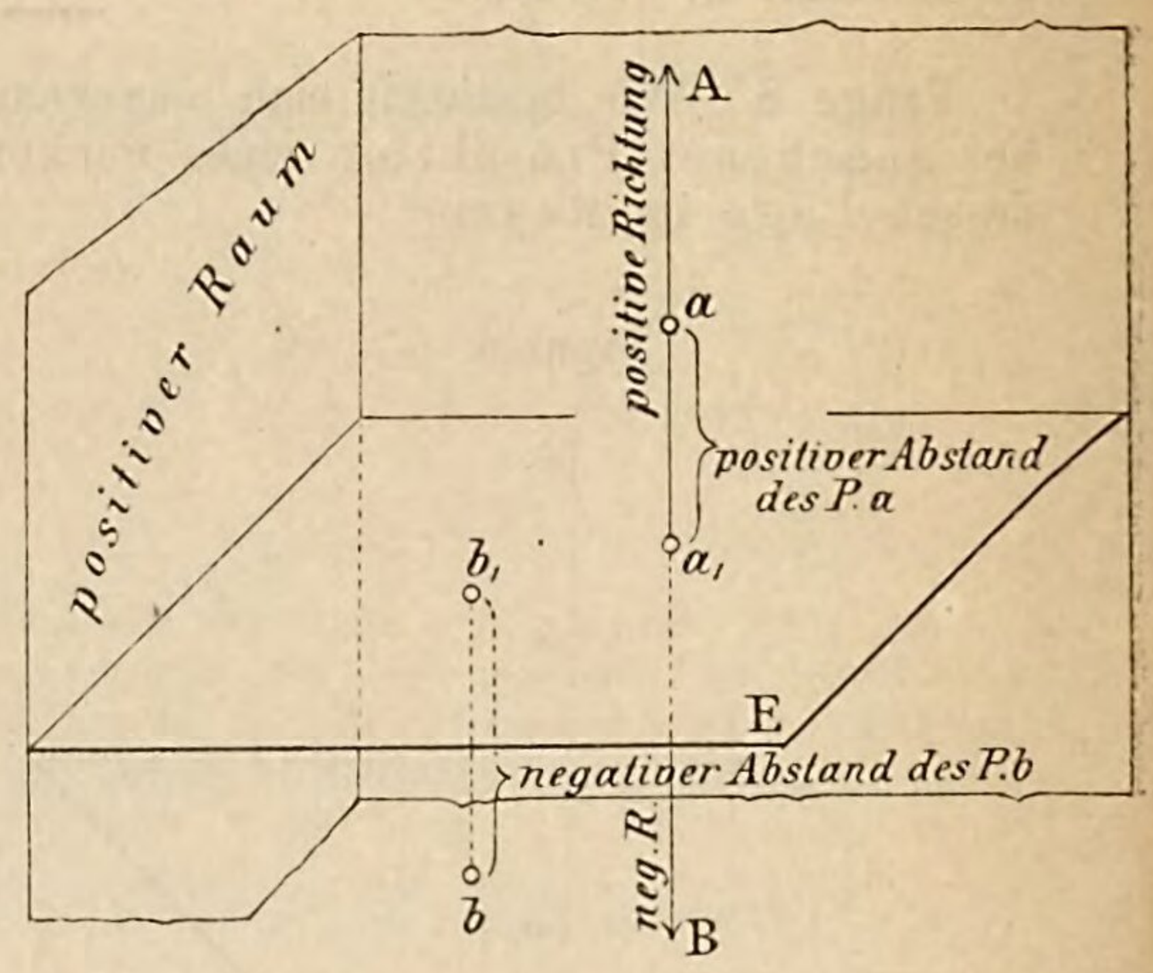
Erkl. 16. Die **Pr. Eb.** E teilt den Raum, siehe Figur 7, in zwei Teile, von welchen der den positiven Teil $a_1 A$ der Normale AB enthaltene Teil der positive, der andere der negative Raum genannt wird.

Erkl. 17. Die Länge der zwischen dem Punkte a, siehe Fig. 7, und seiner Projektion a_1 gelegenen Strecke $a\,a_1$ heisst der Abstand dieses Punktes von der **Pr. Eb.** und zwar heisst dieser Abstand positiv, wenn er im positiven Raume, dagegen negativ, wenn er im negativen Raume gelegen ist.

Erkl. 18. Figur 7 gibt eine anschauliche Darstellung des in den Erkl. 15, 16 und 17 Angeführten. Zur wirklichen Ausführung der Projektionszeichnung dient jedoch die mit der Papierebene zusammenfallende **Pr. Eb.** Dabei ist angenommen, dass der Beschauer sich im positiven Raume befindet und von sehr grosser, von unendlicher Ferne her, senkrecht auf die **Pr. Eb.** sehe.

Für diesen Fall werden aber dann nur die Projektionen der Punkte zu zeichnen sein, während die Projizierenden selbst nicht sichtbar erscheinen, sondern mit der Projektion der Punkte sich decken.

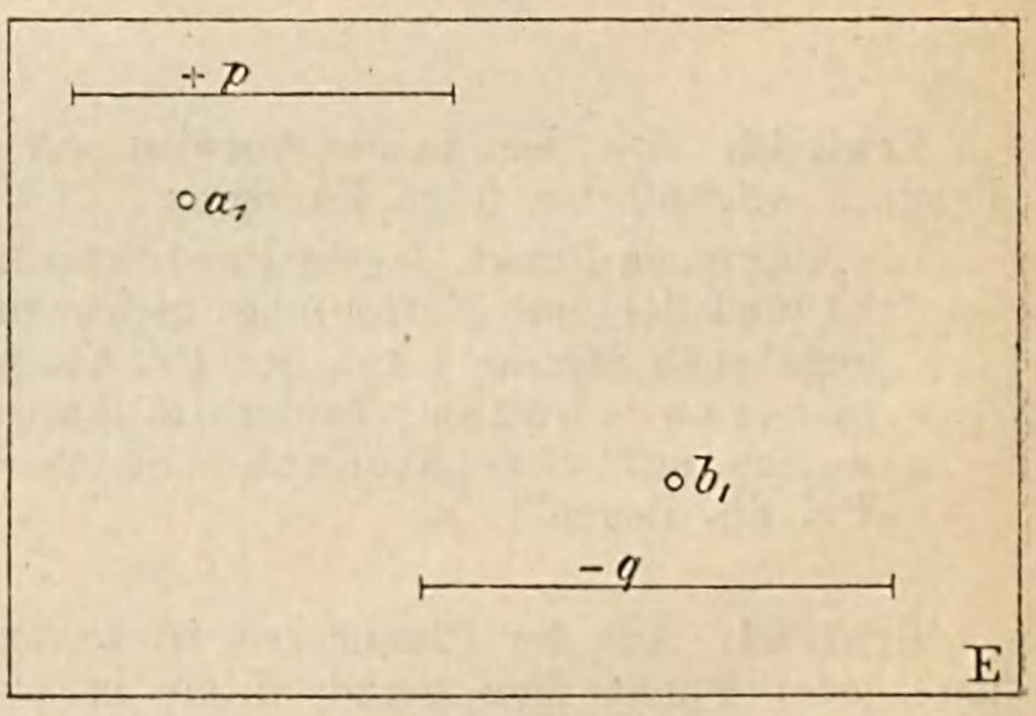
Figur 7.



Erkl. 19. In Figur 8 stellt der Punkt a_1 die Projektion eines Punktes a dar, dessen Abstand durch die Strecke p als positiv bezeichnet ist. Um eine Vorstellung von der räumlichen Lage des Punktes a zu erhalten, muss man sich in dem Punkte a_1 auf der Papierebene ein Perpendikel und zwar in positiver Richtung, d. h. nach aufwärts, errichtet denken, und von dem Punkte a_1 aus, siehe Frage und Antwort 8, auf diesem Perpendikel die Strecke p abtragen; der zweite Endpunkt dieser Strecke ist der Punkt a.

Für den Punkt b, dessen Abstand gleich der Strecke q, aber negativ ist, muss das Perpendikel in b, nach abwärts errichtet und die Strecke q von b in dieser Richtung aufgetragen werden, um im zweiten Endpunkt derselben die Lage des Punktes b zu erhalten.

Figur 8.



Erkl. 20. Zweckmässig ist es, die den Abstand des Punktes bestimmende Strecke gleich durch die zugehörige Projektion des Punktes selbst in willkürlicher Richtung zu ziehen, siehe Figur 9, worin die Strecke $\overline{a_1\,a'}$, siehe Erkl. 21, den Abstand des Punktes a, dessen Projektion a_1 ist, bedeutet.

Erkl. 21. Der über zwei Punkte gesetzte Strich soll hier, wie auch in der Folge bedeuten, dass von der durch die Punkte begrenzten Strecke die Rede ist, und zwar ist diese gemessen gedacht, in der Richtung vom ersten Punkte zum zweiten; wird von der Verbindungslinie zweier Punkte ohne dieses Zeichen gesprochen, so ist diese als unbegrenzte Gerade zu denken, deren Lage jene Punkte bestimmen.

Erkl. 22. Sind mehrere Punkte durch ihre Projektionen gegeben, so zieht man durch die Projektionen die die Abstände bezeichnenden Strecken in paralleler Richtung und bezeichnet

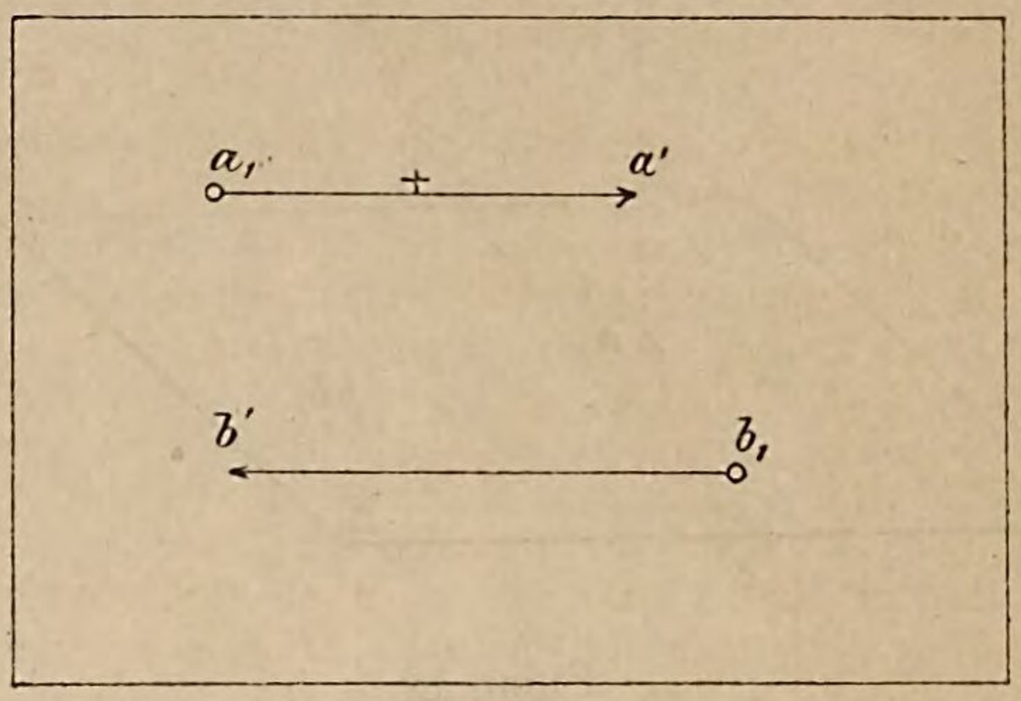
die Enden mit dem gleichen Buchstaben, wie ihre zugehörigen Projektionen, jedoch mit einem Beistrich rechts oben.

Z. B. für den Punkt a_1 wird der zweite Endpunkt der Strecke heissen a'.

Um ausserdem noch anzudeuten, ob die Abstände der Punkte von der **Pr. Eb.** positiv oder negativ sind, versehe man die Enden a' und b', siehe Figur 9, mit Pfeilspitzen, durch deren Richtung der Sinn der Abstände angedeutet ist. Dabei ist es gleichgültig, welche Richtung der Pfeilspitze der positiven Abstandsrichtung entspricht.

In Figur 9 ist durch das Zeichen + angedeutet, dass der durch die Strecke $\overline{a_1 a'}$ bestimmte Abstand positiv zu nehmen sei, damit ist aber zugleich der Abstand $\overline{b_1 b'}$ des Punktes b als negativ bezeichnet, ohne dass es nötig ist, das Vorzeichen — der Strecke $\overline{b_1 b'}$ beizufügen.

Figur 9.

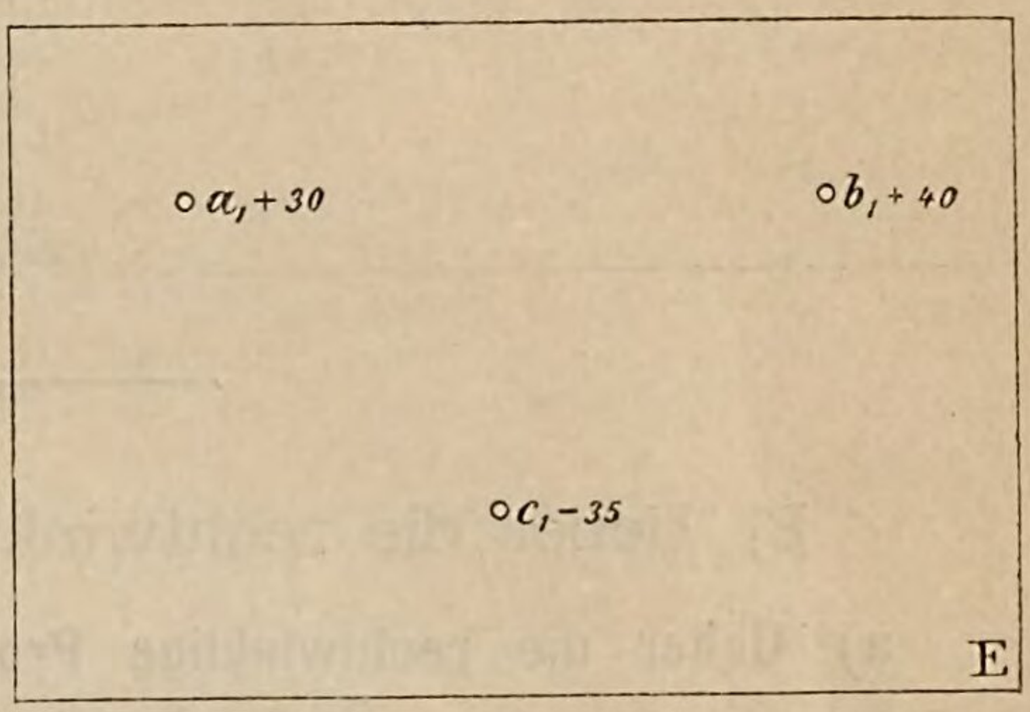


Erkl. 23. Anstatt die Grösse des Abstandes eines Punktes von der **Pr. Eb.** durch eine Strecke zu bezeichnen, kann man diesen Abstand auch in irgend einer Längeneinheit durch eine Masszahl ausdrücken und diese der Projektion des Punktes beifügen.

In Figur 10 ist durch $a_1 + 30$ und $b_1 + 40$ ausgedrückt, dass die Punkte a und b, deren Projektionen a_1 und b_1 sind, von der **Pr. Eb.** einen positiven Abstand von 30 bezw. 40 Längeneinheiten, z. B. Millimeter besitzen.

Der Punkt c dagegen, dessen Projektion c_1 ist, hat, wie durch $c_1 - 35$ angedeutet ist, einen negativen Abstand von 35 Längeneinheiten, bezw. Millimeter.

Figur 10.



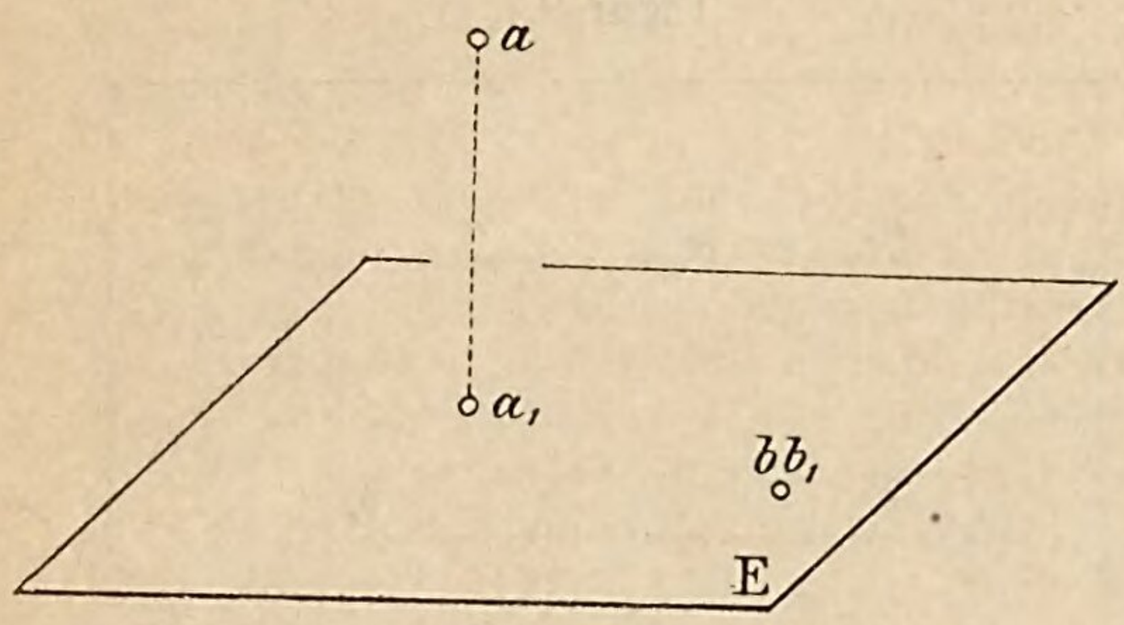
Erkl. 24. Das in Erkl. 23 Gesagte findet eine ausgedehnte Anwendung bei kartographischen Darstellungen, insbes. bei topographischen Karten und Plänen, woselbst die den Punkten beigesetzten Zahlen die Bezeichnung „Höhenzahlen“ oder „Höhenkoten“ führen. Sie bezeichnen den Abstand der Terrainpunkte von einer willkürlich gewählten horizontalen Projektionsebene, welche in diesem speziellen Falle „Horizont“ genannt wird. Die Projizierenden sind dann vertikale oder lotrechte Linien, laufen somit parallel zur Richtung der Schwerkraft.

Frage 9. Durch welche Bestimmungsstücke lässt sich die Lage eines Punktes im Raume gegen die **Pr. Eb.** ermitteln?

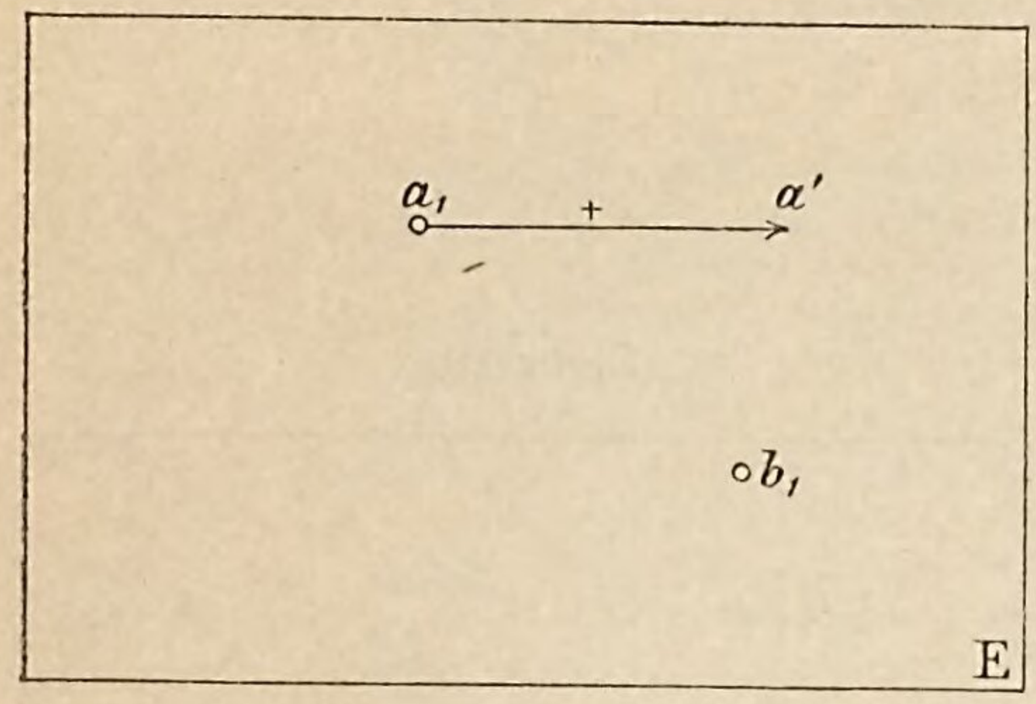
Antwort. Die Lage eines Punktes im Raume gegen die **Pr. Eb.** lässt sich nach dem in der Antwort auf die Frage 8, sowie in den Erklärungen 14 bis 17 Angeführten ermitteln, sobald man die Projektion des Punktes, sowie seinen Abstand von der **Pr. Eb.** sowohl der Grösse wie dem Vorzeichen nach kennt.

Frage 10. Welche Lagen gegen die **Pr. Eb.** kann ein Punkt im Raume einnehmen?

Figur 11.



Figur 12.



Antwort. Ein Punkt kann entweder:

1) beliebig im Raume liegen, wie Punkt *a*, siehe Figur 11, dann besitzt er einen gewissen Abstand von der **Pr. Eb.**, der zur Bestimmung der Lage des Punktes gegen die letztere bekannt sein muss, siehe Figur 12;
2) der Punkt liegt in der **Pr. Eb.** selbst, wie z. B. der Punkt *b*, siehe Figur 11 und 12, sein Abstand von derselben ist dann gleich Null und der Punkt fällt mit seiner Projektion zusammen.

Andere Lagen sind nicht möglich.

B) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Linie.

a) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Linie im allgemeinen.

Frage 11. Was versteht man unter der rechtwinkligen Projektion einer Linie auf einer **Pr. Eb.** und wie bestimmt man dieselbe?

Erkl. 25. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Eine Cylinderfläche entsteht, wenn eine gerade Linie parallel zu sich selbst sich so bewegt, dass sie stets eine vorgegebene Linie schneidet; diese Linie heisst die Leitlinie der Cylinderfläche."

Erkl. 26. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

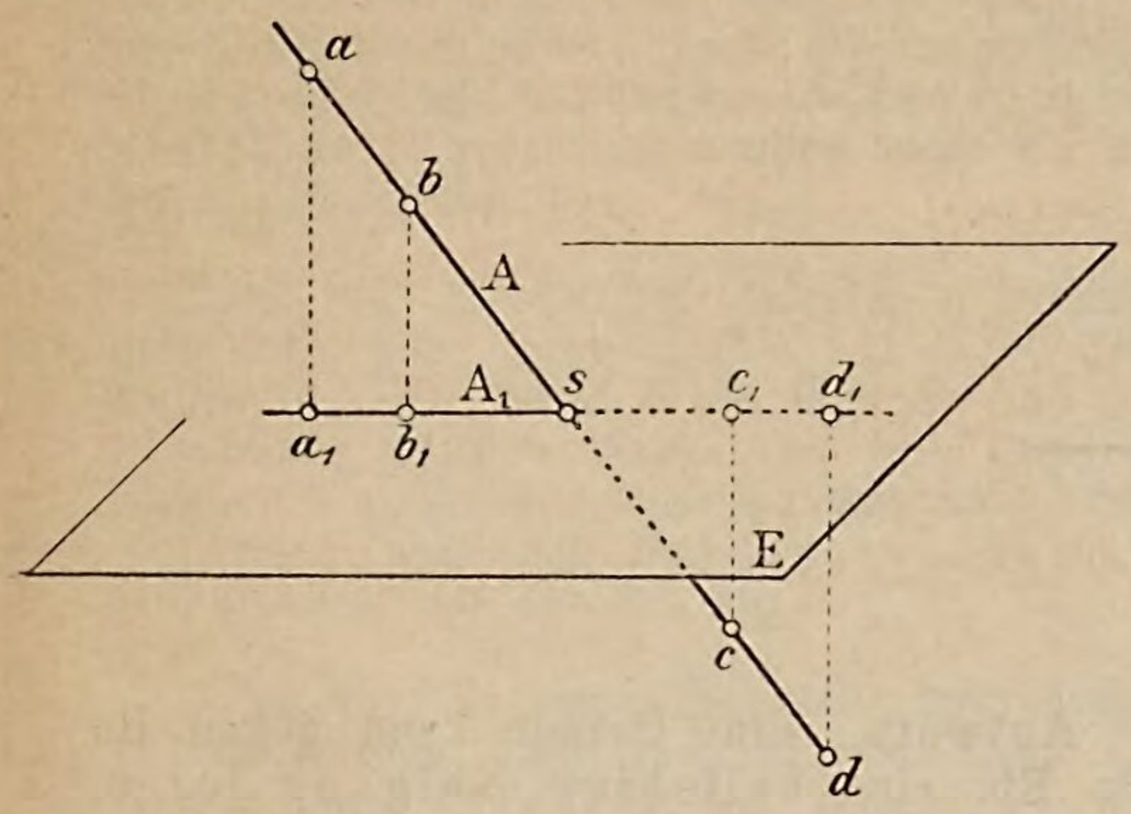
„Die rechtwinklige Projektion einer Linie auf einer **Pr. Eb.** ist im allgemeinen wieder **eine Linie**."

Antwort. Die rechtwinklige Projektion einer Linie ist der geometrische Ort der Projektionen aller ihrer Punkte; man bestimmt dieselbe, indem man sich durch alle Punkte der Linie Projizierende auf die **Pr. Eb.** gezogen denkt. Diese bilden im allgemeinen eine Cylinderfläche, siehe Erkl. 25, welche die projizierende Cylinderfläche der Linie heisst. Ihre Durchschnittslinie mit der **Pr. Eb.** ist die Projektion der Linie.

b) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Geraden.

Frage 12. Was versteht man unter der rechtwinkligen Projektion einer Geraden und wie bestimmt man dieselbe?

Figur 13.



Antwort. Die rechtwinklige Projektion einer Geraden ist der geometrische Ort der Projektionen aller ihrer Punkte und man bestimmt dieselbe, indem man sich von allen ihren Punkten, z. B. *a, b, c, d,* siehe Fig. 13, Projizierende auf die **Pr. Eb.** gezogen denkt. Diese bilden in ihrer Gesamtheit eine Ebene, welche die projizierende Ebene, siehe Erkl. 28, der Geraden heisst.

Ihre Durchschnittslinie mit der **Pr. Eb.** ist eine Gerade A_1, siehe Erkl. 29, und stellt die rechtwinklige Projektion der Geraden *A* auf die **Pr. Eb.** dar.

Erkl. 27. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Die rechtwinklige Projektion einer Geraden auf einer **Pr. Eb.** ist im allgemeinen wieder eine Gerade."

Erkl. 28. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Fällt man von allen Punkten einer Geraden Perpendikel auf eine Ebene, so bilden diese eine neue Ebene, welche senkrecht zur gegebenen Ebene steht."

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

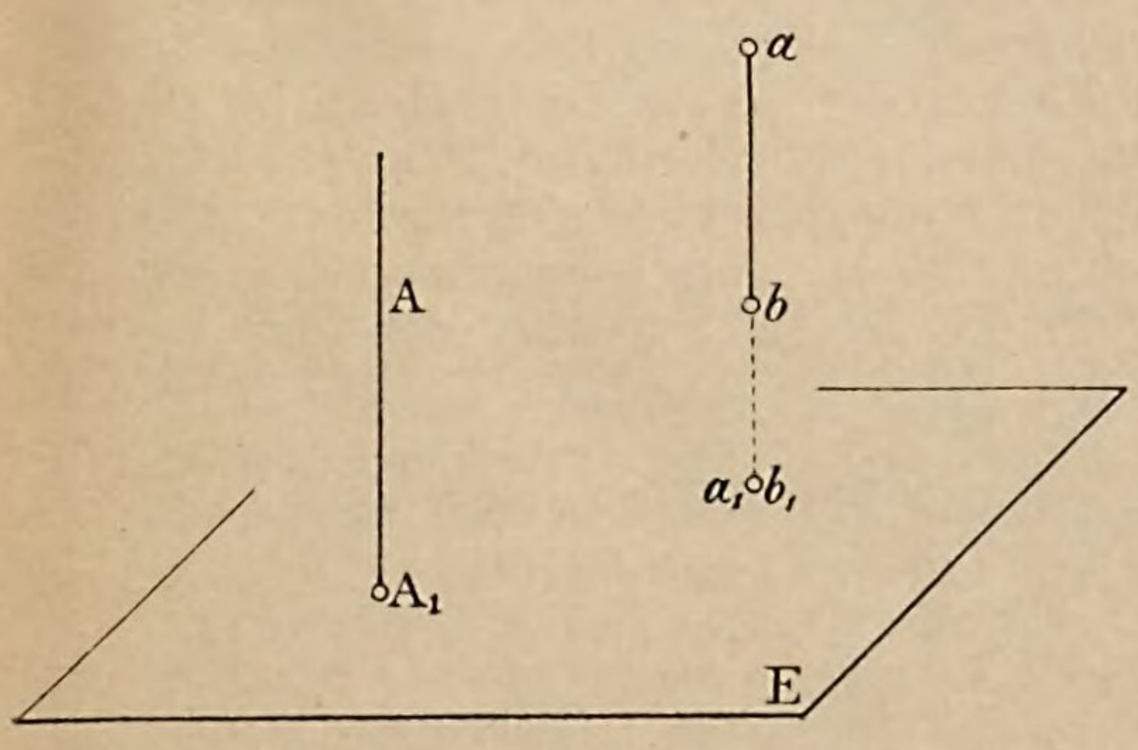
Erkl. 29. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Die Durchschnittslinie zweier Ebenen ist stets eine Gerade."

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Frage 13. Gibt es auch Fälle, in welchen die Projektion einer Geraden keine Gerade ist?

Figur 14.



Antwort. Steht die Gerade auf der **Pr. Eb.** senkrecht, siehe Figur 14, so fallen die durch ihre Punkte gezogenen Projizierenden mit der Geraden selbst zusammen und ihre Projektion ist ein Punkt, nämlich der Durchschnittspunkt der Geraden mit der **Pr. Eb.**

Erkl. 30. Zur Bezeichnung der Linien und ihrer Projektionen dienen im allgemeinen die Buchstaben des grossen lateinischen Alphabets, wobei wieder dem die Projektion bezeichnenden Buchstaben die arabische Ziffer 1 rechts unten beigefügt wird.

Heisst somit eine Linie A, so heisst ihre Projektion A_1.

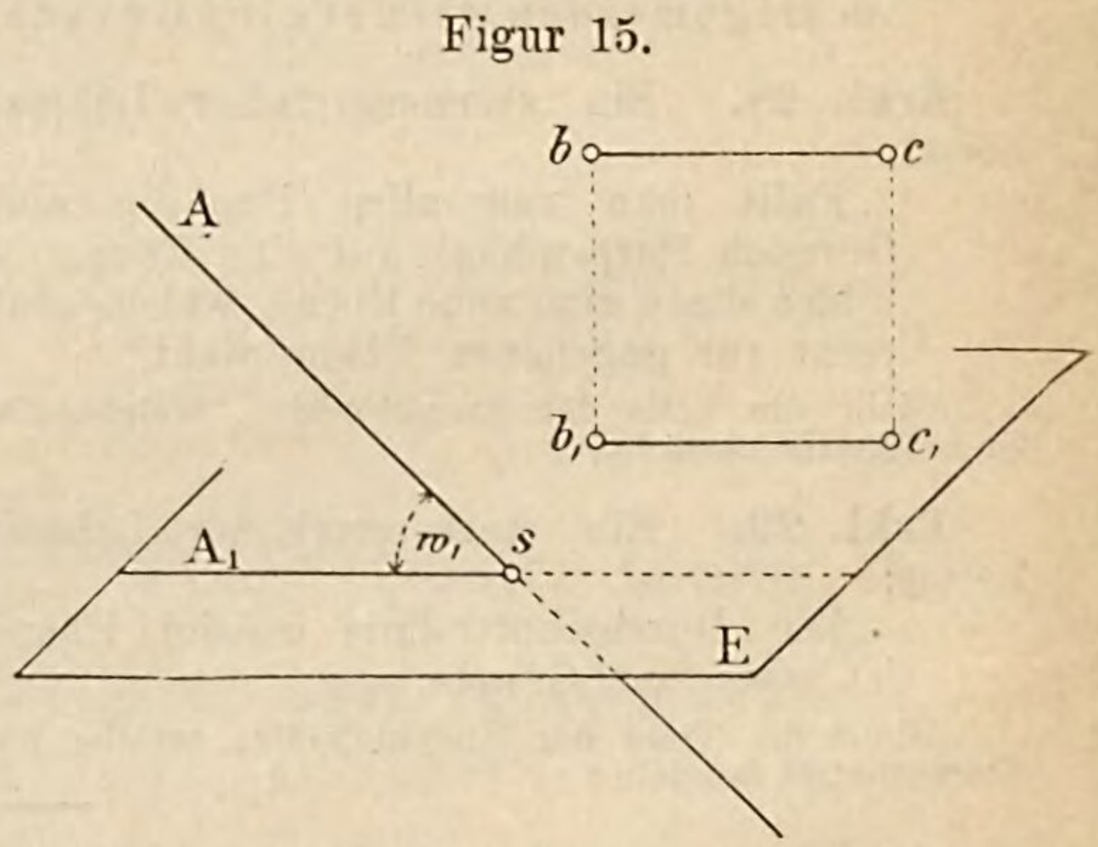
Erkl. 31. In Figur 14 sind die Geraden A und ab als senkrecht zur **Pr. Eb.** gedacht; ihre Projektionen sind somit je ein Punkt, der aber in diesem Falle entsprechend der Geraden, deren Projektion er ist, mit A_1 bezw. $a_1 b_1$ bezeichnet werden muss.

Frage 14. Welche Lagen kann eine Gerade ausser dem Senkrechtstehen noch gegen die **Pr. Eb.** haben?

Antwort. Eine Gerade kann gegen die **Pr. Eb.** eine beliebige Neigung haben, wie z. B. die Gerade A, siehe Figur 15 oder sie kann zur **Pr. Eb.** parallel sein, wie die Gerade bc der Figur 15.

Erkl. 32. Im Falle eine Gerade, z. B. die Gerade A, siehe Figur 15, eine beliebige Neigung zur **Pr. Eb.** hat, wird sie mit ihrer Projektion A_1 einen Punkt s gemeinsam haben, nämlich ihren Durchschnittspunkt mit der **Pr. Eb.**, siehe Erkl. 33. Ist die Gerade aber parallel zur **Pr. Eb.**, wie die Gerade bc, siehe Figur 17, so hat sie keinen Punkt mit ihrer Projektion gemeinsam, siehe Erkl. 34. Man sagt in diesem Falle, der Durchschnittspunkt der Geraden mit der Ebene liegt in unendlicher Ferne, siehe Erkl. 35.

Figur 15.



Erkl. 33. Der Durchschnittspunkt einer Geraden mit der **Pr. Eb.** heisst die Spur der Geraden. Ueberhaupt versteht man unter der Spur eines Raumgebildes stets dessen Durchschnitt mit der **Pr. Eb.**

Erkl. 34. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Eine Gerade ist parallel zu einer Ebene, wenn jede durch die Gerade gehende Ebene die gegebene Ebene nach einer Parallelen zur gegebenen Geraden schneidet.“

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Erkl. 35. Unter dem Parallelismus zweier Raumgrössen versteht man stets ein Schneiden in unendlicher Ferne.

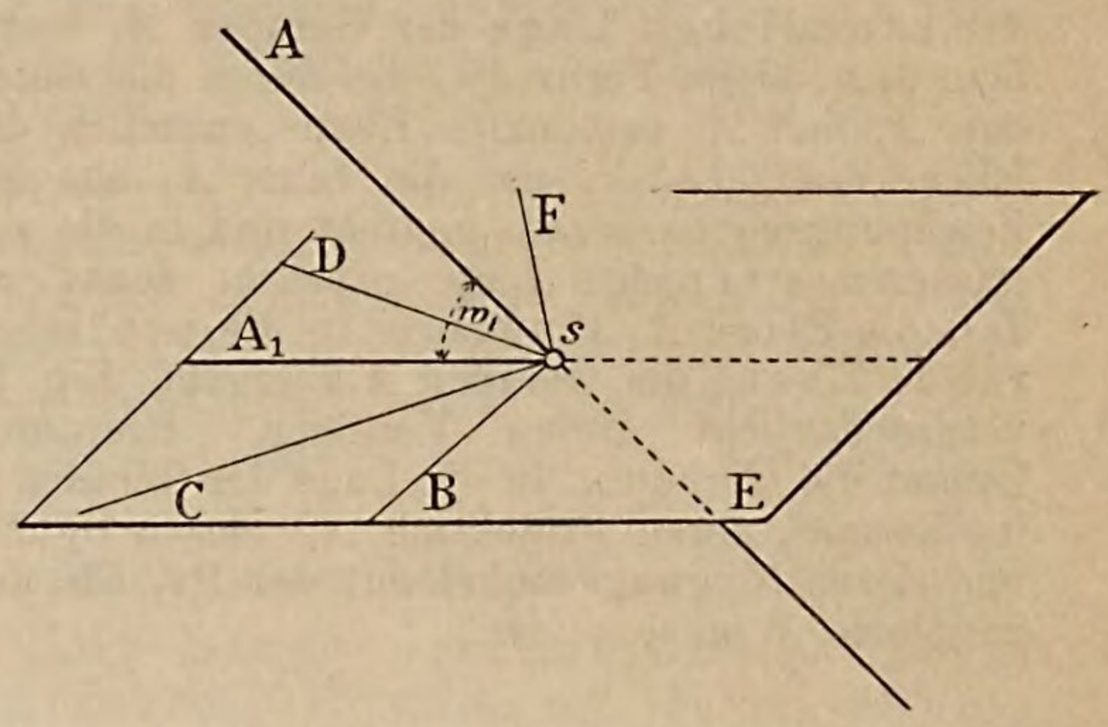
Parallele Gerade sind z. B. solche, die sich in unendlicher Ferne schneiden. Von zwei parallelen Ebenen sagt man, sie haben eine unendlich entfernte Schnittlinie.

Eine Ebene und eine zu ihr parallele Gerade besitzen einen unendlich fernen Schnittpunkt.

Erkl. 36. Durch den Punkt s, siehe Fig. 15, wird die Gerade A in zwei Strahlen geteilt, von welchen der im positiven Raume gelegene Strahl positiv, der andere negativ heissen soll.

Erkl. 37. Die Projektion des positiven Teiles einer Geraden A soll stets mit ununterbrochenen Strichen, jene des negativen Teiles aber mit unterbrochenen Strichen gestrichelt, gezeichnet werden, siehe Fig. 15, sowie Anmerkung 2.

Figur 16.



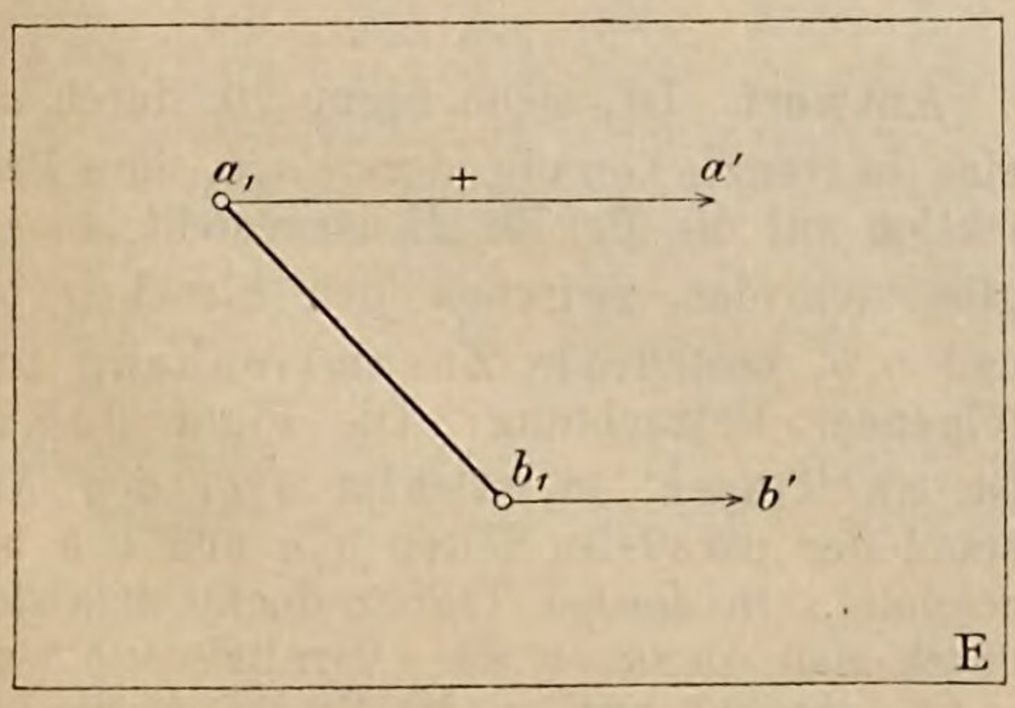
Erkl. 38. Aus der Stereometrie ist bekannt, dass unter allen Geraden B, C, A_1, D, F, siehe Figur 16, der Ebene E die Gerade A_1 den kleinsten spitzen Winkel w_1 mit der Geraden A einschliesst; deshalb nennt man diesen Winkel w_1 auch den Neigungswinkel der Geraden A mit der **Pr. Eb.**

Erkl. 39. Für die Folge soll stets vorausgesetzt werden, dass die positiven Teile von Gerader und Projektion den Winkel w_1 einschliessen. Diese Angabe sei als Sinn des Winkels bezeichnet.

Erkl. 40. Für den Fall, dass eine Gerade parallel zur **Pr. Eb.** verläuft, ist ihr Winkel w_1 mit der letztern Ebene gleich Null. Steht eine Gerade aber senkrecht zur **Pr. Eb.**, so ist der Winkel $w_1 = 90^0$.

Frage 15. Welche Bestimmungsstücke müssen in der Projektionszeichnung gegeben sein, um die Lage einer Geraden gegen die **Pr. Eb.** erkennen und ermitteln zu können?

Figur 17.



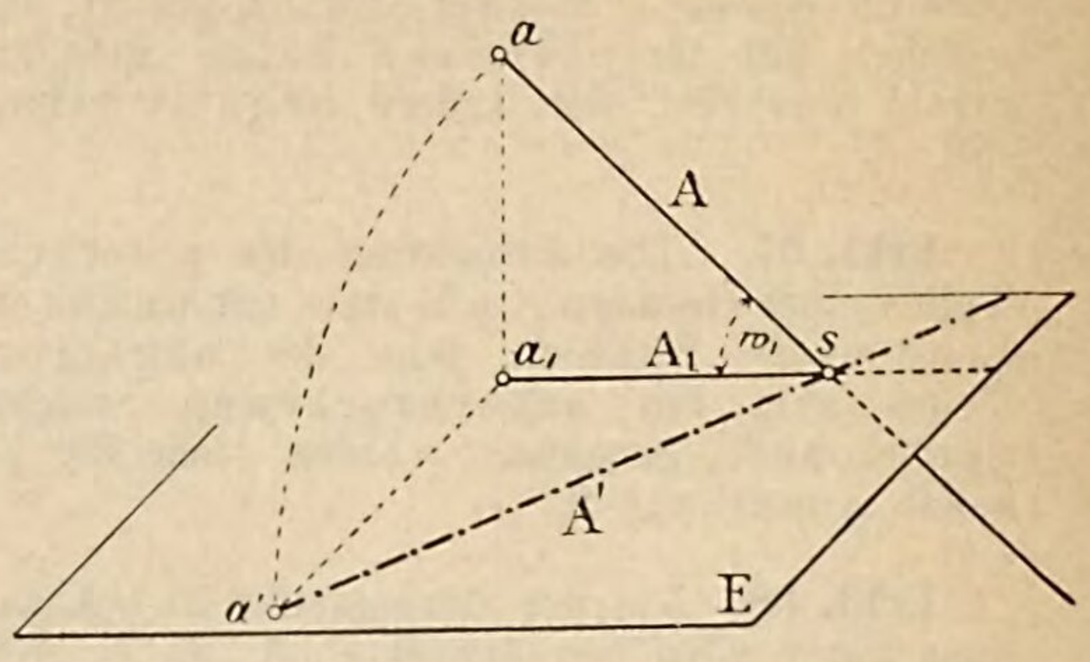
Antwort. Damit die Lage einer Geraden gegen die **Pr. Eb.** bestimmt erscheint, müssen entweder zwei Punkte von ihr, je durch ihre Projektion und ihren Abstand von der **Pr. Eb.** gegeben sein, siehe Figur 17. Kennt man aber von einer Geraden A, siehe Figur 18 und 19 ihre Projektion A_1, so muss zur Bestimmung der räumlichen Lage von A ausserdem die Spur s und die Grösse des Neigungswinkels w_1 bekannt sein.

Erkl. 41. Will man sich von der Lage der Geraden ab im Raume, siehe Figur 17, eine Vorstellung verschaffen, so denke man sich in den Punkten a_1 und b_1 Perpendikel zur Zeichnungsebene errichtet, auf denselben von a_1 bezw. b_1 aus die Längen $\overline{a_1 a'}$ und $\overline{b_1 b'}$ nach aufwärts, d. h. in positiver Richtung aufgetragen und die so sich ergebenden Punkte a und b mit einander verbunden. Diese Ver-

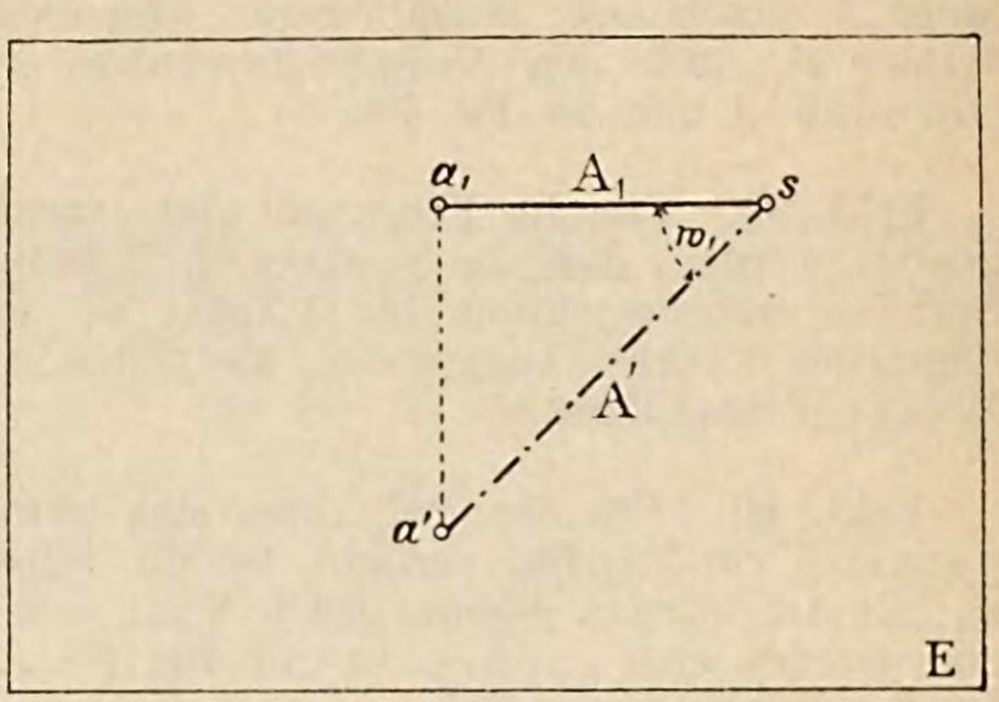
bindungslinie ab gibt dann jene Gerade im Raume, deren Projektion durch die Gerade $a_1 b_1$ dargestellt ist.

Erkl. 42. Kennt man von einer Geraden A, siehe Figur 18 und 19, ihre Projektion A_1, ihre Spur s und ihren Neigungswinkel w_1 mit der **Pr. Eb.,** so erhält man eine Vorstellung von der räumlichen Lage der Geraden A, wenn man sich, siehe Figur 19, die durch die Geraden A_1 und A' bestimmte Ebene, nämlich die Ebene des $\triangle\ a' s a_1$ um die Linie A_1 aus der Zeichnungsebene heraus gedreht und in die zur letzteren senkrechte Lage gebracht denkt, so dass die Ebene $A_1 A'$ nunmehr in die projizierende Ebene der Geraden A übergeht; Fig. 18 veranschaulicht diesen Vorgang. Hierdurch kommt die Gerade A' in die Lage der Geraden A im Raume, deren Projektion A_1, deren Spur s und deren Neigungswinkel mit der **Pr. Eb.** der gegebene Winkel w_1 ist.

Figur 18.



Figur 19.

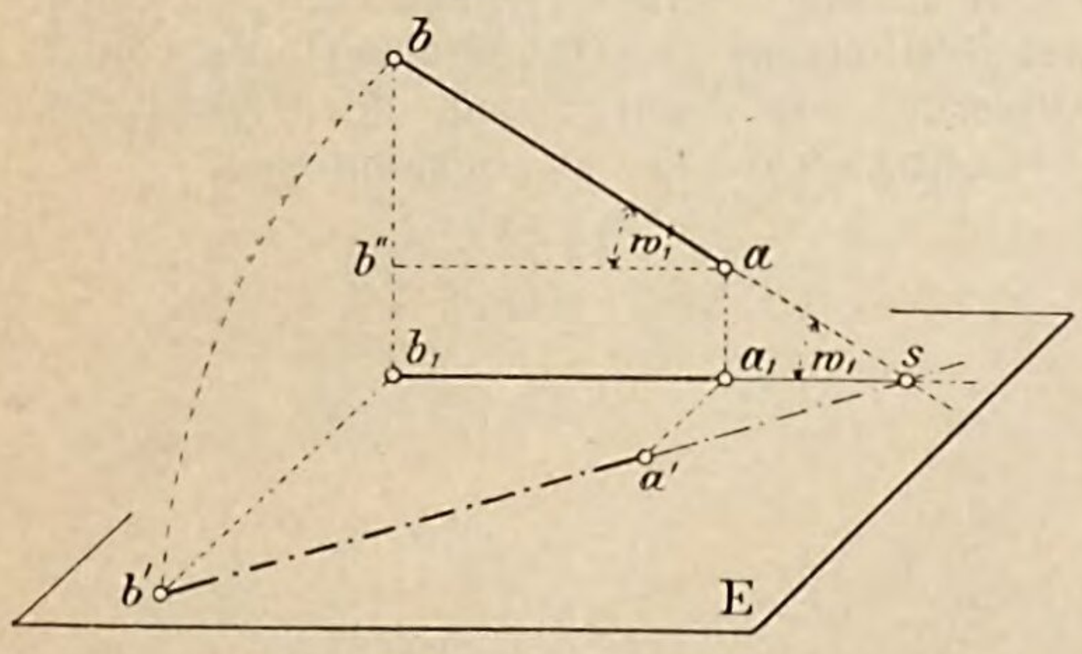


Erkl. 43. Das in der Antwort auf Frage 14 Gesagte lässt sich kurz wie folgt als Satz zusammenfassen:

„Damit die Lage einer Geraden im Raume gegen die **Pr. Eb.** aus der Projektionszeichnung erkannt werden kann, ist es notwendig, entweder die Projektionen von zweien ihrer Punkte nebst deren Abständen von der **Pr. Eb.** oder aber die Projektion, die Spur und den Neigungswinkel der Geraden gegen die **Pr. Eb.** zu kennen."

Frage 16. In welchem Zusammenhange steht die wahre Länge einer begrenzten Geraden, d. h. einer geradlinigen Strecke zu der Länge ihrer Projektion?

Figur 20.



Erkl. 44. Denkt man sich das Trapez $ab\,b_1 a_1$, siehe Figur 20, samt der Parallelen ab'' um die Seite $a_1 b_1$ so lange gedreht, bis die Trapezebene mit der **Pr. Eb.** zusammenfällt (Figur 20 veranschaulicht diesen Vorgang), so erhält man die Projektionszeichnung, siehe

Antwort. Ist, siehe Figur 20, durch $\overline{ab}$ eine begrenzte Gerade, durch $\overline{a_1 b_1}$ ihre Projektion auf die **Pr. Eb.** E dargestellt, so ergibt sich der zwischen den Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{a_1 b_1}$ bestehende Zusammenhang aus folgender Betrachtung: Die Figur $ab\,b_1 a_1$ ist ein Trapez, in welchem $\overline{a_1 b_1}$ den Abstand der parallelen Seiten $a_1 a$ und $b_1 b$ bezeichnet. In diesem Trapez denke man sich durch den Punkt a die Parallele ab'' zu $a_1 b_1$ gezogen, welche die Projizierende $b b_1$ in einem Punkt b'' trifft und ausserdem das ebengenannte Trapez in das Rechteck $ab'' b_1 a_1$ und das rechtwinklige Dreieck $ab''b$ zerlegt. In dem Rechteck $ab'' b_1 a_1$ sind die parallelen Seiten je einander gleich, d. h. es ist:

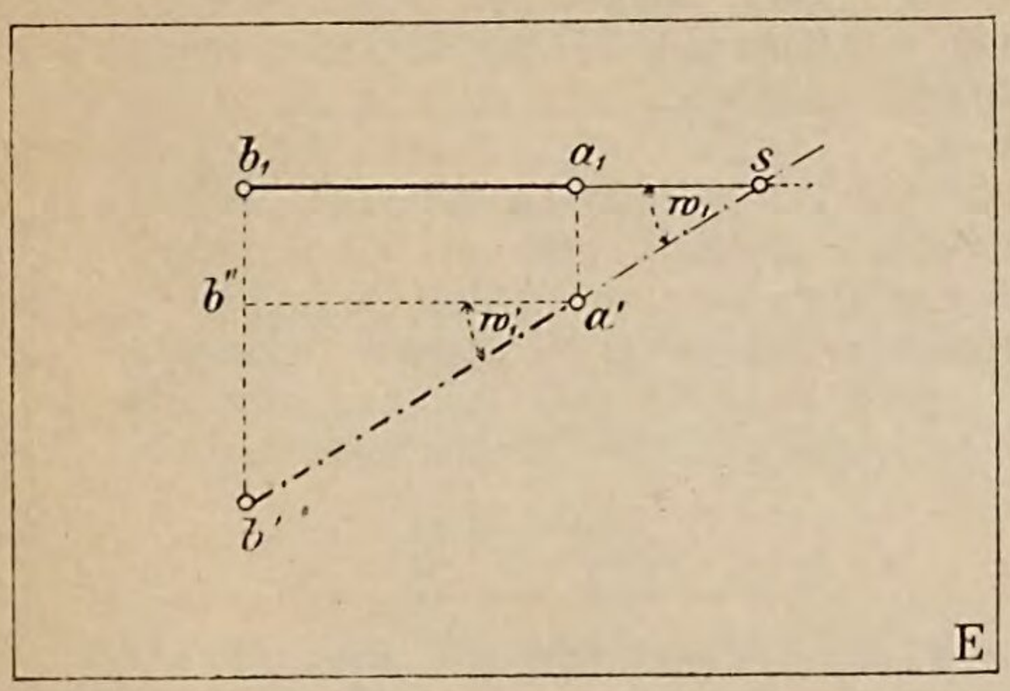
1) . . . . $\overline{ab''} = \overline{a_1 b_1}$

und

2) . . . . $\overline{aa_1} = \overline{b'' b_1}$

Figur 21, in welcher die Seiten $\overline{a_1 a'}$ und $\overline{b_1 b'}$ des Trapezes $a' b' b_1 a_1$ senkrecht zur Projektion $\overline{a_1 b_1}$ stehen; ferner ist das in der Projektionsebene gezeichnete Trapez $a' b' b_1 a_1$ kongruent dem räumlichen Trapez $a b b_1 a_1$, d. h. die Strecke $\overline{a' b'}$ ist gleich der wahren Länge von $\overline{ab}$. Verlängert man endlich $a' b'$ bis zum Schnitt s mit $a_1 b_1$, so entspricht die Projektion s der Figur 21 dem gleichnamigen Punkte s der Figur 20 und bezeichnet somit die Spur der Geraden ab. Die Winkel w_1 u. w_1' der Fig. 21 entsprechen gleichfalls den gleichnamigen Winkeln w_1 und w_1' der Fig. 20 und bezeichnen die Grösse des Neigungswinkels der Geraden ab mit der **Pr. Eb.**

Figur 21.



Erkl. 45. Das in der Figur 21 gezeichnete Trapez $a' b' b_1 a_1$ nennt man kurz die Umlegung des räumlichen Trapezes $a b a_1 b_1$ der Figur 20.

Erkl. 46. Aus dem in der Erkl. 44 Angeführten folgt, dass die wahre Länge einer durch die Punkte a und b begrenzten Strecke $\overline{ab}$, sowie die Spur und der Neigungswinkel der Geraden ab mit der **Pr. Eb.** in der Projektionszeichnung ermittelt werden können, sobald die Projektionen der Punkte a und b, sowie ihre Abstände von der **Pr. Eb.** bekannt sind.

Nun ist ferner:

$$\overline{b\,b''} = \overline{b\,b_1} - \overline{b''\,b_1}$$

oder in Rücksicht auf die Gleichung 2):

3) . . . . $\overline{b\,b''} = \overline{b\,b_1} - \overline{a\,a_1}$

d. h. gleich der Differenz der Abstände der Punkte a und b von der **Pr. Eb.** Denkt man sich ferner die Linien ab und $a_1 b_1$ bis zu ihrem Schnittpunkt s verlängert, so ist der Winkel w_1 von ab und $a_1 b_1$ gleich dem Winkel w_1' von ab und ab'' gleich dem Neigungswinkel von ab mit der **Pr. Eb.**

In dem rechtwinkligen Dreieck $ab''b$ sind somit die wahre Länge von ab, die Länge ihrer Projektion $= ab''$ und die Grösse des Neigungswinkels von ab mit der **Pr. Eb.** gleich dem Winkel w_1' enthalten und es ergeben sich unmittelbar folgende Beziehungen:

„Die Länge der Projektion einer begrenzten Geraden ab ist im allgemeinen gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, welches die wahre Länge der Geraden als Hypotenuse und den Neigungswinkel der Geraden mit der **Pr. Eb.** als den dieser Kathete anliegenden Winkel hat."

„Die Länge der Projektion ist im allgemeinen kleiner als die wahre Länge der Geraden."

Ist der Neigungswinkel w_1 gleich Null, so läuft die Gerade parallel zur **Pr. Eb.**, das Trapez $a b b_1 a_1$ geht in ein Rechteck über und die Länge der Projektion ist gleich der wahren Länge der Geraden; steht die Gerade senkrecht zur **Pr. Eb.**, so geht das genannte Trapez in eine Projizierende über. Die Projektion der Geraden wird ein Punkt.

Anmerkung 3. Diejenigen Leser, welchen die Lehre von der „Trigonometrie" nicht bekannt ist, können die mit * bezeichneten Fragen und Erklärungen übergehen.

***Erkl. 47.** Aus der Trigonometrie ist bekannt, dass in einem rechtwinkligen Dreiecke das Verhältnis der einem spitzen Winkel anliegenden Kathete zur Hypotenuse der Cosinus (in Zeichen: cos), das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse aber der Sinus (in Zeichen: sin) des betreffenden Winkels heisst.

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über ebene Trigonometrie handeln.)

***Erkl. 48.** Bezeichnet man die wahre Länge der Strecke $\overline{ab}$, siehe Figur 20 und 21, mit

die Länge ihrer Projektion $\overline{a_1 b_1}$ mit l_1, ferner die Differenz $\overline{b' b''}$ der Abstände der Endpunkte der Strecke von der **Pr. Eb.** mit d, endlich die Grösse des Neigungswinkels von ab mit der **Pr. Eb.** mit w_1, so bestehen zwischen l, l_1, w_1 und d folgende Beziehungen:

In Rücksicht auf das in Erkl. 47 Gesagte folgt mit Bezug auf das rechtwinklige Dreieck $ab''b'$, siehe Figur 21:

$$\frac{\overline{a' b''}}{\overline{a' b'}} = \cos w_1' = \cos w_1$$

oder, da:

$$\overline{a' b''} = \overline{a_1 b_1} = l_1$$

und

$$\overline{a' b'} = \overline{ab} = l$$

ist, auch:

$$\frac{l_1}{l} = \cos w_1$$

oder:

4) . . . . $\underline{l_1 = l \times \cos w_1}$

Ebenso:

$$\frac{\overline{b' b''}}{\overline{a' b'}} = \sin w'_1 = \sin w_1$$

oder, da:

$$\overline{b' b''} = d \text{ und } \overline{a' b'} = l$$

ist,

$$\frac{d}{l} = \sin w_1$$

oder:

5) . . . . $\underline{d = l \times \sin w_1}$

Aus den Formeln 4) und 5) ergeben sich folgende Sätze:

„Die Länge der Projektion einer Strecke ist gleich ihrer wahren Länge multipliziert mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Strecke mit der **Pr. Eb.**“

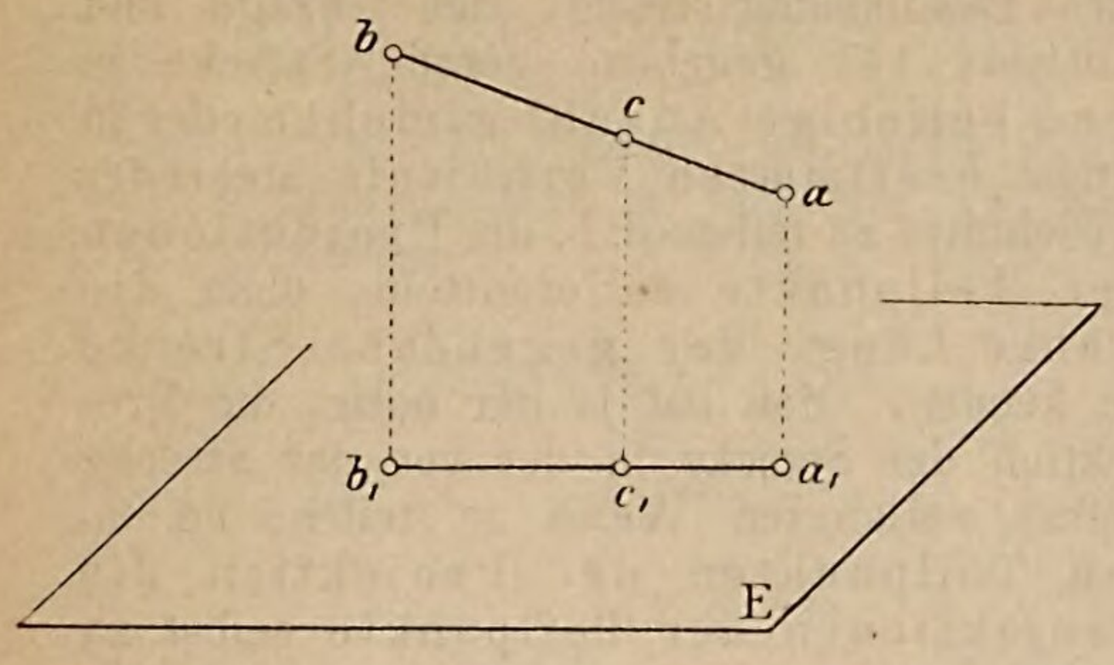
„Die Differenz der Abstände der Endpunkte einer Strecke ist gleich ihrer wahren Länge multipliziert mit dem Sinus des Neigungswinkels der Strecke mit der **Pr. Eb.**“

Frage 17. Wenn auf einer Strecke $\overline{ab}$, siehe Figur 22, ein Punkt c gegeben ist, der die Strecke in einem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$ teilt, in welchem Verhältnis wird dann durch die Projektion c_1 des Punktes c die Projektion $\overline{a_1 b_1}$ der Strecke $\overline{ab}$ geteilt? Siehe Erkl. 49.

Antwort. Aus dem in Erkl. 49 Gesagten folgt, dass, siehe Figur 22, zwischen den Strecken $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ auf $\overline{ab}$ und $\overline{a_1 c_1}$ und $\overline{b_1 c_1}$ auf $\overline{a_1 b_1}$ die Proportion stattfindet.

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bb}} = \frac{\overline{a_1 c_1}}{\overline{b_1 c_1}}$$

Figur 22.



Erkl. 49. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zwei unter beliebigem Winkel zu einander geneigte Gerade AB und CD, siehe Figur 23, werden von parallelen Strahlen in Punkten a, b, $c \cdots$, $a'b'c' \cdots$ so getroffen, dass die Abschnitte auf der einen Geraden AB in dem gleichen Verhältnis zu einander stehen, wie die zwischen den nämlichen Parallelen gelegenen Abschnitte auf der Geraden CD; d. h. es findet die Verhältnisgleichheit oder Proportion statt:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{b'c'}}$$

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Erkl. 50. In Figur 22 ist die Strecke $\overline{cc_1}$ die Länge der durch den Punkt gezogenen Projizierenden, somit gleich dem Abstande des Punktes c von der **Pr. Eb.**

Erkl. 51. Aus dem mit Bezug auf Erkl. 49 in der Antwort auf die Frage 7 Gesagten, ergeben sich noch die weiteren Sätze:

„Ist eine Strecke im Raume in eine beliebige Anzahl gleicher Teile geteilt, siehe Figur 24, so ist auch die Projektion $\overline{a_1b_1}$ der Strecke durch die Projektionen der Teilpunkte der Strecke $\overline{ab}$ in die nämliche Anzahl gleicher Teile geteilt, d. h. die Projektionen der Teilpunkte der Strecke $\overline{ab}$ sind die Teilpunkte der Projektion $\overline{a_1b_1}$."

„Ist eine Strecke im Raume insbesondere halbiert, so ist es auch ihre Projektion, d. h. die Projektion des Halbierungspunktes der Strecke ist der Halbierungspunkt der Projektion der Strecke."

Frage 18. Welche praktische Anwendung kann man von dem in der Antwort auf Frage 17, sowie in Erkl. 51 Gesagten machen?

Antwort. Durch das in der Antwort auf die Frage 17 und in Erkl. 51 Gesagte

oder, da:

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{cb}} = \frac{m}{n}$$

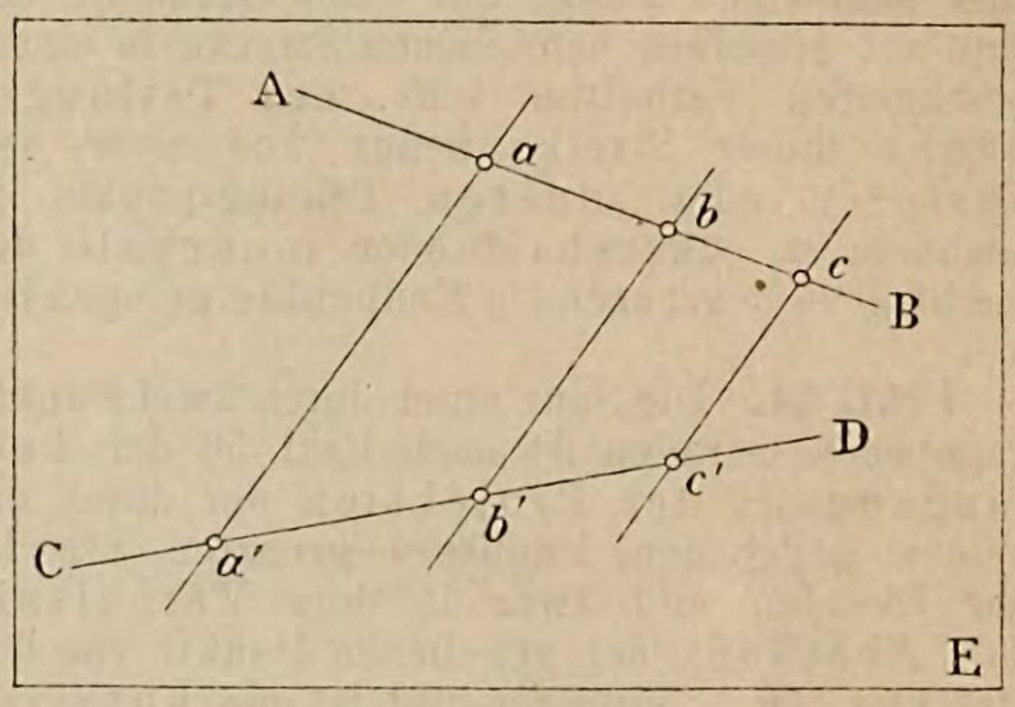
ist, so ist auch:

$$\frac{\overline{a_1c_1}}{\overline{c_1b_1}} = \frac{m}{n}$$

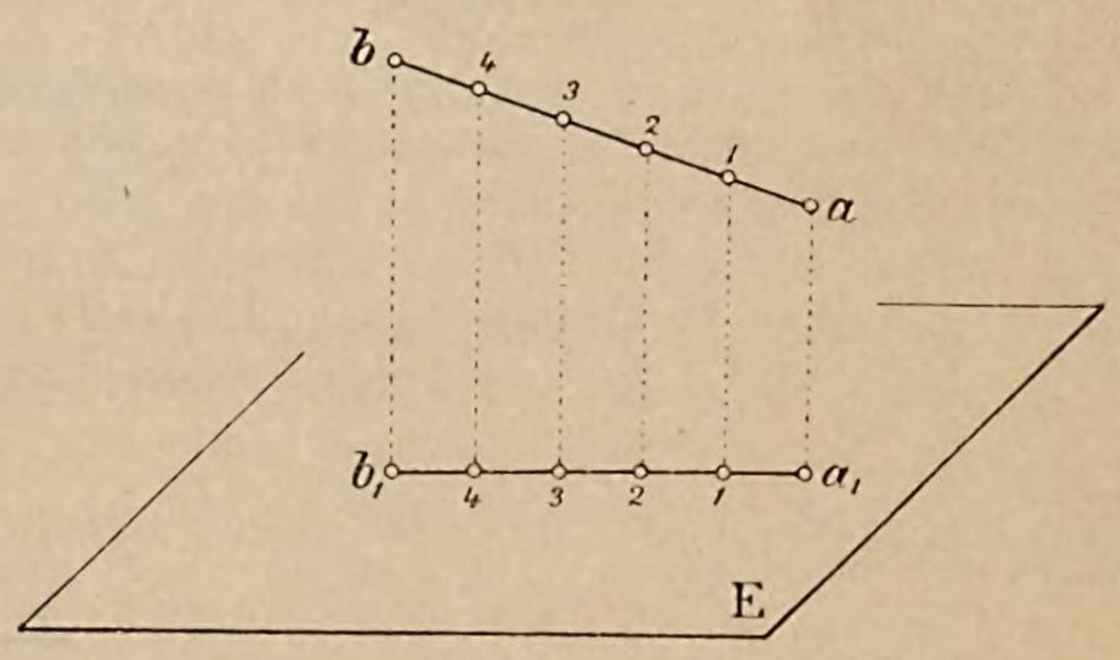
d. h. als Satz ausgedrückt:

Ist eine Strecke $\overline{ab}$ im Raume durch einen Punkt c im Verhältnis $\frac{m}{n}$ geteilt, so ist auch die Projektion $\overline{a_1b_1}$ durch die Projektion c_1 des Punktes c in dem gleichen Verhältnis $\frac{m}{n}$ geteilt.

Figur 23.



Figur 24.



Erkl. 52. Ist, siehe Figur 25 und 26, s die Spur einer durch die Punkte a und b gegebenen Geraden $\overline{ab}$, so wird durch den Punkt s die Projektion $\overline{a_1 b_1}$ der Strecke $\overline{ab}$ in einem bestimmten Verhältnis geteilt.

Es ist nämlich mit Bezug auf das in der Antwort auf die Frage 17 Gesagte:

$$\frac{\overline{sa}}{\overline{sb}} = \frac{\overline{sa_1}}{\overline{sb_1}}$$

Ausserdem findet aber nach einem bekannten Lehrsatz der Planimetrie auch die folgende Proportion statt:

$$6) \ldots\ldots \frac{\overline{s_1 a_1}}{\overline{s_1 b_1}} = \frac{\overline{a_1 a}}{\overline{b_1 b}}$$

d. h. der Punkt s teilt die Strecke $a_1 b_1$ in dem Verhältnis der Abstände der Punkte a und b von der Projektionsebene.

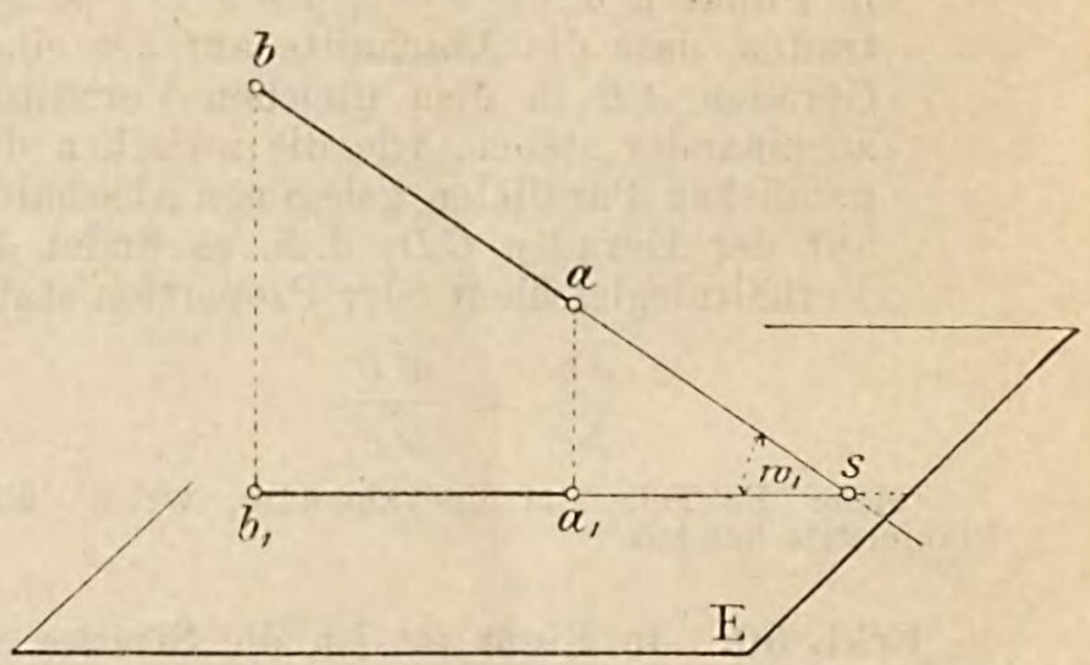
Erkl. 53. Aus der Planimetrie ist bekannt, dass man einen Punkt auf einer Geraden, der eine auf derselben befindlichen Strecke in einem bestimmten Verhältnis teilt, den Teilungspunkt dieser Strecke nennt und zwar den äusseren oder inneren Teilungspunkt, je nachdem er ausserhalb oder innerhalb der die Strecke begrenzenden Endpunkte gelegen ist.

Erkl. 54. Die Spur einer durch zwei Punkte gegebenen Geraden ist nach Erkl. 53 der Teilungspunkt der Projektion der durch die beiden gegebenen Punkte begrenzten Strecke der Geraden und zwar in dem Verhältnis der Abstände der gegebenen Punkte von der **Pr. Eb.** Der Teilungspunkt ist ein äusserer oder innerer, je nachdem die beiden gegebenen Punkte auf der nämlichen Seite oder auf verschiedenen Seiten der **Pr. Eb.** liegen.

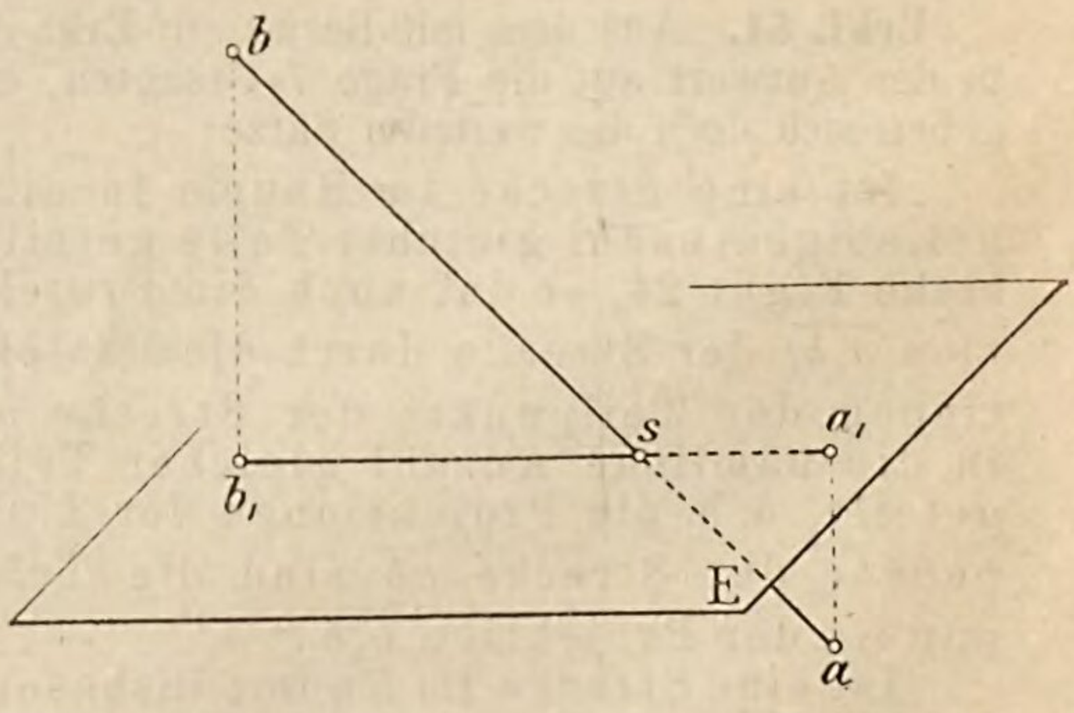
ist man in den Stand gesetzt, eine durch ihre Bestimmungsstücke, siehe Frage und Antwort 14, gegebene gerade Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher oder in einem bestimmten Verhältnis stehender Abschnitte zu teilen, d. h. die Projektionen der Teilpunkte zu ermitteln, ohne die wahre Länge der gegebenen Strecke zu kennen. Man hat ja nur nötig, die Projektion der Strecke in der von der Strecke selbst verlangten Weise zu teilen, um in den Teilpunkten der Projektion die Projektionen der Teilpunkte selbst zu erhalten.

Es ist also die Teilung der Strecke im Raume gar nicht nötig, es genügt die Teilung ihrer Projektion.

Figur 25.



Figur 26.



c) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Zwei Punkte a und b sind durch ihre Projektionen und ihre Abstände von der **Pr. Eb.** gegeben. Man soll:

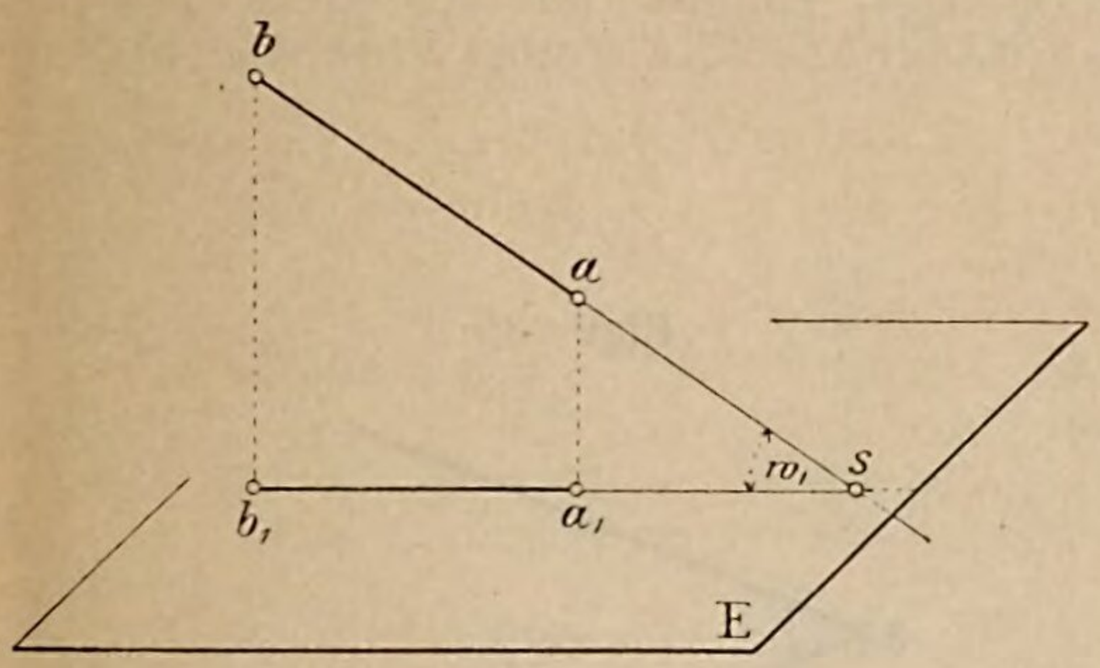
a) die wahre Länge der Verbindungslinie $\overline{ab}$,

Auflösung a. Sind a_1 und b_1, siehe Fig. 28, die Projektionen, die parallelen Strecken

b) die Projektion des Mittelpunktes der Strecke $\overline{ab}$, sowie sein Abstand von der **Pr. Eb.**,

c) die Spur der Geraden ab, sowie ihren Neigungswinkel w_1 mit der **Pr. Eb.** konstruieren.

Figur 27.



Erkl. 55. Da zufolge der in der Auflösung zur Aufgabe 1 angegebenen Konstruktion die Strecken $\overline{a_1 a''}$ und $\overline{a_1 a'}$ ebenso $\overline{b_1 b''}$ und $\overline{b_1 b'}$ einander gleich sind, und ausserdem nach Erkl. 52 die Proportion:

$$\frac{\overline{s a_1}}{\overline{s b_1}} = \frac{\overline{a_1 a''}}{\overline{b_1 b''}}$$

stattfindet, so gilt auch, wegen des Parallelismus der Strecken $\overline{a_1 a'}$ und $\overline{b_1 b'}$ die Proportion:

$$\frac{\overline{s_1 a_1}}{\overline{s_1 b_1}} = \frac{\overline{a_1 a'}}{\overline{b_1 b'}}$$

woraus nach einem Satze der Planimetrie weiter folgt, dass die Verbindungslinie $a'b'$ durch den Punkt s gehen muss.

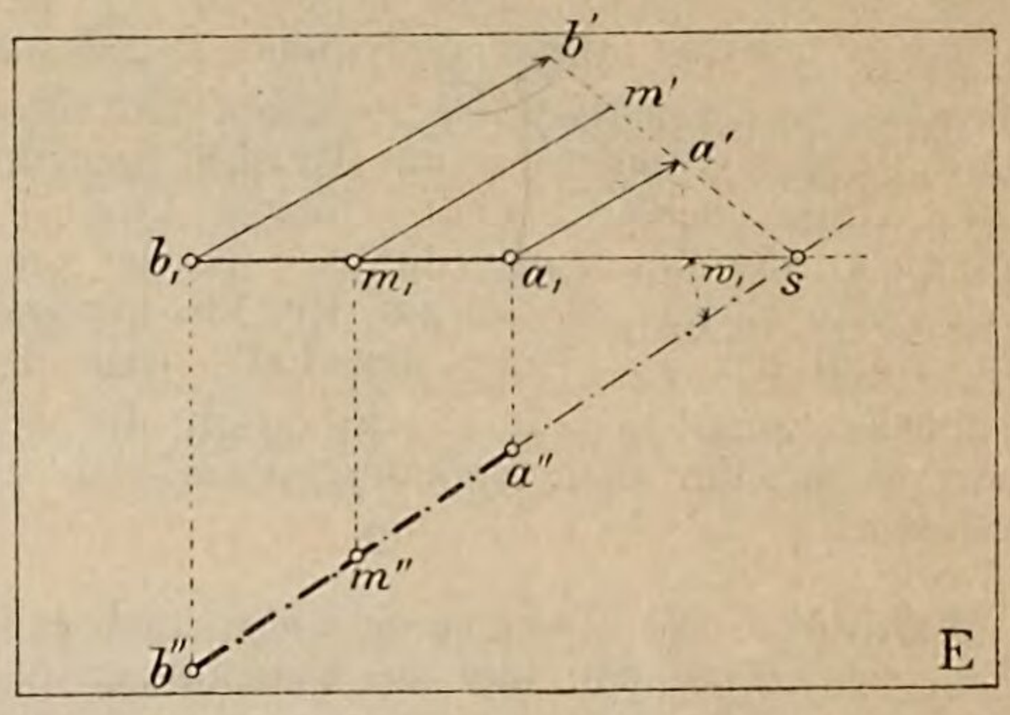
Will man daher lediglich die Spur s einer durch die Projektion zweier Punkte, sowie deren Abstände von der **Pr. Eb.** gegebenen Geraden ermitteln, so hat man nur die gegebenen Abstände ihrem Vorzeichen entsprechend durch die zugehörigen Projektionen in parallelen Strecken $\overline{a_1 a'}$, bezw. $\overline{b_1 b'}$, siehe Figur 28 anzutragen, so liefert die Verbindungslinie $a'b'$ auf der Projektion $a_1 b_1$ die gesuchte Spur s der Geraden ab.

Aufgabe 2. Die Projektion $\overline{a_1 b_1}$ einer Strecke $\overline{ab}$, der Abstand p des Punktes a von der **Pr. Eb.**, sowie die wahre Länge q von ab sind gegeben. Man soll den Abstand des Punktes b von der **Pr. Eb.**, sowie den Neigungswinkel w_1 von ab mit letzterer konstruieren.

Auflösung. Man errichte zur Projektion $\overline{a_1 b_1}$, siehe Figur 29, in a_1 eine Senkrechte $\overline{a_1 a'}$ gleich dem gegebenen Abstande p, beschreibe um a' als Mittelpunkt mit einem

$\overline{a_1 a'}$ und $\overline{b_1 b'}$ die gegebenen Abstände der Punkte a und b von der **Pr. Eb.**, so erhält man die wahre Länge von ab mit Rücksicht auf das in der Erkl. 44 Gesagte, wenn man in a_1 und b_1 zur Verbindungslinie $a_1 b_1$ Senkrechte errichtet und auf denselben von a_1 bezw. b_1 aus die Strecken $\overline{a_1 a''} = \overline{a_1 a'}$, $\overline{b_1 b''} = \overline{b_1 b'}$ abträgt und $\overline{a'' b''}$ verbindet. $\overline{a'' b''}$ ist die gesuchte wahre Länge von $\overline{ab}$, denn es ist das Trapez $a_1 a'' b'' b_1$ die Umlegung des räumlichen Trapezes $a_1 a b b_1$ in die Projektionsebene, siehe Figur 27 und Erkl. 45.

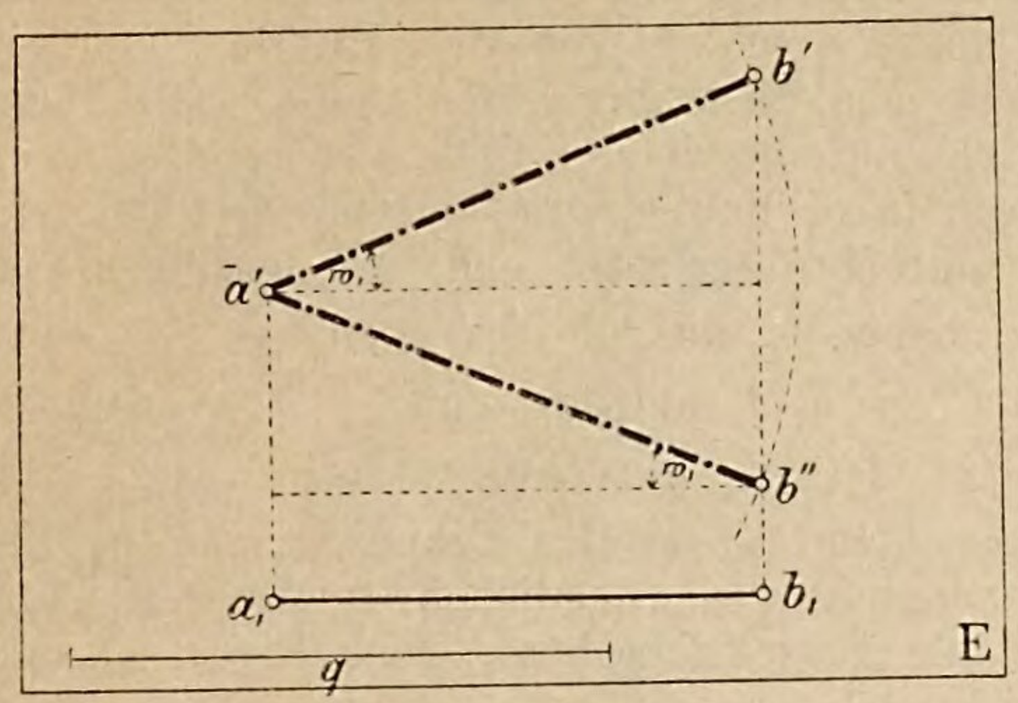
Figur 28.



Auflösung b. Halbiert man die Strecke $\overline{a_1 b_1}$ in dem Punkte m_1 und zieht $m_1 m''$ senkrecht zu $a_1 b_1$, so ist m_1 die Projektion des Halbierungspunktes m der Strecke $\overline{ab}$ und die Strecke $\overline{m_1 m''}$ gleich dem Abstand von m von der **Pr. Eb.** Siehe die Antwort auf die Frage 17, sowie Erkl. 50.

Auflösung c. Verlängert man die Linien $a''b''$ und $a_1 b_1$ bis zu ihrem Schnittpunkt s, so ist s die gesuchte Spur und der Winkel w_1 von $a''b''$ und $a_1 b_1$ der gesuchte Neigungswinkel der Geraden ab mit der **Pr. Eb.** Siehe Erkl. 44.

Figur 29.

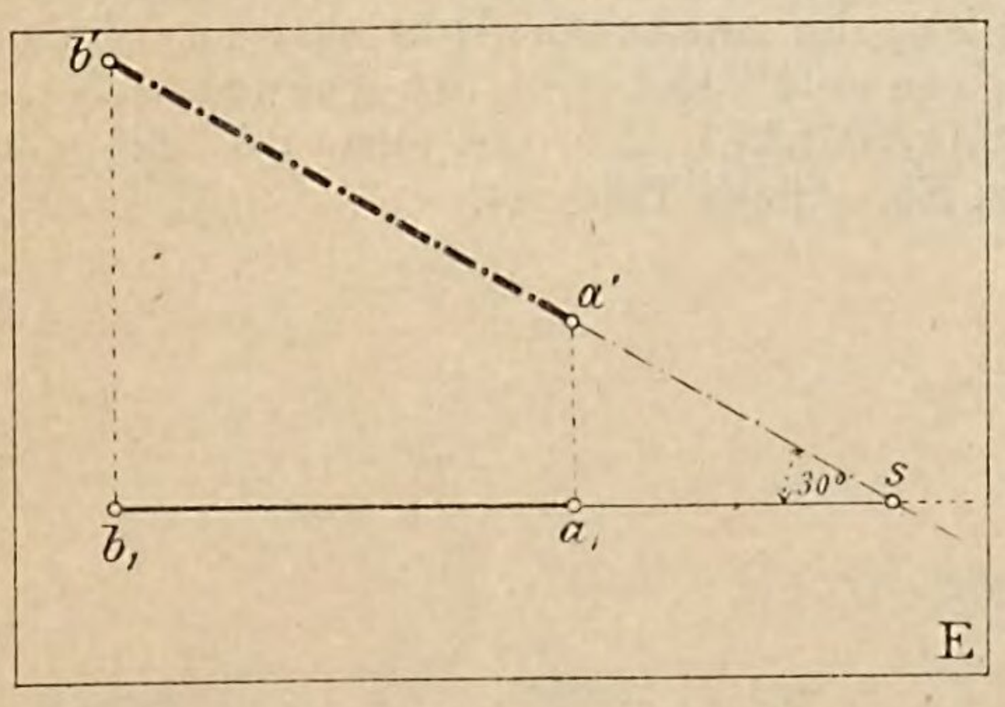


Erkl. 56. Zufolge nebenstehender Konstruktion gibt es im allgemeinen zwei Gerade ab bezw. $a(b)$, siehe Figur 30, von der Länge q, welche durch den Punkt a gehend, die nämliche Projektion $\overline{a_1 b_1}$ besitzen und unter dem gleichen Winkel w_1 zur **Pr. Eb.** geneigt sind. Diese beiden Geraden liegen symmetrisch zu der durch den Punkt a in der projizierenden Ebene von ab zur **Pr. Eb.** gezogenen Parallelen ac. Für den Fall, dass die gegebene Länge $q = \overline{a_1 b_1}$ wird, fällt die Gerade ab mit der eben genannten Parallelen ac zusammen.

Erkl. 57. Die Trapeze $a_1 a' b' b_1$ und $a_1 a' b'' b_1$, siehe Figur 29, sind die Umlegungen der räumlichen Trapeze $a_1 a b b_1$ und $a_1 a(b) b_1$, siehe Figur 30 und Erkl. 45.

Aufgabe 3. Von einer Geraden ab kennt man ihre Projektion $a_1 b_1$, die Spur s sowie den Neigungswinkel $w_1 = 30^0$ mit der **Pr. Eb.** Man soll die Abstände der Punkte a und b von der **Pr. Eb.** und die wahre Länge von $\overline{ab}$ konstruieren.

Figur 31.

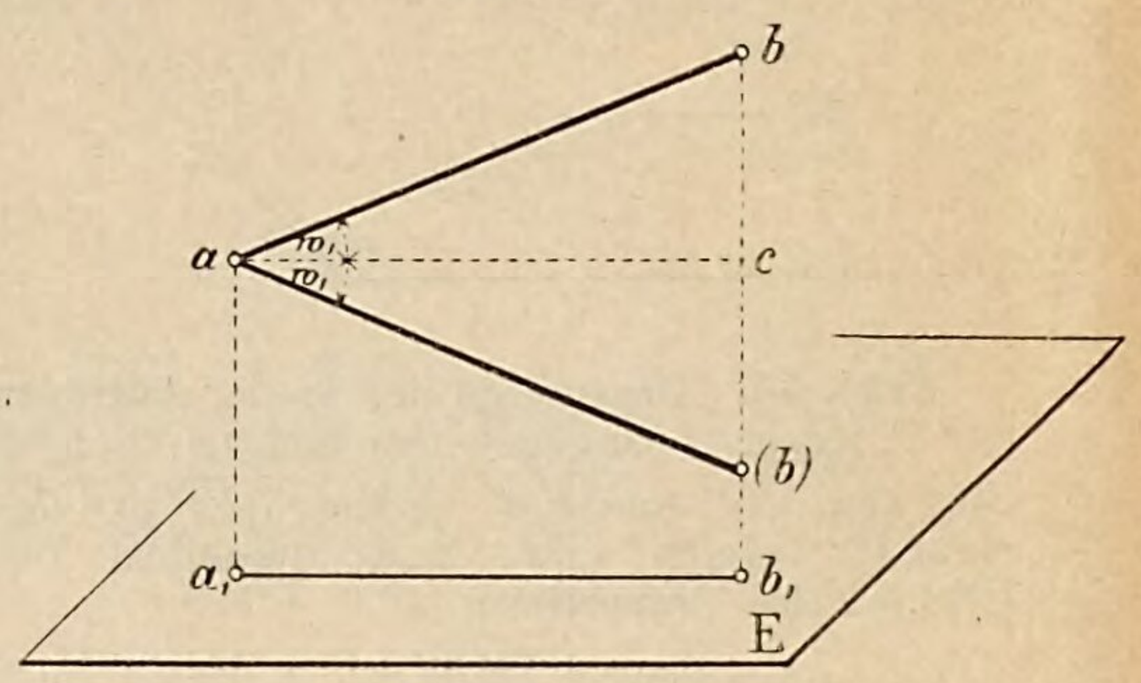


Erkl. 58. In Rücksicht auf die Erkl. 39 gibt es nur eine einzige Gerade, welche den Bedingungen der Aufgabe 3 entspricht.

Halbmesser gleich der Strecke q einen Kreisbogen, welcher von der in b_1 zu $a_1 b_1$ errichteten Senkrechten in dem Punkte b' bezw. b'' getroffen wird und verbinde $\overline{a' b'}$ bezw. $\overline{a' b''}$.

Die Strecke $\overline{b_1 b'}$ bezw. $\overline{b_1 b''}$ ist der gesuchte Abstand des Punktes b von der **Pr. Eb.**, die Parallele durch a' bezw. b'' zu $a_1 b_1$ schliesst mit $a' b'$ bezw. $a' b''$ den gesuchten Neigungswinkel w_1 ein.

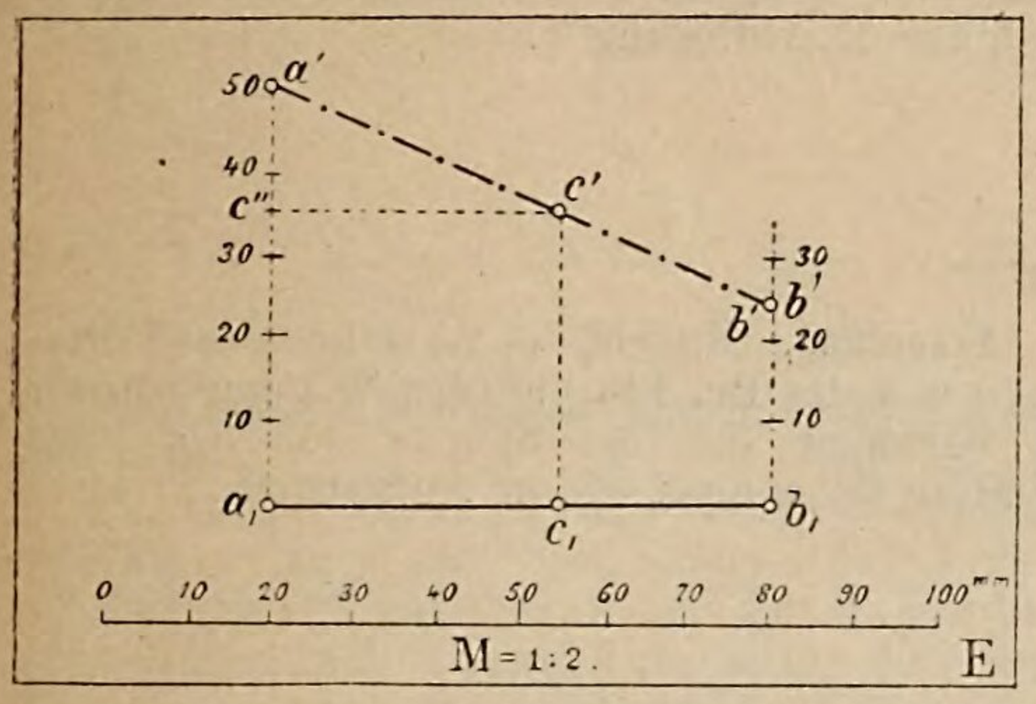
Figur 30.



Auflösung. Durch die Spur s, siehe Figur 31, ziehe man eine Gerade sb' unter dem Winkel $w_1 = 30^0$ gegen die Gerade $s_1 b_1$ geneigt und errichte in den Punkten a_1 und b_1 Senkrechte zu $a_1 b_1$; diese Senkrechten treffen die Gerade sb' in den Punkten a' und b'. Die Strecken $\overline{a_1 a'}$ und $\overline{b_1 b'}$ sind die gesuchten Abstände der Punkte a und b von der **Pr. Eb.**, während die Strecke $\overline{a' b'}$ die gesuchte wahre Länge von $\overline{ab}$ darstellt.

Aufgabe 4. Von einer Geraden ab kennt man ihre Projektion $a_1 b_1$ sowie die Abstände der Punkte $a = +50$ mm und $b = +20$ mm; man soll die Projektion c_1 eines Punktes c der Geraden ab, dessen Abstand $= +35$ mm beträgt, konstruieren.

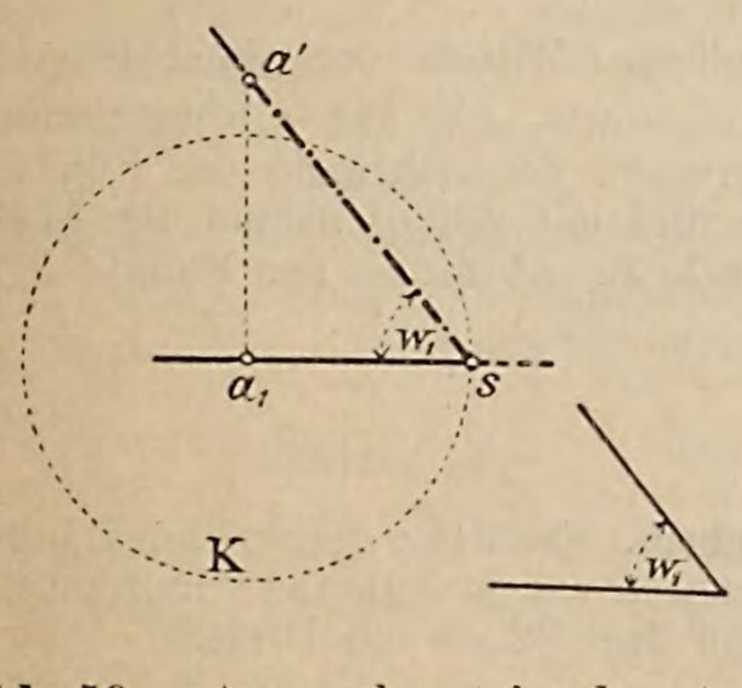
Figur 32.



Auflösung. Errichte in den Punkten a_1 und b_1 zu $a_1 b_1$, siehe Figur 32, Senkrechte $\overline{a_1 a'} = +50$ mm und $\overline{b_1 b'} = +25$ mm und verbinde $a' b'$. Trage ausserdem auf der Senkrechten $a_1 a'$ von a_1 aus die Strecke $\overline{a_1 c''} = +35$ mm auf und ziehe durch c'' eine Parallele zu $a_1 b_1$ bis zum Schnitt c' mit $a' b'$; die durch c' zu $a_1 b_1$ gezogene Senkrechte trifft $a_1 b_1$ in der gesuchten Projektion c_1 des Punktes c, denn es bezeichnet nach Erkl. 50 die Strecke $\overline{c_1 c'}$ den Abstand des Punktes c von der **Pr. Eb.** und da zufolge der Konstruktion $\overline{c_1 c'} = \overline{a_1 c''} = +35$ mm gemacht wurde, so hat der Punkt c den gegebenen Abstand von der **Pr. Eb.**

Aufgabe 5. Von einer Geraden kennt man einen Punkt a durch seine Projektion a_1 und seinen Abstand $\overline{a_1 a'}$ von der **Pr. Eb.**, sowie ihren Neigungswinkel w_1 mit der letzteren; es ist die Projektion der Geraden zu zeichnen.

Figur 33.



Auflösung. Trägt man an die Strecke $a_1 a$ im Punkte a' den Winkel $90^0 - w_1$ an, so trifft dessen zweiter Winkelschenkel die auf $a_1 a'$ in a_1 errichtete Senkrechte in einem Punkt s; denkt man sich nun das Dreieck $a_1 a' s$ um die Kathete $a_1 s$ so lange gedreht, bis seine Ebene zur **Pr. Eb.** senkrecht steht, so bildet seine Hypotenuse offenbar mit der **Pr. Eb.** den Winkel w_1, ist somit eine Gerade der verlangten Art und $a_1 s$ ist ihre Projektion. Nun lässt sich aber das räumliche Dreieck $a a_1 s$ um die Kathete $a_1 a$ drehen und in jeder Lage bildet die Hypotenuse eine Gerade der verlangten Art. Die Hypotenusen in den verschiedenen Dreieckslagen bilden aber die Mantellinien eines senkrechten Kreiskegels, d. i. eines Drehungs- oder Rotationskegels, dessen Achse mit der Projizierenden $a a_1$ zusammenfällt.

Erkl. 59. Aus nebenstehender Auflösung folgen die Sätze:

„Durch einen Punkt im Raume gibt es unendlich viele Gerade, welche mit der **Pr. Eb.** einen vorgegebenen Winkel w_1 einschliessen; sie bilden die Mantellinien eines senkrechten Kreiskegels, dessen Achse mit der durch den gegebenen Punkt gezogenen Projizierenden zusammenfällt."

„Die Spuren aller durch den Punkt a gehenden u. zur **Pr. Eb.** unter dem Winkel w_1 geneigten Geraden liegen auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt a_1, der als Halbmesser die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks hat, das aus

dem Abstande des Punktes a von der **Pr. Eb.** als eine Kathete und dem gegebenen Winkel w_1 als gegenüberliegenden Winkel konstruiert werden kann."

---

d) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 6. Von einer Geraden ab kennt man ihre Projektion $a_1 b_1$, sowie die Abstände der Punkte $a = +40$ mm und $b = +25$ mm. Es sind die Projektionen eines der Punkte c und d, sowie ihre Abstände von der **Pr. Eb.** zu konstruieren, welche die Strecke $\overline{ab}$ im Verhältnis 3 : 4 teilen.

Andeutung. Teile die Projektion $\overline{a_1 b_1}$ in dem gegebenen Verhältnis und bestimme den Abstand der Teilpunkte von der **Pr. Eb.**, wie in Aufgabe 1, Auflösung b.

Aufgabe 7. Von einer Geraden ab kennt man ihre Projektion $a_1 b_1$, den Abstand des Punktes $a = +50$ m von der **Pr. Eb.**, sowie den Neigungswinkel $w_1 = 45^0$ von ab mit der letzteren.

Es sind die Spur und wahre Länge von ab, sowie der Abstand des Punktes b zu konstruieren.

Andeutung. Mittels des Abstandes des Punktes a von der **Pr. Eb.** und des Neigungswinkels w_1 bestimmt sich die Spur s von ab. Das Weitere ist analog wie in Aufgabe 3.

Aufgabe 8. Von einer Geraden kennt man die Projektion eines Punktes, sowie seinen Abstand von der **Pr. Eb.** $= +15$ mm. In der **Pr. Eb.** ist ein Punkt b zu zeichnen, welcher von dem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung $= +75$ mm besitzt und auf einer gegebenen Geraden A_1 liegt.

Andeutung. Mittels des Abstandes des Punktes a von der **Pr. Eb.** und der Länge ab bestimmt sich die Entfernung der Projektion b_1 von a_1, siehe Frage und Antwort 16, b_1 liegt somit auf einem Kreise um a_1 als Mittelpunkt mit der Länge $\overline{a_1 b_1}$ als Halbmesser.

Aufgabe 9. Die Projektionen a_1, b_1 und und c_1, dreier Punkte a, b und c sind gegeben, ausserdem ist der Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** bekannt. Die Abstände der Punkte b und c sind zu konstruieren, wenn die Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ gegebene Längen haben sollen.

Andeutung. Mittels der gegebenen Längen $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ sowie $\overline{a_1 b_1}$ und $\overline{a_1 c_1}$ bestimmen sich die Differenzen der Abstände der Punkte a, b und a, c und mit Zuhülfenahme des Abstandes von a auch die Abstände der Punkte b und c.

Aufgabe 10. Von dreien Punkten im Raume sind ihre Projektionen und ihre Abstände von der **Pr. Eb.** gegeben. Man soll die wahren Längen der Seiten des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks sowie die wahre Gestalt des Dreiecks selbst bestimmen.

Andeutung. Ermittele die wahren Längen der Dreiecksseiten wie in Aufgabe 1 und konstruiere mit diesen drei Seiten ein Dreieck.

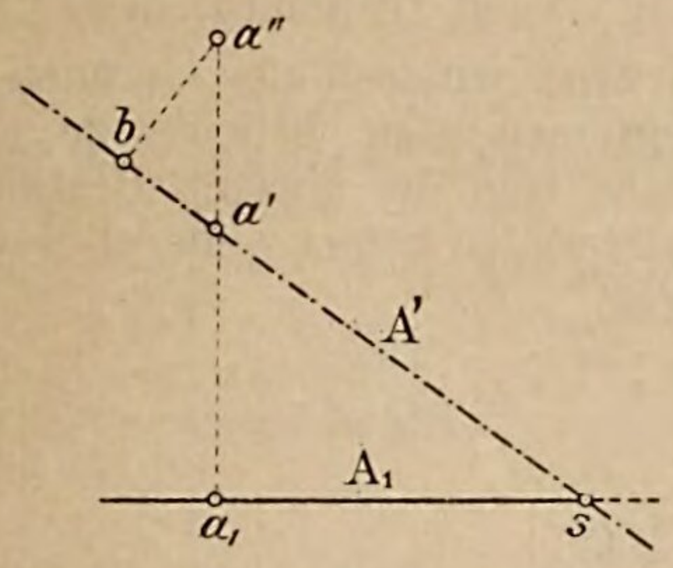
C) Ueber die gegenseitige Lage von Punkten und Geraden und ihren Projektionen.

Frage 19. Welche Lagen können ein Punkt und eine Gerade zu einander haben?

Antwort. Ein Punkt kann entweder auf oder ausserhalb einer Geraden liegen.

Frage 20. Wie lassen sich die eben genannten Lagen aus der Projektionszeichnung ermitteln?

Figur 34.



Erkl. 60. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Soll ein Punkt a auf einer Geraden A liegen, so muss auch seine Projektion a_1 auf der Projektion A_1 der Geraden sich befinden; ausserdem muss bei der Umlegung der projizierenden Ebene der Geraden A die Umlegung des Punktes auf die Umlegung der Geraden fallen."

Antwort. Liegt ein Punkt a, s. Figur 34, auf einer Geraden A, so liegt auch seine Projektion a_1 auf der Projektion A_1 der Geraden A.

Umgekehrt folgt aber noch nicht, dass, wenn die Projektion a_1 eines Punktes a auf der Projektion A_1 einer Geraden A liegt, der Punkt a selbst auf der Geraden A sich befinden muss. Soll das Letztere der Fall sein, so müssen bei der Umlegung der projizierenden Ebene AA_1 der Geraden A, in welcher auch der Punkt a liegt, die Umlegungen A' von A und a' von a auf einander fallen.

Würde dagegen die Umlegung von a nach a'' gelangen, so läge der Punkt a nicht auf der Geraden A, sondern hätte von derselben einen Abstand gleich der Länge des von a'' auf A' gefällten Perpendikels $\overline{a''b}$.

Hat endlich ein Punkt c eine ganz beliebige Lage gegen eine Gerade A, so hat auch seine Projektion c_1 gegen A_1 eine ganz beliebige Lage.

Frage 21. Welche Lagen können zwei Gerade zu einander haben?

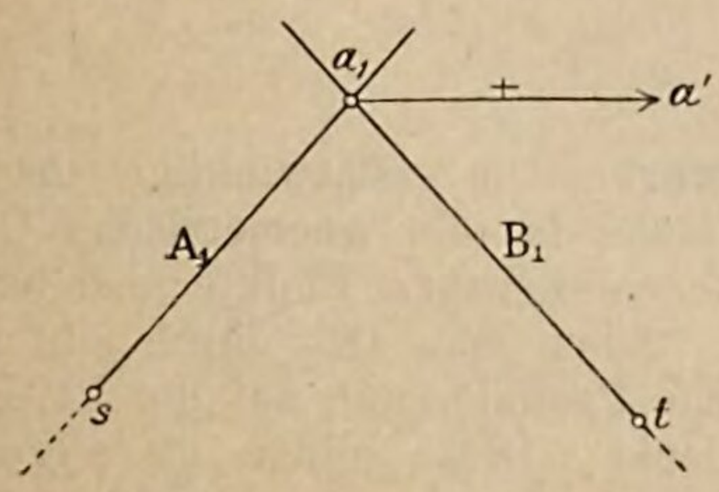
Erkl. 61. Haben zwei Gerade keinen Punkt miteinander gemein, ohne jedoch parallel zu sein, so heissen sie windschiefe oder sich kreuzende Gerade.

Antwort. Zwei Gerade können entweder:

a) sich schneiden,
b) parallel sein,
c) windschief liegen, siehe Erkl. 61, d. h. sich kreuzen.

Frage 22. Wie lassen sich die in der Antwort auf die Frage 21 genannten Lagen zweier Geraden aus der Projektionszeichnung ermitteln?

Figur 35.



Antwort a. Schneiden sich zwei Gerade A und B im Raume, so schneiden sich im allgemeinen auch ihre Projektionen A_1 und B_1, siehe Figur 35, in einem Punkte a_1, der Projektion des Schnittpunktes a von A und B. Die beiden Geraden A und B werden bestimmt sein, sobald man ausser dem Abstande $\overline{a_1 a'}$ des Schnittpunktes a von der **Pr. Eb.** von jeder Geraden noch einen beliebigen weiteren Punkt, oder aber, wie in der Figur angenommen, ihre Spur s, bezw. t kennt.

b. Sind die Geraden C und D im Raume zu einander parallel, so sind es im allgemeinen auch ihre projizierenden Ebenen, siehe Erkl. 62, folglich auch deren Schnittlinien mit der **Pr. Eb.**, nämlich die Projektionen C_1 und D_1 von C und D. Umgekehrt folgt aber

Erkl. 62. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Zieht man durch parallele Gerade Ebenen senkrecht zu einer andern Ebene, so sind diese Ebenen unter sich parallel und schneiden die Ebene, zu welcher sie senkrecht stehen nach parallelen Geraden."

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

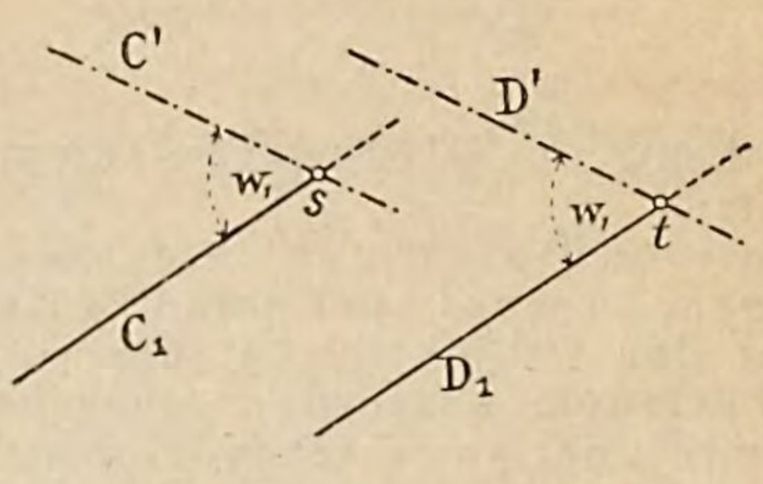
Erkl. 63. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Sollen zwei Gerade im Raume **sich schneiden** oder **parallel sein,** so müssen im allgemeinen ihre Projektionen sich schneiden oder parallel sein. Im ersten Falle ist der Schnittpunkt der Projektionen die Projektion des Schnittpunktes und sein Abstand von der **Pr. Eb.** ist für beide Gerade der gleiche. Im zweiten Falle ist der Neigungswinkel der beiden Geraden mit der **Pr. Eb.** der Grösse und dem Sinne nach der gleiche.

noch nicht, dass zu parallelen Projektionen auch parallele Gerade gehören; soll dies der Fall sein, so müssen die nach der gleichen Seite erfolgten Umlegungen der projizierenden Ebenen von C und D in der **Pr. Eb.** parallele Gerade C' und D' liefern, siehe Figur 36.

c. Bei zwei windschiefen Geraden können die Projektionen ganz beliebig zu einander liegen, auch sind die übrigen Bestimmungsstücke der Geraden keiner weiteren Bedingung unterworfen.

Figur 36.



Frage 23. Welcher spezielle Fall kann bezüglich der unter a und b in der Antwort auf die Frage 22 genannten Lagen zweier Geraden noch eintreten?

Antwort. Die Geraden können beide in der nämlichen projizierenden Ebene liegen, dann decken sich in beiden Fällen ihre Projektionen und man erhält nur Aufschluss über die gegenseitige Lage der Geraden durch die Umlegung der sie enthaltenden projizierenden Ebene.

D) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Fläche.

a) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Fläche im allgemeinen.

Frage 24. Was versteht man unter der rechtwinkligen Projektion einer Fläche auf eine **Pr. Eb.** und wie bestimmt man dieselbe?

Erkl. 64. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Die Projektion einer Fläche ist im allgemeinen ein Stück der **Pr. Eb.** oder die ganze **Pr. Eb.**"

Im letztern Fall kann man von einer eigentlichen Projektion der Fläche nicht mehr sprechen.

Antwort. Die rechtwinklige Projektion einer Fläche ist der geometrische Ort der Projektionen aller ihrer Punkte; man bestimmt dieselbe, indem man sich durch alle Punkte der Fläche Projizierende auf die **Pr. Eb.** gezogen denkt. Diese bilden im allgemeinen ein Bündel paralleler Strahlen, welche durch ihre Durchschnittspunkte mit der **Pr. Eb.** entweder ein begrenztes Stück der letzteren oder die ganze **Pr. Eb.** bedecken, je nachdem die Fläche begrenzt oder unbegrenzt vorausgesetzt ist.

b) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Ebene.

Frage 25. Was versteht man unter der rechtwinkligen Projektion einer Ebene und wie bestimmt man dieselbe?

Antwort. Für die Projektion einer Ebene gilt im allgemeinen das in der Antwort auf die Frage 24 Gesagte.

Doch kann bei einer Ebene noch der besondere Fall eintreten, dass sie auf der **Pr. Eb.** senkrecht steht, also eine projizierende Ebene ist.

In diesem Falle fällt der in der vorhergehenden Antwort genannte Strahlenbündel mit der Ebene selbst zusammen und der Durchschnitt der letzteren, d. h. ihre Spur, siehe Erkl. 33, ist die Projektion der Ebene.

Erkl. 65. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Eine Ebene hat im allgemeinen keine bestimmte Projektion; nur wenn sie senkrecht zur **Pr. Eb.** steht, so nennt man ihre Spur zugleich ihre Projektion.“

Erkl. 66. Jede Ebene, welche nicht eine projizierende Ebene ist, bedarf zur Ermittelung ihrer Lage gegen die **Pr. Eb.** einer Anzahl von Bestimmungsstücken, von Punkten und geraden Linien.

Frage 26. Welche Bestimmungsstücke sind zur Ermittelung der Lage einer Ebene gegen die **Pr. Eb.** erforderlich?

Antwort. Zur Ermittelung der Lage einer Ebene gegen die **Pr. Eb.** sind erforderlich:

1) drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte,
2) ein Punkt und eine nicht durch ihn gehende Gerade, siehe Erkl. 67,
3) zwei in endlicher oder unendlicher Entfernung sich schneidende, d. h. zwei sich schneidende oder zwei parallele Gerade.

Erkl. 67. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

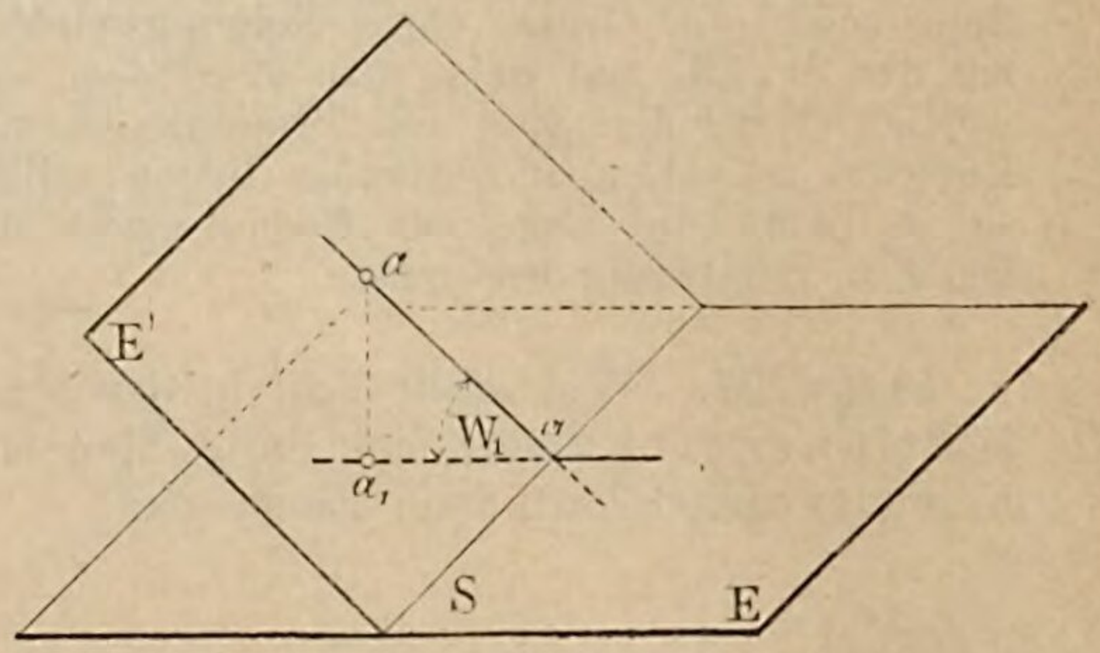
„Durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte oder durch einen Punkt und eine sie nicht enthaltende Gerade, endlich durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade, lässt sich stets nur eine einzige Ebene legen.“

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Erkl. 68. Eine Ebene wird stets durch ihre Bestimmungsstücke bezeichnet. Ist demnach die Ebene durch drei in ihr liegende Punkte a, b, c, oder durch zwei Gerade A, B, oder endlich durch einen Punkt A und eine Gerade C gegeben, so heisst sie „Ebene abc“ oder „Ebene AB“, oder endlich „Ebene Cd“.

Erkl. 69. Ist E', siehe Figur 37, eine gegen die **Pr. Eb.** beliebig geneigte Ebene und a ein Punkt in ihr, so denke man sich durch a ein Perpendikel auf die Spur S, siehe Erkl. 33, der Ebene E' gezogen und den Fusspunkt $\mathfrak{a}$ dieses Perpendikels mit der Projektion a_1 von a verbunden, so bilden die drei Punkte $a_1\,\mathfrak{a}\,a$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Ebene auf der **Pr. Eb.**, siehe die Erkl. 70, und auf der Geraden S, siehe die Erkl. 71, somit auch auf der Ebene E', siehe die Erkl. 72, senkrecht steht.

Figur 37.



Erkl. 70. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Eine Ebene steht auf einer andern Ebene senkrecht, wenn sie eine Senkrechte zu dieser Ebene enthält.“

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Erkl. 71. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, und zieht man in der einen Ebene eine Gerade senkrecht zu einer Geraden der andern Ebene, so steht die erste Gerade auf der ganzen Ebene senkrecht.“

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Erkl. 72. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Steht eine Ebene auf der Schnittlinie zweier Ebenen senkrecht, so steht sie auf beiden Ebenen senkrecht.“

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Erkl. 73. Die Geraden $a\mathfrak{a}$ und $a_1\mathfrak{a}$, siehe Figur 37, schliessen einen spitzen Winkel W_1 ein, welcher der Neigungswinkel der Ebene E_1 mit der **Pr. Eb.** heisst.

Erkl. 74. Nach einem Lehrsatze der Planimetrie ist unter allen Geraden, welche man von einem Punkte nach den Punkten einer Geraden ziehen kann, der von dem Punkte auf die Gerade gefällte Perpendikel die kürzeste. Die Gerade $\overline{a\mathfrak{a}}$, siehe Figur 37, ist somit die kürzeste Linie, welche von dem Punkte a nach den Punkten der Spur S der Ebene E' gezogen werden kann. Sie heisst deshalb auch die „Falllinie“ oder auch die „Neigungslinie“ der Ebene E'. Zugleich folgt, dass durch jeden Punkt einer Ebene nur eine einzige Falllinie möglich ist; ihre Projektion steht immer senkrecht zur Spur der Ebene.

Alle Neigungslinien einer Ebene sind unter sich parallel, ebenso ihre Projektionen.

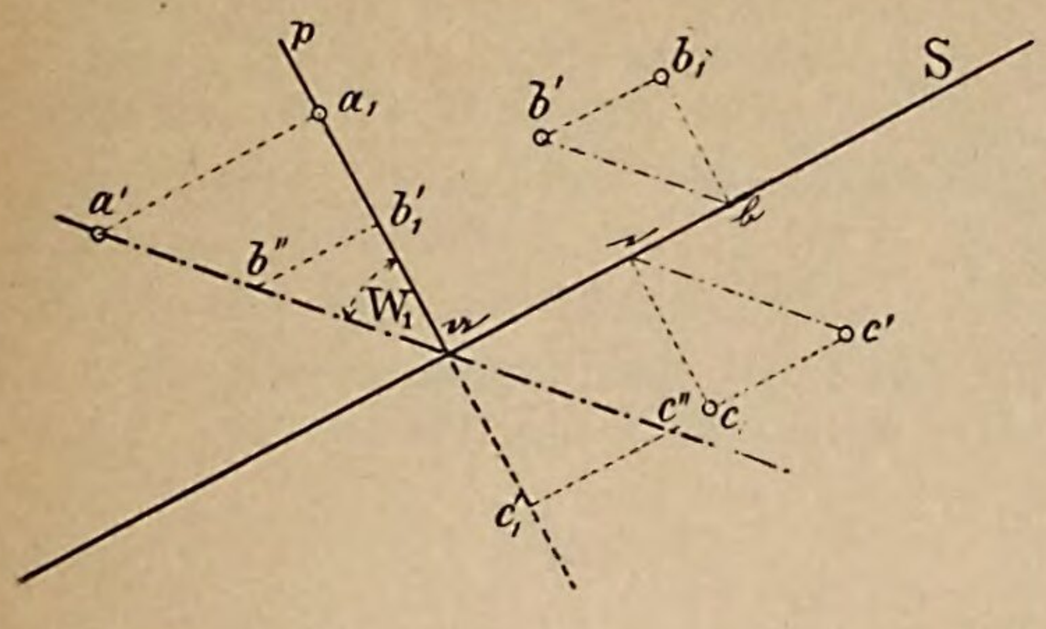
Erkl. 75. Die Spur S einer Ebene teilt die **Pr. Eb.** in zwei Teile, deren einer die Projektionen von Punkten der Ebene mit positivem Abstande, der andere die Projektionen von Punkten mit negativem Abstande von der **Pr. Eb.** enthält.

Erkl. 75 a. Kennt man von einer Ebene ihre Spur sowie die Grösse ihres Neigungswinkels mit der **Pr. Eb.** und weiss man ausserdem, auf welcher Seite der Spur die Projektionen von Punkten positiven Abstandes liegen sollen, so ist damit die Lage der Ebene gegen die **Pr. Eb.** vollständig bestimmt.

Frage 27. Wie stellt man in der Projektionszeichnung eine durch Spur und Neigungswinkel bestimmte Ebene dar?

Antwort. Ist S, siehe Figur 38, die gegebene Spur der Ebene, so nehme man in derselben einen Punkt $\mathfrak{a}$ beliebig an, ziehe durch ihn eine Senkrechte $\mathfrak{a}p$ zu S und trage an diese in dem Punkte $\mathfrak{a}$ den gegebenen Winkel W_1 an, so ist durch S und W_1 die Lage der Ebene gegen die **Pr. Eb.** vollstän-

Figur 38.



Erkl. 76. Wählt man, siehe Fig. 38, auf $\mathfrak{a}p$ einen beliebigen Punkt a_1 als Projektion eines Punktes a der Ebene, so ergibt sich dessen Abstand von der **Pr. Eb.** einfach als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks das $\overline{\mathfrak{a}\,a_1}$ als andere Kathete und W_1 als den der ersten Kathete gegenüberliegenden Winkel hat, denn dieses Dreieck $a'a_1\mathfrak{a}$ kann als die Umlegung des räumlichen Dreiecks $aa_1\mathfrak{a}$ um die Kathete $\overline{a_1\mathfrak{a}}$ in die **Pr. Eb.** aufgefasst werden. Die Hypotenuse $\overline{a'\mathfrak{a}}$ stellt somit die Umlegung der durch den Punkt a gehenden Neigungslinie der Ebene dar.

Wählt man einen beliebigen anderen Punkt, etwa b_1, so ergäbe sich dessen Abstand von der **Pr. Eb.** durch Konstruktion des dem Dreiecke $a'a_1\mathfrak{a}$ ähnlichen Dreiecks $b'b_1\mathfrak{b}$, dessen Seiten bezw. den Seiten des Dreiecks $a, a_1\mathfrak{a}$ parallel laufen.

Dieses Dreieck $b'b_1\mathfrak{b}$ kann man nun parallel zu sich selbst verschoben denken, bis die Ecke $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ zusammenfällt; es kommen dann die Punkte b_1 und b' nach b_1' und b'' auf $a\mathfrak{a}_1$ bezw. $\mathfrak{a}a'$ zu liegen und es ist die Strecke $\overline{b_1'b''}$ ebenfalls gleich dem Abstand des Punktes b von der **Pr. Eb.**

Ist ebenso c_1 die Projektion eines Punktes c der Ebene, so ergäbe sich wieder dessen Abstand von der **Pr. Eb.** durch Konstruktion des dem Dreiecke $a'a_1\mathfrak{a}$ ähnlichen Dreiecks $c'c_1\mathfrak{c}$, dessen Seiten gleichfalls parallel laufen zu den Seiten des ersten Dreiecks.

Auch dieses Dreieck lässt sich parallel zu sich selbst verschieben, bis seine Ecke $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a}$ zusammenfällt, wodurch dann c' nach c'' und c_1 nach c_1' auf aa' bezw. $\mathfrak{a}a_1$ zu liegen kommt und wodurch sich in der Strecke $\overline{c'c_1''}$ wieder der gesuchte Abstand des Punktes c von der **Pr. Eb.** ergibt. Aus dem eben Angeführten folgt, dass es gar nicht nötig ist, für jeden Punkt das zugehörige rechtwinklige Dreieck zu konstruieren, sondern dass man vielmehr nur durch die Projektion des Punktes, dessen Abstand von der **Pr. Eb.** ermittelt werden soll, eine Parallele zur Spur S zu ziehen hat, so gibt das zwischen den Schenkeln $\mathfrak{a}p$ und $\mathfrak{a}a'$ des Winkels W_1 liegende Stück desselben den gesuchten Abstand des Punktes von der **Pr. Eb.** an.

Erkl. 77. Wie im vorstehenden gezeigt wurde, gibt es zu jedem Punkt einer Ebene ein rechtwinkliges Dreieck, das die Projizierende des betreffenden Punktes als eine Kathete, die durch den Punkt gehende Neigungslinie als Hypotenuse und den Neigungswinkel W_1 der Ebene mit der **Pr. Eb.**, als den der eben genannten Kathete gegenüber liegenden Winkel hat. Dieses Dreieck, dessen Umlegung stets gezeichnet werden kann, sobald man zwei Bestimmungsstücke von ihm kennt, soll für die Folge das Konstruktionsdreieck des betreffenden Punktes heissen.

Erkl. 78. Eine durch ihre Spur S und ihren Neigungswinkel W_1 bestimmte Ebene soll für die Folge kurz mit „Ebene SW_1“ bezeichnet werden.

Erkl. 79. Ist eine Ebene durch die in der Antwort auf die Frage 26 genannten Bestimmungsstücke gegeben, so lässt sich stets ihre Spur und ihr Neigungswinkel mit der **Pr. Eb.** konstruktiv ermitteln, wie dies in den folgenden beiden Aufgaben gezeigt werden soll.

---

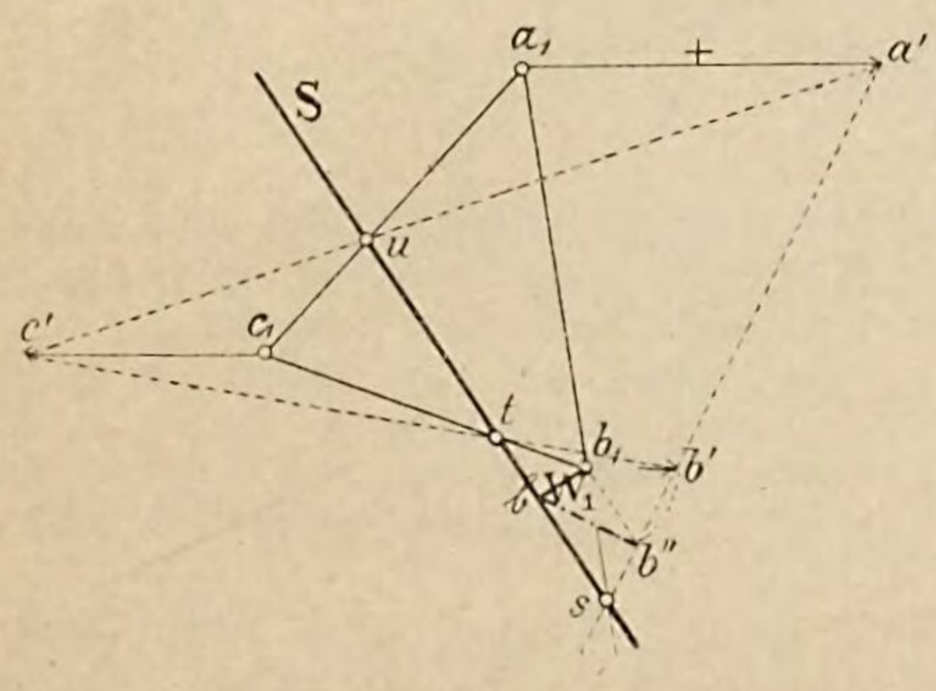
c) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 11. Die Projektionen a_1, b_1, c_1, siehe Figur 39, dreier Punkte a, b, c, sowie ihre Abstände a_1a', b_1b', c_1c' von der **Pr. Eb.** sind gegeben. Man soll:

a. die Spur der Ebene abc,

b. den Neigungswinkel W_1 dieser Ebene mit der **Pr. Eb.** konstruieren.

Figur 39.



Auflösung a. Nach Erkl. 55 liefern die Verbindungslinien $a'b'$, $b'c'$ und $c'a'$ die Spuren s, t und u der Geraden ab, bc und ca. Die Verbindungslinie S der Punkte s, t, u ist die Spur der Ebene abc, siehe Erkl. 80.

b. Nach Erkl. 77 wird sich der Neigungswinkel W_1 der Ebene abc mit der **Pr. Eb.** am schnellsten durch Ermittelung des Konstruktionsdreiecks eines der gegebenen Punkte, z. B. des Punktes b ergeben.

Zu diesem Zwecke zieht man durch b_1 eine Parallele und eine Senkrechte zu S, trägt auf der ersten von b_1 aus die Strecke $\overline{b_1b''} = \overline{b_1b'}$ ab und zieht b''b. Das Dreieck $b''b_1$b ist das Konstruktionsdreieck des Punktes b und enthält den gesuchten Winkel W_1.

Erkl. 80. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

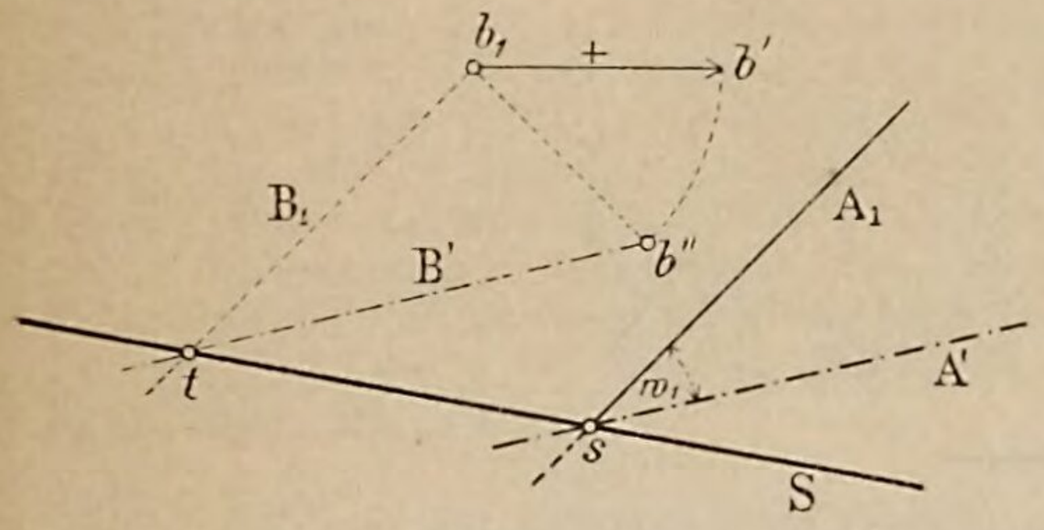
„Schneidet eine Ebene E' eine Ebene E nach einer Geraden S, so liegen die Schnittpunkte aller in E' liegenden Geraden mit der Ebene E auf der Geraden S.“

Aufgabe 12. Eine Gerade A, siehe Figur 40, ist durch ihre Projektion A_1, ihre Spur s und ihren Neigungswinkel w_1 mit der **Pr. Eb.**, ein Punkt b durch seine Projektion b_1 und seinen Abstand $\overline{b_1 b'}$ von der **Pr. Eb.** gegeben. Man soll:

a. die Spur der Ebene Ab,

b. den Neigungswinkel W_1 dieser Ebene mit der **Pr. Eb.** konstruieren.

Figur 40.



Auflösung a. Man denke sich durch den Punkt a im Raume eine Parallele B zur Geraden A gezogen und ihre Spur t ermittelt. Die Verbindungslinie st ist die Spur der Ebene Ab. Zieht man zu diesem Zwecke, siehe Figur 40, die Gerade B_1 parallel zu A_1, errichtet $\overline{b_1 b''}$ senkrecht zu B_1 und gleich der Strecke $\overline{b_1 b'}$, siehe Antwort b. auf die Frage 22 und Erkl. 63, zieht schliesslich die Gerade B' parallel zu A' bis zum Schnitt t mit B_1, so ist t die Spur der Geraden B und daher die Verbindungslinie st die gesuchte Spur der Ebene Ab.

b. Die Bestimmung des Winkels W_1 bleibt dieselbe wie in Aufgabe 11, siehe Auflösung b.

E) Ueber die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden, Ebenen und ihren Projektionen.

Anmerkung 4. Da die gegenseitige Lage von Punkten und Geraden, sowie zweier Geraden bereits im vorhergehenden besprochen worden ist, so kann es sich im folgenden nurmehr um die möglichen Lagen eines Punktes und einer Geraden zu einer oder mehreren Ebenen, sowie um die gegenseitige Lage zweier Ebenen handeln.

Wenn in der Folge von einer Ebene oder einer Geraden gesprochen wird, so ist dabei vorausgesetzt, dass, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, die Ebene stets durch Spur und Neigungswinkel mit der **Pr. Eb.**, die Gerade stets durch Projektion, Spur und Neigungswinkel mit der **Pr. Eb.** gegeben sein soll.

a) Ueber die Lagen eines Punktes zu einer Ebene.

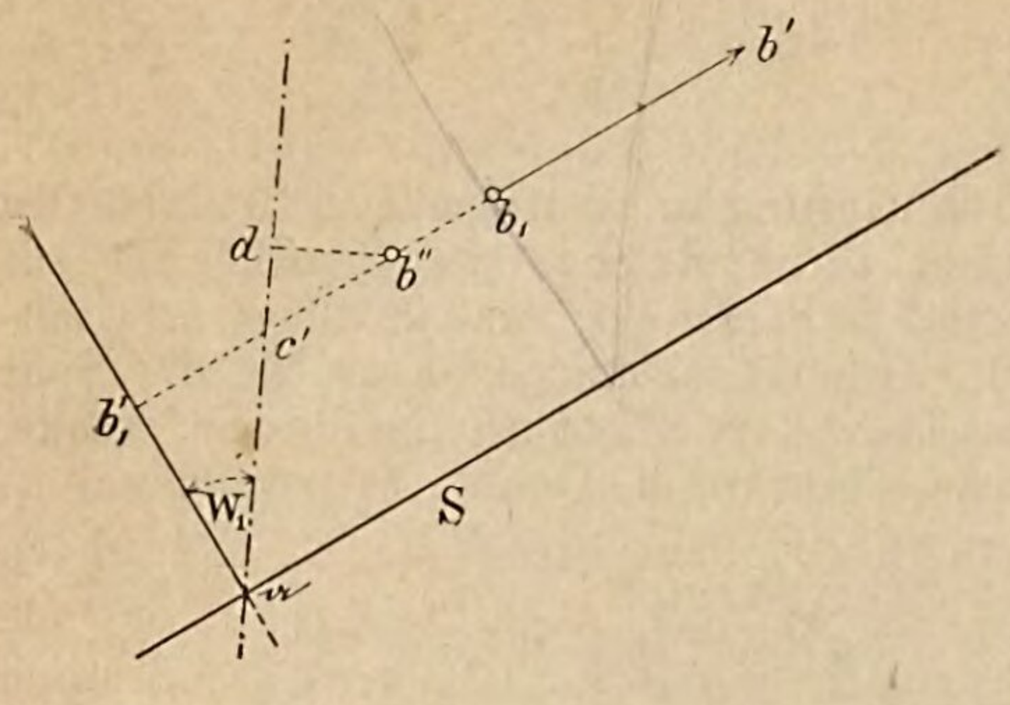
Frage 28. Welche Lagen kann ein Punkt zu einer Ebene haben?

Antwort. Ein Punkt kann in der Ebene oder ausserhalb derselben liegen.

Frage 29. Wie entscheidet man in der Projektionszeichnung über die in der Antwort auf die Frage 27 genannten Lagen eines Punktes zu einer Ebene?

Antwort. Ist, siehe Figur 41, b_1 die Projektion, $\overline{b_1 b'}$ der Abstand des gegebenen Punktes b von der **Pr. Eb.**, ferner S und W_1 die Spur und der Neigungswinkel der gegebenen Ebene, so erhält man über die Lage des Punktes b zur Ebene $S W_1$ Aufschluss, wenn man durch b_1 eine Parallele zur Spur S zieht und von ihrem Schnittpunkt b_1' mit

Figur 41.



dem zu S senkrechten Winkelschenkel von W_1 die Strecke $\overline{b_1' b''} = \overline{b_1 b'}$ abträgt. Fällt der zweite Endpunkt b'' dieser Strecke auf den zweiten Winkelschenkel von W_1, also zusammen mit dem Punkte c', so liegt der Punkt b in der Ebene; in dem in der Fig. 48 gezeichneten Falle demnach nicht.

Erkl. 81. Der von dem Punkte b'', siehe Figur 41, auf den Winkelschenkel $\alpha c'$ gefällte Perpendikel $\overline{b'' d}$ gibt den Abstand des Punktes b von der Ebene SW_1 in wahrer Grösse an.

---

b) Ueber die Lagen einer Geraden zu einer Ebene.

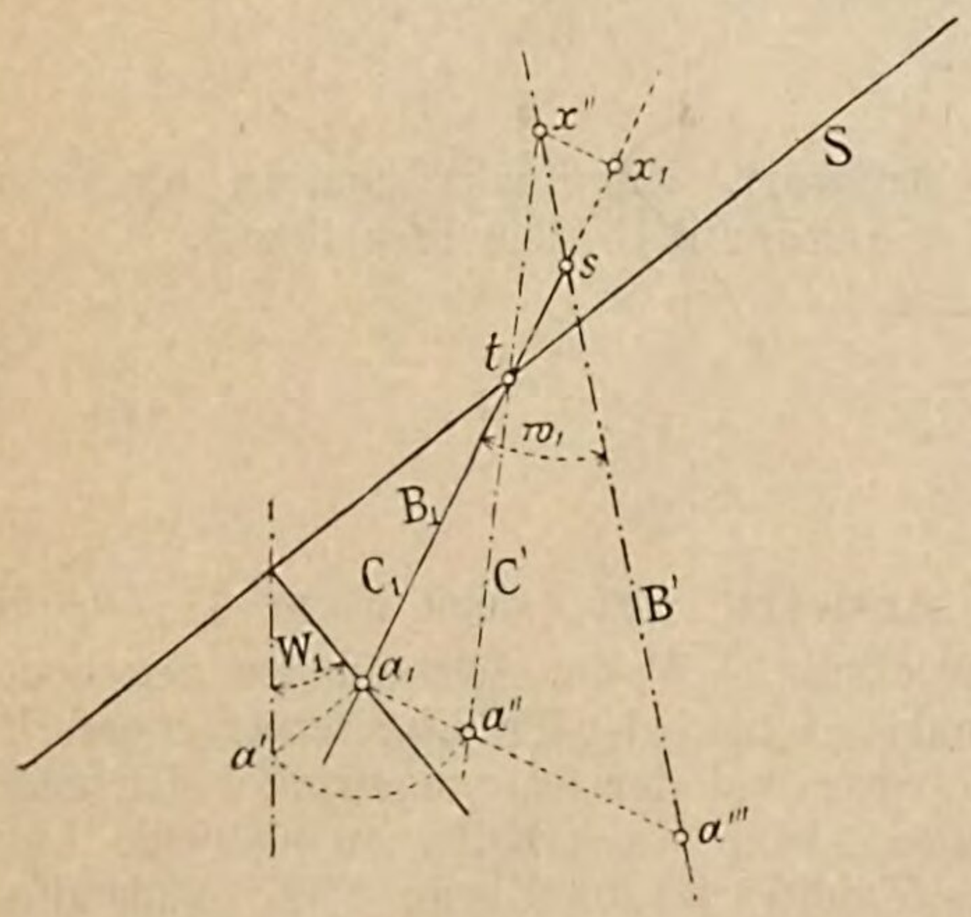
α) Ueber die Lagen einer Geraden zu einer Ebene im allgemeinen.

Frage 30. Welche Lagen kann eine Gerade zu einer Ebene haben?

Antwort. Eine Gerade kann:
1) in der Ebene liegen,
2) zur Ebene parallel sein,
3) die Ebene schneiden.

Frage 31. Wie entscheidet man in der Projektionszeichnung über die in der Antwort auf die Frage 30 genannten Lagen einer Geraden zu einer Ebene.

Figur 42.



Antwort. Ist SW_1, siehe Figur 42, die gegebene Ebene, ferner s, B_1 und w_1 Spur, Projektion und Neigungswinkel der gegebenen Geraden, so erhält man über die Lage der Geraden B zur Ebene SW_1 Aufschluss, wenn man zunächst B_1 als Projektion einer in der Ebene liegenden Geraden C auffasst: dann muss aber offenbar, siehe Erkl. 80, der Schnittpunkt t von B_1 und S die Spur der Geraden C sein. Wählt man ferner auf B_1 einen beliebigen Punkt, etwa gleich den Schnittpunkt a_1 von B_1 mit dem zu S senkrechten Winkelschenkel von W_1, so gibt die Strecke $\overline{a_1 a'}$, siehe die Antwort auf die Frage 29, den Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** an. Zieht man nun durch a_1 eine Senkrechte zu B_1 und trägt auf ihr nach jener Seite, auf welcher die Umlegung B' von B liegt, die Strecke $\overline{a_1 a''} = \overline{a_1 a'}$ ab, so ist die Verbindungslinie $a'' t$ die Umlegung C' von C. Aus der gegenseitigen Lage von C' und B' lässt sich aber wie folgt

Erkl. 82. Will man nur entscheiden, ob eine Gerade in der Ebene liegt oder nicht, so kann man letzteres unmittelbar in der Projektionszeichnung erkennen.

Fällt nämlich die Spur der Geraden nicht in die Spur der Ebene, so liegt auch die Gerade **nicht** in der Ebene.

Erkl. 83. In der Erklärung 81 ist zugleich die Lösung der Aufgabe enthalten: „Von einem Punkte a auf eine Ebene SW_1 ein Perpendikel zu fällen“, denn ist $\overline{a_1 a'}$, siehe Figur 43, parallel zu S und gleich dem Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.**, so braucht man nur durch a_1 die Senkrechte $a_1 a$ zu S zu ziehen, an $a a_1$ den Winkel W_1 anzutragen und von a' aus eine Senkrechte auf den zweiten Winkelschenkel $a b'$ zu fällen. Diese ist die Umlegung der gesuchten Senkrechten, ihre Spur ist der Punkt t und ihr Neigungswinkel der Ergänzungswinkel w_1, siehe Erkl. 84, des Winkels W_1 zu einem Rechten.

Erkl. 84. Der Ergänzungswinkel eines Winkels W_1 zu einem Rechten heisst der Complementswinkel dieses Winkels.

Erkl. 85. Auch die Umkehrung der in Erkl. 83 genannten Aufgabe, nämlich: „Durch einen Punkt eine Ebene zu legen senkrecht zu einer Geraden“ ist nunmehr lösbar.

Denn ist, siehe Figur 44, durch $A_1 s A'$ die gegebene Gerade, durch $b_1 b'$ der gegebene Punkt dargestellt ($\overline{b_1 b'}$ wurde gleich senkrecht zu A_1 angenommen), so hat man nur durch b_1 und b' die Parallelen C_1 und C' zu A_1 bezw. A' und ausserdem durch b' die Senkrechte $b' t$ zu C' zu ziehen. Durch den Punkt t geht senkrecht zu A_1 die Spur S der gesuchten Ebene.

Denn die Gerade C ist parallel zur Geraden A und die Linie bt steht im Raume senkrecht zur Geraden C.

Erkl. 86. Aus Erkl. 83 folgt der Satz: „Soll eine Gerade auf einer Ebene senkrecht stehen, so muss ihre Projektion senkrecht stehen zur Spur der Ebene und ihr Neigungswinkel w_1 den Neigungswinkel W_1 der Ebene zu einem Rechten ergänzen.

Erkl. 87. In der Antwort auf die Frage 31 ist zugleich die Lösung der Aufgabe gegeben: „Den Schnitt einer Geraden mit einer durch Spur und Neigungswinkel gegebenen Ebene zu konstruieren.“

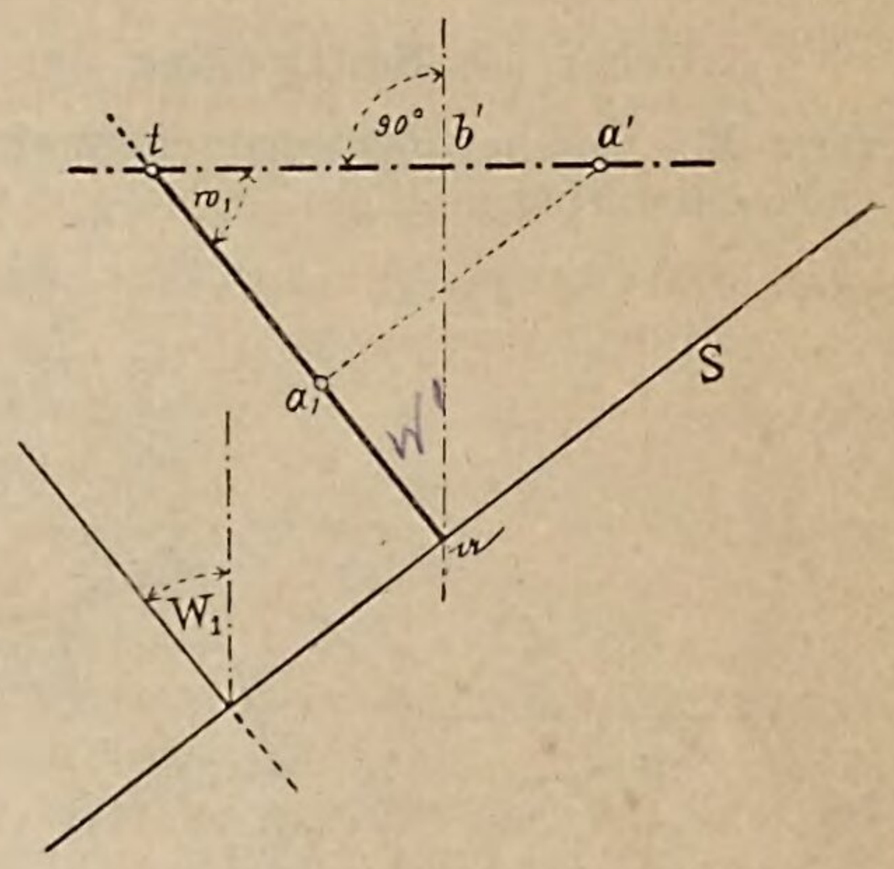
Erkl. 88. Liegen mehrere Gerade in einer Ebene, so können sie entweder alle zu einander parallel laufen, oder sie begrenzen im allgemeinen eine ebene Figur, welche eine bestimmte Projektion besitzt.

auf die Lage von B zur Ebene SW_1 schliessen:

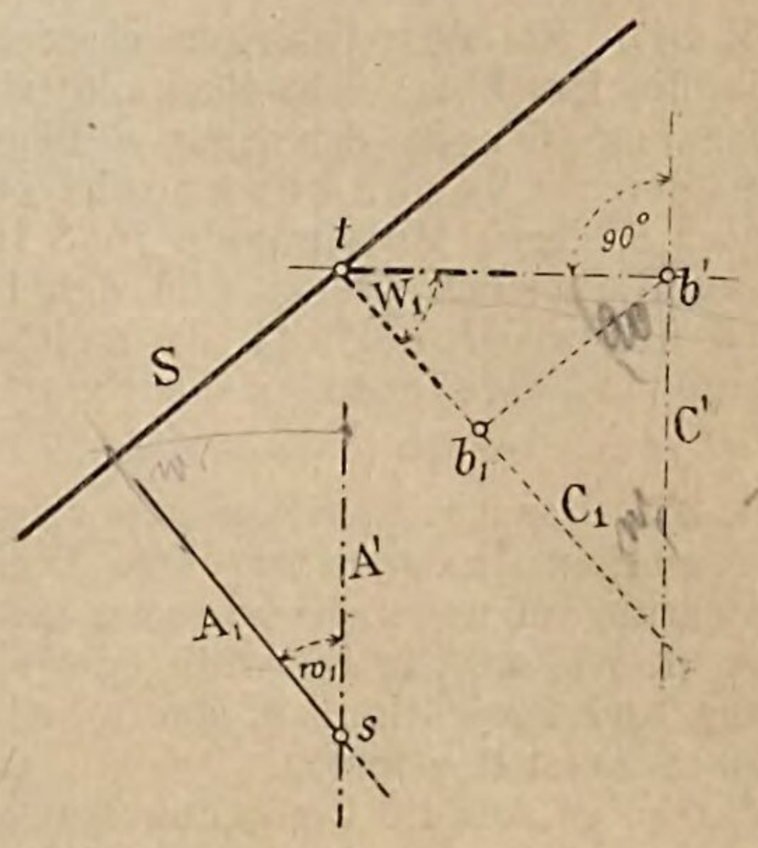
„Würde C' mit B' zusammenfallen, so läge die Gerade B in der Ebene SW_1; würde C' zu B' parallel sein, so wäre die Gerade B parallel zur Ebene; schneiden sich aber, wie in der Fig. 42 C' und B' in einem Punkte x'', so schneidet auch die Gerade B die Ebene SW_1.“

Die durch x'' zu B_1 gezogene Senkrechte liefert auf B_1 die Projektion x_1 des Schnittpunktes x der Geraden B mit der Ebene SW_1. Die Strecke $x'' x_1$ gibt den Abstand dieses Schnittpunktes von der **Pr. Eb.** an.

Figur 43.



Figur 44.



β) Ueber die Projektion einer ebenen Figur im allgemeinen.

Frage 32. Was versteht man unter der Projektion einer begrenzten ebenen Figur.

Erkl. 89. Das Wort „konvex“ stammt aus dem Lateinischen (convexus) und heisst runderhaben, d. h. nach auswärts gewölbt.

Erkl. 90. Eine ebene Figur ist bestimmt, sobald man die Projektionen der sie bildenden Punkte oder Linien sowie die Ebene, in welcher sie liegt, durch ihre Bestimmungsstücke kennt.

Jeder Punkt der Figur ist zu erhalten als Durchschnittspunkt der durch die Projektion des Punktes gezogenen Projizierenden mit der Ebene der Figur.

Jede Gerade der Figur ist zu erhalten als Schnittlinie der durch ihre Projektion gelegten projizierenden Ebene mit der Ebene der Figur.

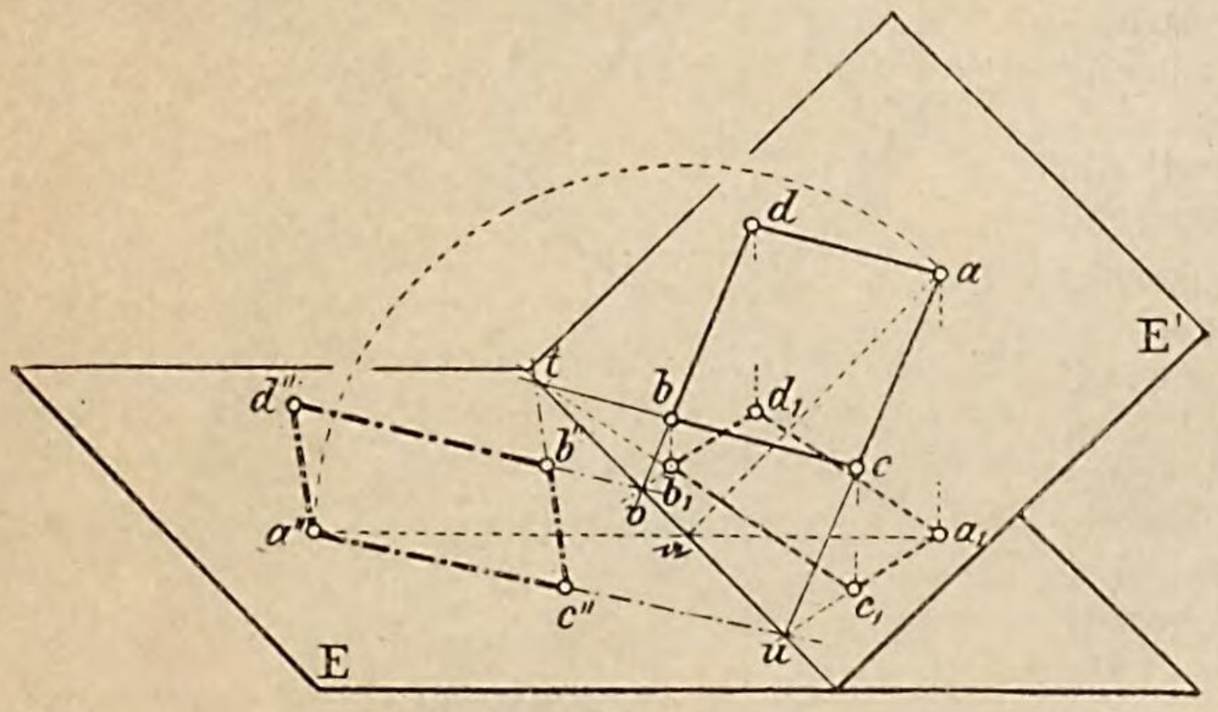
Antwort. Die Projektion einer begrenzten ebenen Figur ist im allgemeinen wieder eine begrenzte ebene Figur der **Pr. Eb.** Ist die Figur ein ebenes Vieleck, so ist auch seine Projektion im allgemeinen ein Vieleck von der gleichen Eck- und Seitenzahl. Je nachdem das Vieleck eine konvexe, siehe Erkl. 89, oder eine sternförmige Gestalt besitzt, hat auch seine Projektion diese Gestalt.

Doch findet zwischen der Gestalt der Figur und ihrer Projektion im allgemeinen keine Kongruenz statt, sondern die Gestalt der Projektion ist verschieden von jener der Figur im Raume.

γ) Ueber die Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur.

Frage 33. Wie bestimmt man die wahre Gestalt einer ebenen Figur?

Figur 45.



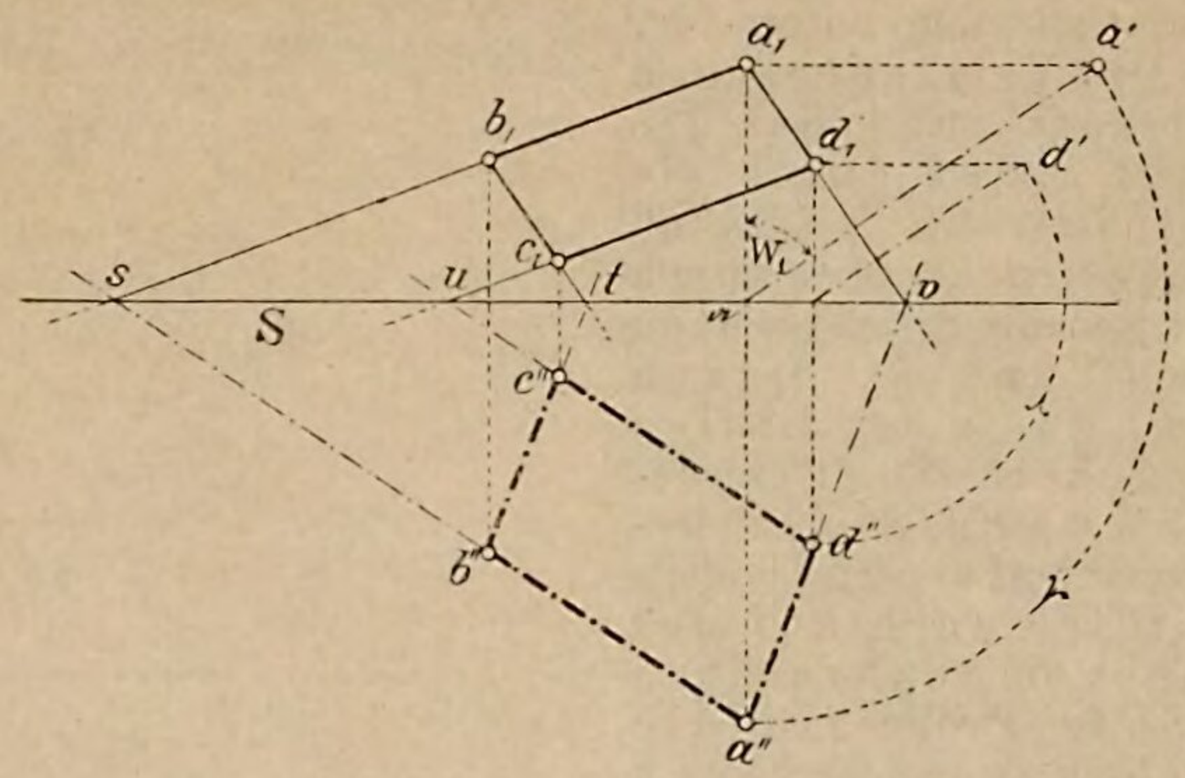
Antwort. Die wahre Gestalt einer ebenen Figur, z. B. eines Vierecks $abcd$, siehe Figur 45, bestimmt man durch Umlegen der Ebene der Figur um ihre Spur S in die **Pr. Eb.** Nach der Umlegung werden die Punkte und Linien in ihrer wahren gegenseitigen Lage in der **Pr. Eb.** erscheinen.

Erkl. 91. Bei dem Umlegen einer ebenen Figur in die **Pr. Eb.** beschreiben alle Punkte, mit Ausnahme der in der Spur S liegenden, Kreise, deren Ebenen senkrecht stehen zur Spur S, deren Mittelpunkte in S liegen und deren Halbmesser gleich sind den Hypotenusen der zu den Punkten gehörigen Konstruktionsdreiecke, siehe Figur 45.

Erkl. 92. Das Umlegen kann in zweifacher Weise geschehen, nämlich so, dass Umlegung und Projektion auf verschiedenen Seiten der Spur liegen, wie z. B. in Figur 45 oder so, dass Umlegung und Projektion auf der gleichen Seite der Spur sich befinden.

In der Folge soll die Umlegung stets in der ersten Art vorgenommen werden, es wäre denn, dass besondere Umstände zu der zweiten Art des Umlegens nötigten.

Figur 46.



Frage 34. Wie wird die Umlegung einer ebenen Figur in die Projektionszeichnung ausgeführt?

Erkl. 93. Denkt man sich, siehe Figur 46, die Projektionen der Viereeksseiten bis zu ihrem Schnitt mit der Spur S verlängert, so erleiden durch die Drehung der Viereeksebene diese Schnittpunkte s, t, u, v keine Veränderung ihrer Lage; es müssen demnach durch sie auch die Verlängerungen der Umlegungen der Viereeksseiten hindurchgehen, woraus folgt, dass die Linien $a_1 b_1$ und $a'' b''$, $b_1 c_1$ und $b'' c''$, $c_1 d_1$ und $c'' d''$, $d_1 a_1$ und $d'' a''$ sich in Punkten s, t, u, v der Geraden S schneiden. Da ausserdem die Punkte a_1 und a'', b_1 und b'', c_1 und c'', d_1 und d'' auf parallelen Strahlen liegen, so stehen Projektion und Umlegung einer ebenen Figur in einem eigentümlichen Zusammenhange, der dadurch charakterisiert ist, dass den Punkten der einen Figur gewisse Punkte der andern Figur so zugeteilt sind, dass entsprechende Punkte auf parallelen Strahlen liegen, und ausserdem je zwei Punkte der einen Figur eine Gerade liefern, der in der andern Figur gleichfalls eine Gerade so entspricht, dass entsprechende Gerade sich in Punkten der Spur schneiden.

Erkl. 94. Den eben genannten Zusammenhang nennt man „Affinität“, siehe Erkl. 95, und zwei Figuren, welche in diesem Zusammenhange stehen, heissen „affine Figuren.“

Die Projektion und die Umlegung einer ebenen Figur sind affine Figuren.

Erkl. 95. Das Wort „Affinität“ stammt aus dem Lateinischen (affinitas) und heisst Verwandtschaft. affin heisst demnach „verwandt“.

Erkl. 96. Die konstruktive Bedeutung der Affinität ist sofort zu erkennen; denn hat man

Antwort. Ist, siehe Figur 46, die Projektion $a_1 b_1 c_1 d_1$ eines Vierecks $a b c d$ sowie die Spur S der Viereeksebene und ausserdem etwa der Abstand $\overline{a_1 a'}$ des Punktes a von der **Pr. Eb.** gegeben, so ist damit offenbar die Lage der Viereeksebene gegen die **Pr. Eb.** vollständig bestimmt; denn ist $a_1 a'$ parallel, $a_1 \mathfrak{a}$ senkrecht zu S gezogen und $\mathfrak{a} a'$ verbunden, so ist damit das Konstruktionsdreieck $a' a_1 \mathfrak{a}$ des Punktes a und folglich auch der Winkel W_1 der Viereeksebene $a b c d$ gegeben. Denkt man sich nun die Viereeksebene um ihre Spur S so lange gedreht, bis sie mit der **Pr. Eb.** zusammenfällt, so beschreibt der Punkt a, siehe Figur 45, nach Erkl. 91 einen Kreis, mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{a}$ und der Hypotenuse $\overline{\mathfrak{a} a'}$ als Halbmesser.

Da in Wirklichkeit die Linie $\mathfrak{a} a$ auf der Spur S senkrecht steht und diese Lage durch die Drehung der Ebene nicht verändert wird, so muss auch nach dem Zusammenfallen der Viereeksebene mit der **Pr. Eb.** die Linie $\mathfrak{a} a$ senkrecht zu S bleiben, d. h. entweder in die Verlängerung von $a_1 \mathfrak{a}$ oder auf die Linie $a_1 \mathfrak{a}$ selbst fallen. Ist das erstere vorausgesetzt, so kommt der Punkt a, siehe Figur 46, nach der Umlegung nach a'' in eine Entfernung gleich der Länge $\overline{\mathfrak{a} a'}$, siehe Erkl. 91, zu liegen.

Auf die nämliche Weise können auch die Umlegungen der übrigen Eckpunkte des Vierecks, wie z. B. des Punktes d bestimmt werden, wodurch sich die Umlegung $a'' b'' c'' d''$ als wahre Gestalt des Vierecks $a b c d$ ergibt.

z. B., siehe Figur 46, den Punkt a mittels des Konstruktionsdreiecks ermittelt, so findet man die übrigen Punkte der Umlegung mittels der Affinität sehr einfach. Die Verlängerungen von $a_1 b_1$ und $a_1 d_1$ liefern zunächst die Punkte s und v auf S und durch sie gehen auch die Linien $a'' b''$ und $a'' d''$ hindurch. Die Durchschnitte der durch b_1 und d_1 zu S gezogenen Senkrechten geben die Punkte b'' und d''. Durch die Schnittpunkte t und u der Linien $b_1 c_1$ und $d_1 c_1$ mit S gehen die entsprechenden Linien $b'' c''$ und $d'' c''$ und bestimmen in ihrem Schnittpunkt den Punkt c'', der überdies auch auf der durch c_1 zu S gezogenen Senkrechten liegen muss, was als **Probe** für die **Richtigkeit** der Zeichnung angesehen werden kann.

Erkl. 97. Die Gerade S, auf welcher sich entsprechende Gerade zweier affinen Figuren schneiden, heisst die „Affinitätsachse“, die Richtung der parallelen Strahlen, auf welchen entsprechende Punkte liegen, die „Affinitätsrichtung“.

Erkl. 98. Der Begriff der Affinität ist nicht an die Bedingung gebunden, dass Affinitätsrichtung und Achse aufeinander senkrecht stehen, sie können eine ganz beliebige Lage zu einander haben, also auch parallel sein.

Erkl. 99. Ist eine Ebene $S W_1$ mit einer in ihr liegenden Figur in die **Pr. Eb.** umgelegt, so lässt sich auch die Projektion der Figur durch Umkehrung des in der Antwort auf die Frage 34 beschriebenen Verfahrens sehr einfach konstruieren, in dem man die Projektion eines einzelnen Punktes der Figur mit Hilfe des zu ihm gehörigen Konstruktionsdreiecks ermittelt, von welchem man die Hypotenuse und den Winkel W_1 kennt; die dem Winkel W_1 anliegende Kathete gibt die Entfernung der Projektion von der Spur S, die gegenüberliegende den Abstand des Punktes von der **Pr. Eb.** an; die übrigen Punkte der Projektion lassen sich mit Benützung der Affinität leicht finden.

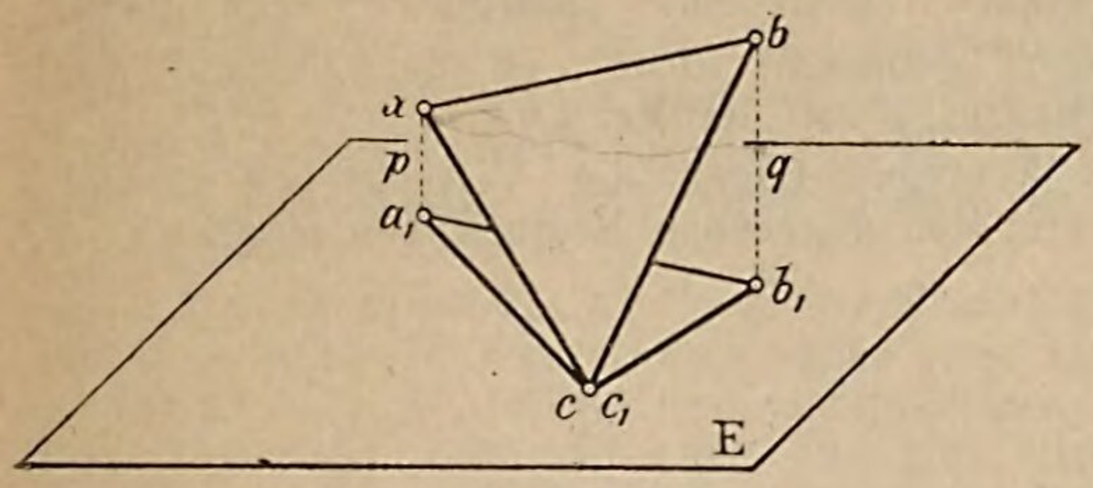
δ) Gelöste Aufgaben.

Anmerkung 5. Bei den folgenden Aufgaben, in welchen es sich vornehmlich um planimetrische Konstruktionen, d. h. um solche Konstruktionen handelt, welche in einer Ebene auszuführen sind, besteht das Konstruktionsverfahren immer darin, dass man die Ebene, in welcher die Konstruktion zu geschehen hat, in die Zeichnungsebene umlegt. Nach der Umlegung erscheinen die Punkte und Linien der Ebene in ihrer wahren gegenseitigen Lage; es lässt sich daher die der Aufgabe entsprechende Konstruktion vornehmen und aus der Umlegung mit Bezug auf das in den Erkl. 94 und 95 Gesagte die zur Umlegung gehörige Projektion zeichnen.

Aufgabe 13. Zwei Punkte a und b sind durch ihre Projektionen a_1 und b_1 und deren Abstände p und q von der **Pr. Eb.** als End-

punkte eines gleichseitigen Dreiecks gegeben. Die Projektion des Dreiecks ist zu zeichnen, wenn die dritte Ecke c in der **Pr. Eb.** liegen soll.

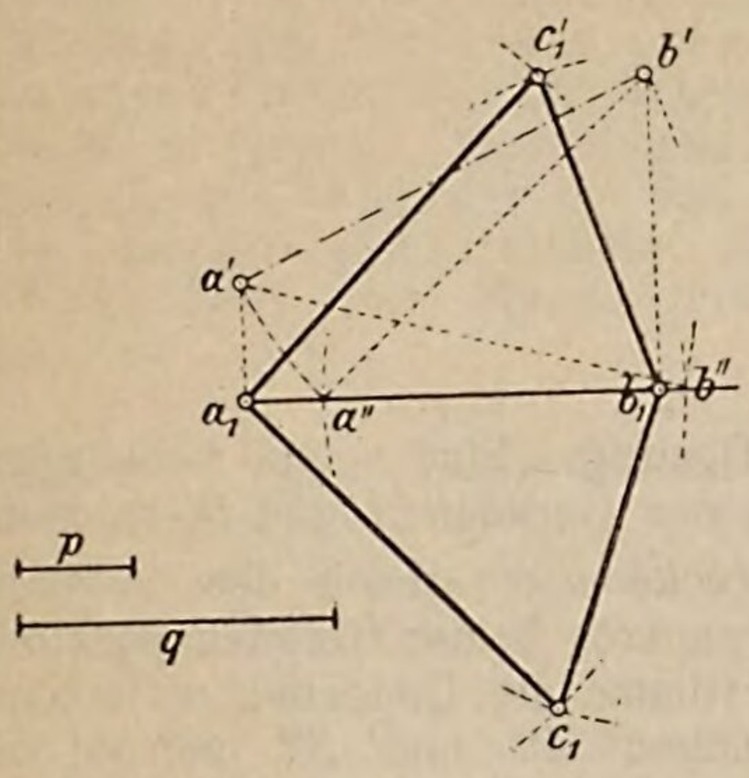
Figur 47.



Auflösung. Die Projektion $a_1 b_1 c_1$, siehe Figur 47, des Dreiecks abc wird konstruierbar sein, sobald man die Längen der Seiten $\overline{a_1 c_1}$ und $\overline{b_1 c_1}$ kennt. Diese ergeben sich aber als Katheten der rechtwinkligen Dreiecke $a a_1 c_1$ und $b b_1 c_1$, in welchen je die Hypotenuse (gleich der wahren Länge von $\overline{ab}$), sowie die Katheten $\overline{a a_1} = p$ und $\overline{b b_1} = q$ bekannt sind. Man erhält daher folgende

Konstruktion: In den Punkten a_1 und b_1, siehe Figur 48, errichte auf ab Senkrechte $\overline{a_1 a'} = p$ und $\overline{b_1 b'} = q$, so ist $\overline{a' b'}$ die wahre Länge von $\overline{ab}$; konstruiere die rechtwinkligen Dreiecke $b' b_1 a''$ und $a' a_1 b''$ mit der Hypotenuse gleich $\overline{ab}$, so erhält man die Ecke c_1 bezw. c_1' als Schnitt der um die Punkte a_1 und b_1 mit den Halbmessern $\overline{a_1 b''}$ bezw. $\overline{b_1 a''}$ beschriebenen Kreise.

Figur 48.

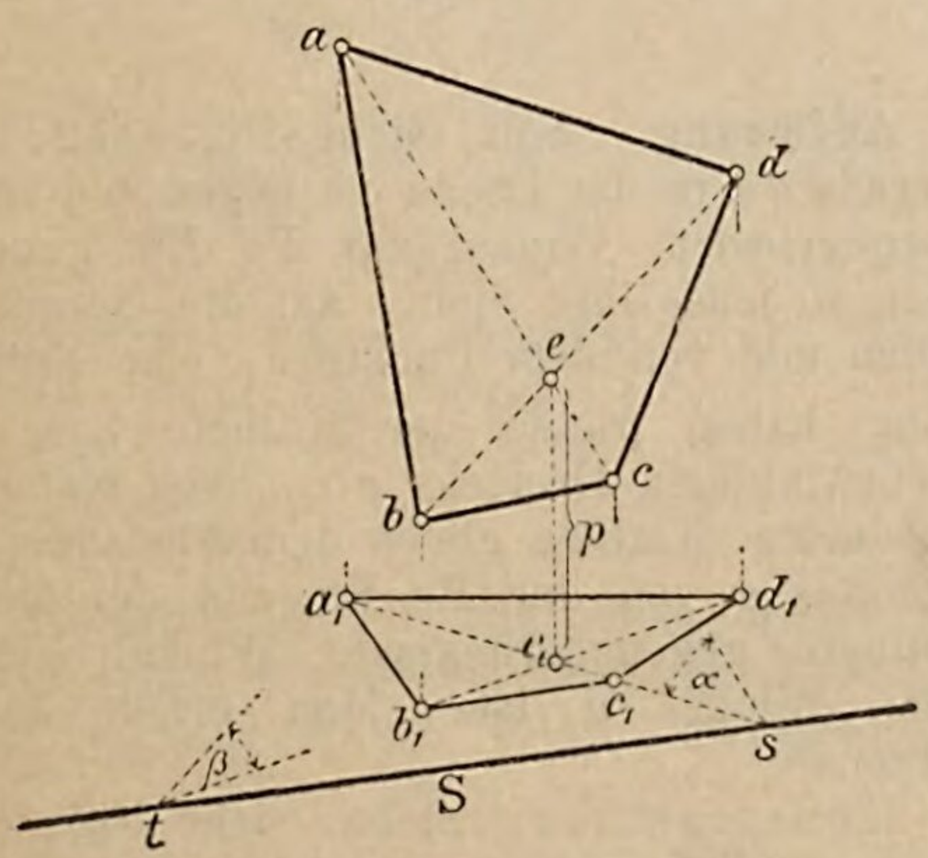


Erkl. 99a. Es gibt im allgemeinen zwei Dreiecke, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Wann wird die Lösung der Aufgabe unmöglich?

Aufgabe 14. Von einem ebenen Viereck $abcd$ kennt man seine Projektion $a_1 b_1 c_1 d_1$, den Abstand p des Diagonalschnittpunktes a von der **Pr. Eb.** und ausserdem die Neigungswinkel α und β der beiden Diagonalen $\overline{ac}$ und $\overline{bd}$. Die wahre Gestalt des Vierecks, sowie die Abstände der Viereckecken von der **Pr. Eb.** sind zu zeichnen.

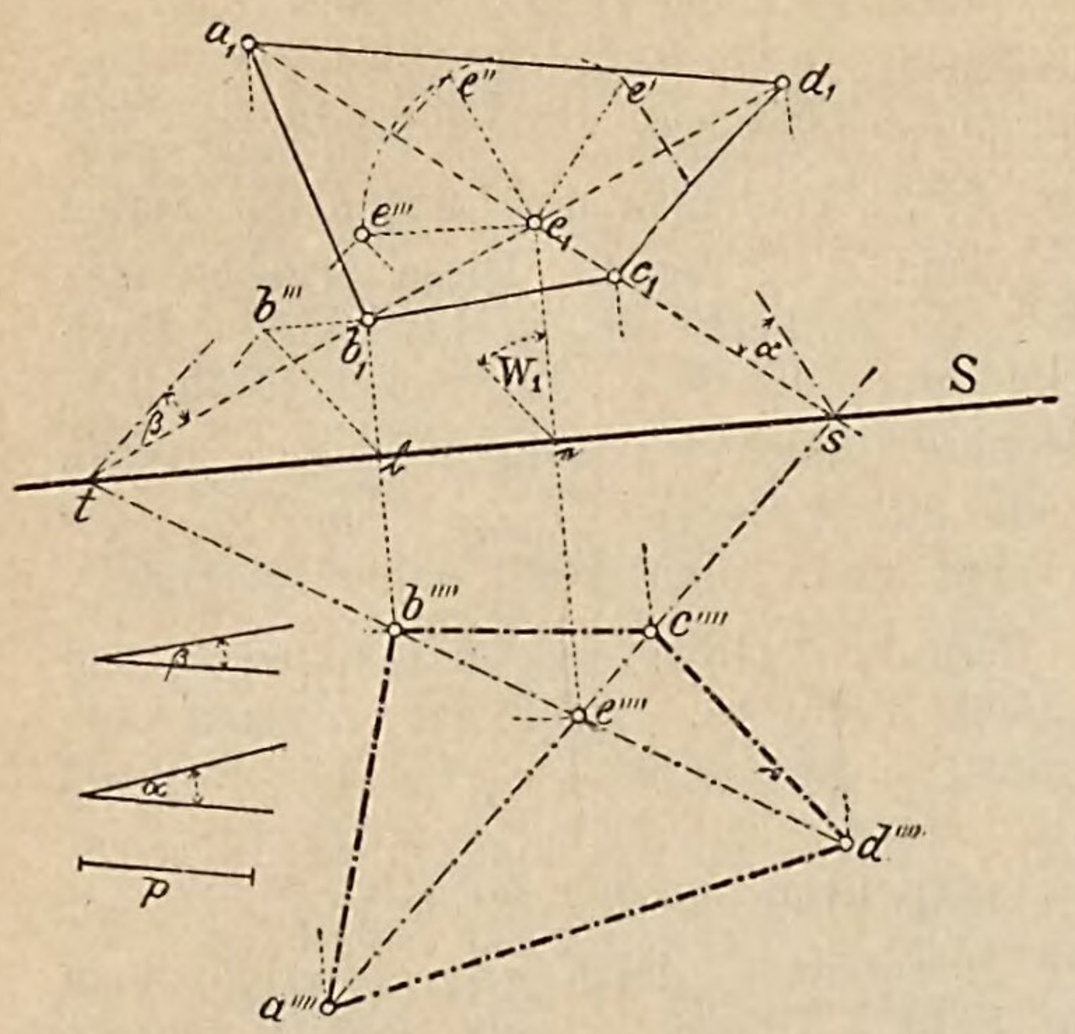
Figur 49.



Auflösung. In den beiden rechtwinkligen Dreiecken $ee_1 s$ und $ee_1 t$, siehe Figur 49, sind je eine Kathete $ee_1 = p$ sowie der gegenüberliegende Winkel α bezw. β gegeben, mithin ist auch die Länge der andern Kathete $\overline{e_1 s}$, bezw. $\overline{e_1 t}$ bekannt. Damit kann man aber die Punkte s und t und folglich auch die Spur der Viereckebene konstruieren und letztere in die **Pr. Eb.** umlegen, wodurch sich die wahre Gestalt des Vierecks ergibt. Man erhält folgende

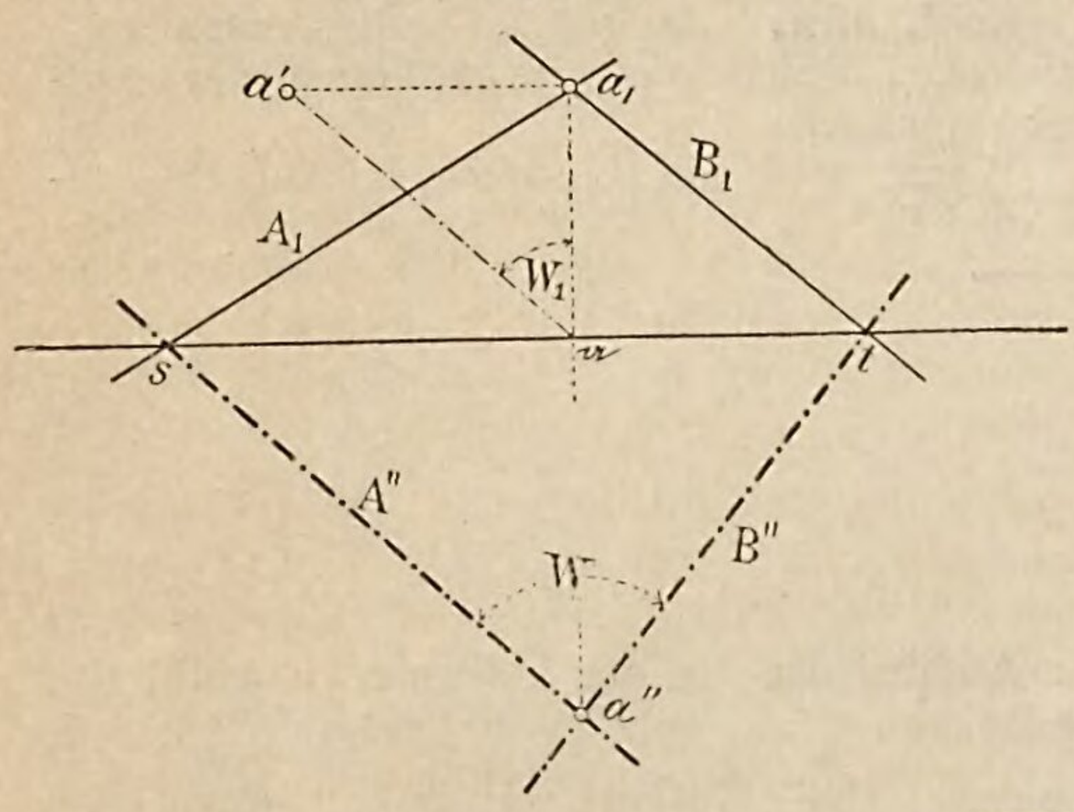
Konstruktion: Errichte, siehe Fig. 50, auf den Projektionen $\overline{a_1 c_1}$ und $\overline{b_1 d_1}$ im Punkte e_1 die Senkrechten $e_1 e'$ und $e_1 e'' = p$ und konstruiere die rechtwinkligen Dreiecke $e_1 e' s$ und $e_1 e'' t$ mit Hülfe der Winkel α und β. Verbinde st und bestimme die Umlegung e'''' des Punktes e mittels des Konstruktionsdreiecks $e_1 e''' c$, sowie die Umlegung des ganzen Vierecks unter Benützung der Affi-

Figur 50.



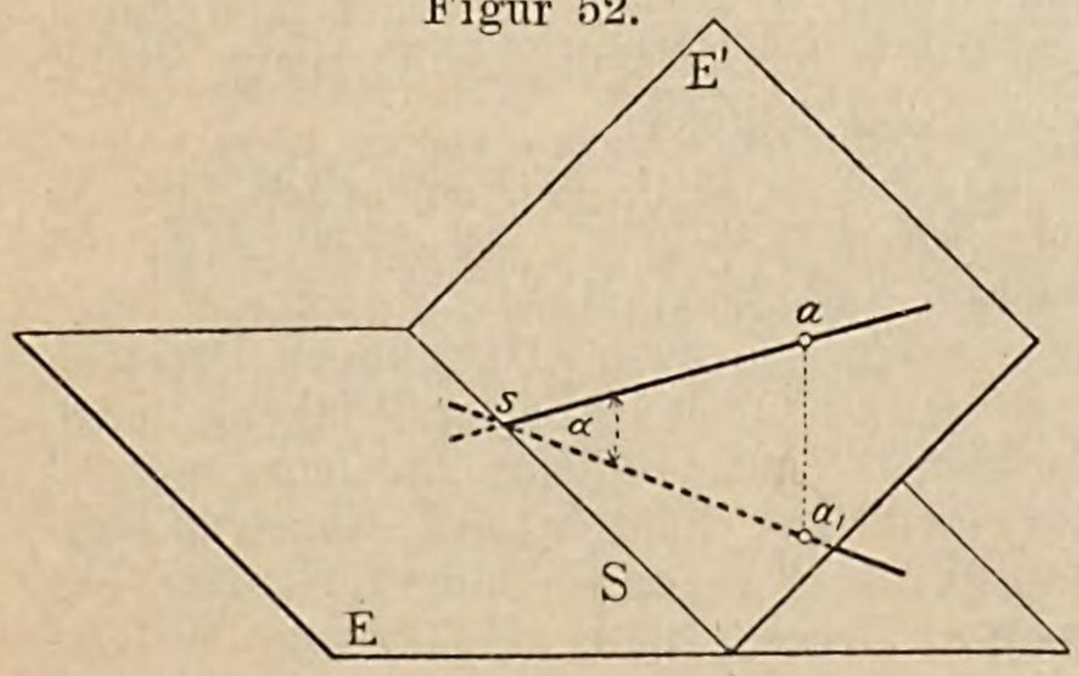
Aufgabe 15. Die wahre Grösse des Winkels zweier sich schneidenden Geraden A und B ist zu konstruieren.

Figur 51.



Aufgabe 16. In einer gegebenen Ebene Sa ist durch a eine Gerade zu zeichnen, welche mit der **Pr. Eb.** einen Winkel α von vorgeschriebener Grösse bildet.

Figur 52.



nität, siehe Erkl. 93. Die Abstände der Eckpunkte des Vierecks von der **Pr. Eb.** erhält man nach Erkl. 99.

Die Konstruktion ist für den Punkt b durchgeführt, es ist $\overline{b\,b'''}$ parallel $e\,e'''$ und gleich $\overline{b\,b''''}$ gemacht. $\overline{b_1\,b'''}$ ist der Abstand des Punktes b von der **Pr. Eb.**

Wieviele Lagen des Vierecks $a\,b\,c\,d$ sind unter den gegebenen Bedingungen möglich?

Auflösung. Sind s und t die gegebenen Spuren der Geraden A und B, so ziehe man die Strecke $a_1 a'$ gleich dem Abstand des Schnittpunktes beider Geraden parallel zu st und bestimme die Umlegung a'' von a. Die Umlegungen A'' und B'' von A und B schliessen den Winkel W der beiden Geraden ein.

Auflösung. Soll, siehe Figur 52, die Gerade as in der Ebene Sa liegen und unter vorgegebenem Winkel zur **Pr. Eb.** geneigt sein, so muss ihre Spur s auf die Gerade S fallen und von dem Punkte a_1 eine Entfernung haben gleich der Kathete $\overline{a_1 s}$ des rechtwinkligen Dreiecks $a\,a_1\,s$, von welchem die andere Kathete gleich dem Abstande des Punktes a von der **Pr. Eb.** und der dieser Kathete gegenüberliegende Winkel gleich dem Winkel α ist. Man erhält daher folgende

Konstruktion: Ziehe, siehe Figur 53, $a_1 a'$ parallel zu S und gleich dem Abstand

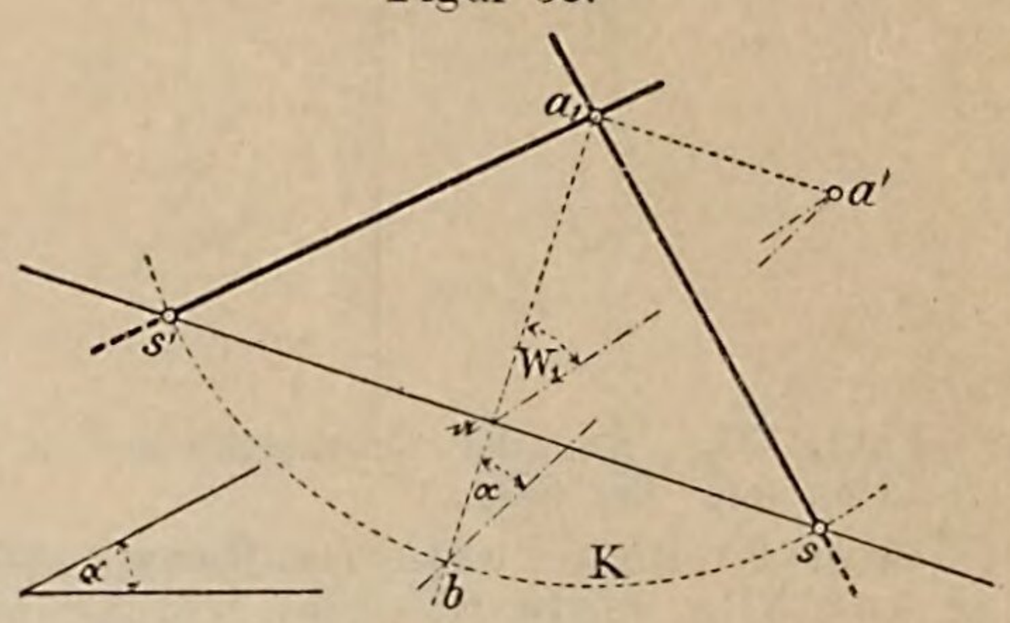
Erkl. 100. Die nebenstehende Konstruktion liefert so lange ein Resultat, als die Kathete $\overline{a_1 b}$ nicht kleiner wird als die Projektion $\overline{a_1 a}$ der Neigungslinie des Punktes a. Letzteres ist aber der Fall, sobald der Winkel α grösser wird als der Neigungswinkel W_1 der Ebene Sa mit der **Pr. Eb.** Ist $\alpha = W_1$, so berührt der Kreis K die Spur S und die gesuchte Gerade fällt mit der Neigungslinie des Punktes a zusammen. Aus Vorstehendem folgt der Satz:

„Durch einen Punkt a einer Ebene Sa lassen sich in der Ebene stets **zwei Gerade** ziehen, welche einen vorgegebenen Winkel $\alpha < W_1$ mit der **Pr. Eb.** einschliessen, sie liegen symmetrisch zur Neigungslinie von a, dagegen gibt es nur **eine Gerade** unter dem Winkel $\alpha = W_1$, sie ist die Neigungslinie von a aber keine Gerade unter einem Winkel $\alpha > W_1$".

Mit anderen Worten: „Der Winkel einer Geraden einer Ebene mit der **Pr. Eb.** ist im allgemeinen stets **kleiner** als der Neigungswinkel der Ebene mit der **Pr. Eb.**

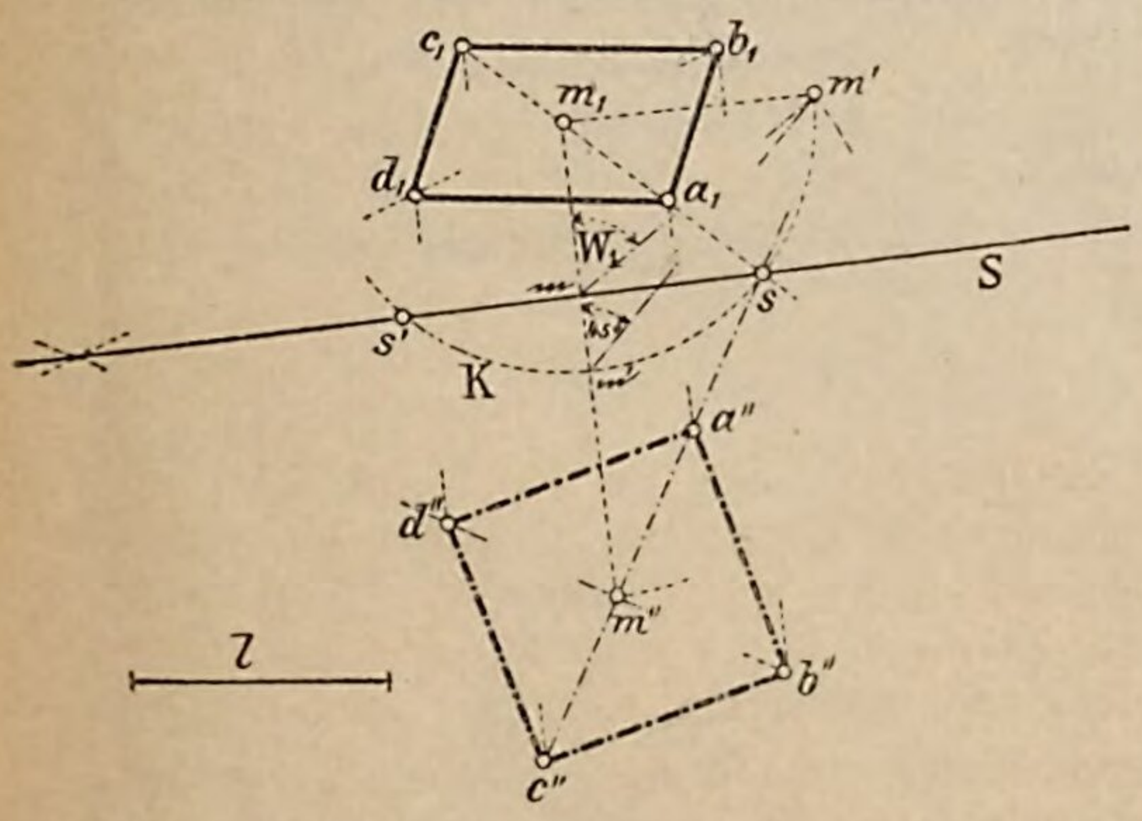
des Punktes a von der **Pr. Eb.**, konstruiere das rechtwinklige Dreieck $a_1 a' b$ mit dem gegebenen Winkel α und beschreibe um a_1 mit einem Halbmesser gleich $\overline{ab}$ einen Kreis K, welcher S in den Punkten s und s' trifft. Die Verbindungslinien $a_1 s$ und $a_1 s'$ sind die Projektionen der gesuchten Geraden.

Figur 53.



Aufgabe 17. Eine Ebene ist durch ihre Spur S und einen ihrer Punkte m gegeben. Der Punkt m ist Mittelpunkt eines Quadrats von gegebener Seitenlänge l; eine der Quadratdiagonalen soll einen gegebenen Winkel $\alpha = 45^0$ mit der **Pr. Eb.** einschliessen. Man soll die Projektion und wahre Gestalt des Quadrats, sowie die Abstände seiner Ecken von der **Pr. Eb.** zeichnen.

Figur 54.



Auflösung. Ist, siehe Figur 54, $\overline{m_1 m'}$ parallel zu S und gleich dem Abstande des Punktes m von der **Pr. Eb.** gemacht, so bestimmt man auf die bei der vorhergehenden Aufgabe angegebene Art und Weise die Spur s der Quadratdiagonale $\overline{ms}$, hierauf die Umlegung m'' von m. Die Verbindungslinie $m''s$ ist die Umlegung der einen Quadratdiagonale, die andere geht durch m'' senkrecht zu $m''s$.

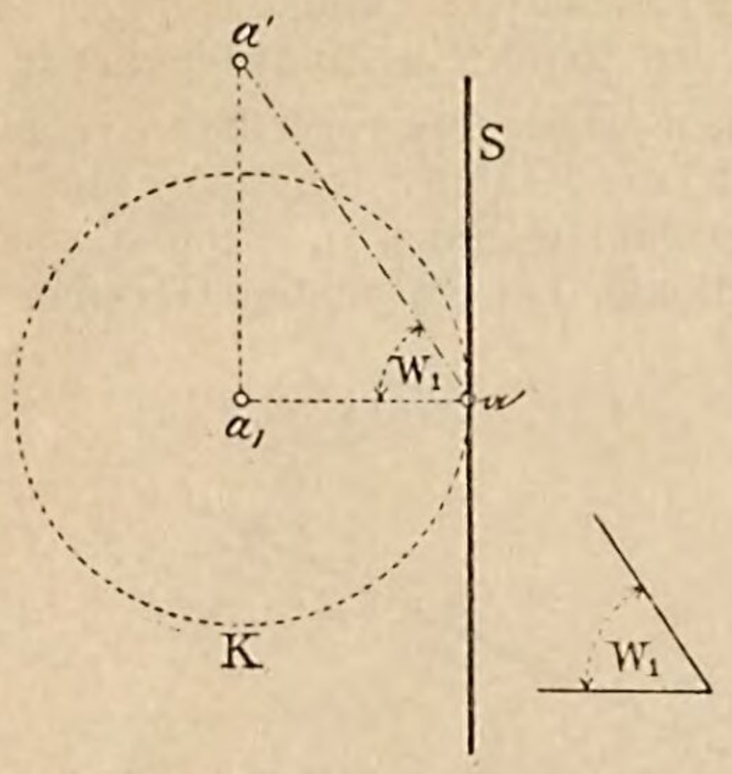
Man kann nunmehr mittels der gegebenen Länge l als Seite das Quadrat $a''b''c''d''$ konstruieren und unter Benützung der Affinität, siehe Erkl. 93, sowie der Konstruktionsdreiecke, siehe Erkl. 99, die Projektion des Quadrats samt den Abständen seiner Ecken von der **Pr. Eb.** ermitteln.

Da der Kreis K, siehe auch Erkl. 100, die Spur S im allgemeinen in zwei Punkten s und s' trifft, so gibt es zwei Lagen des Quadrats, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 18. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Ebene unter vorgegebenem Winkel W_1 zur **Pr. Eb.** zu legen.

Auflösung. Zieht man durch a alle möglichen Geraden unter dem Winkel W_1 zur **Pr. Eb.** geneigt, so kann jede derselben als

Figur 55.

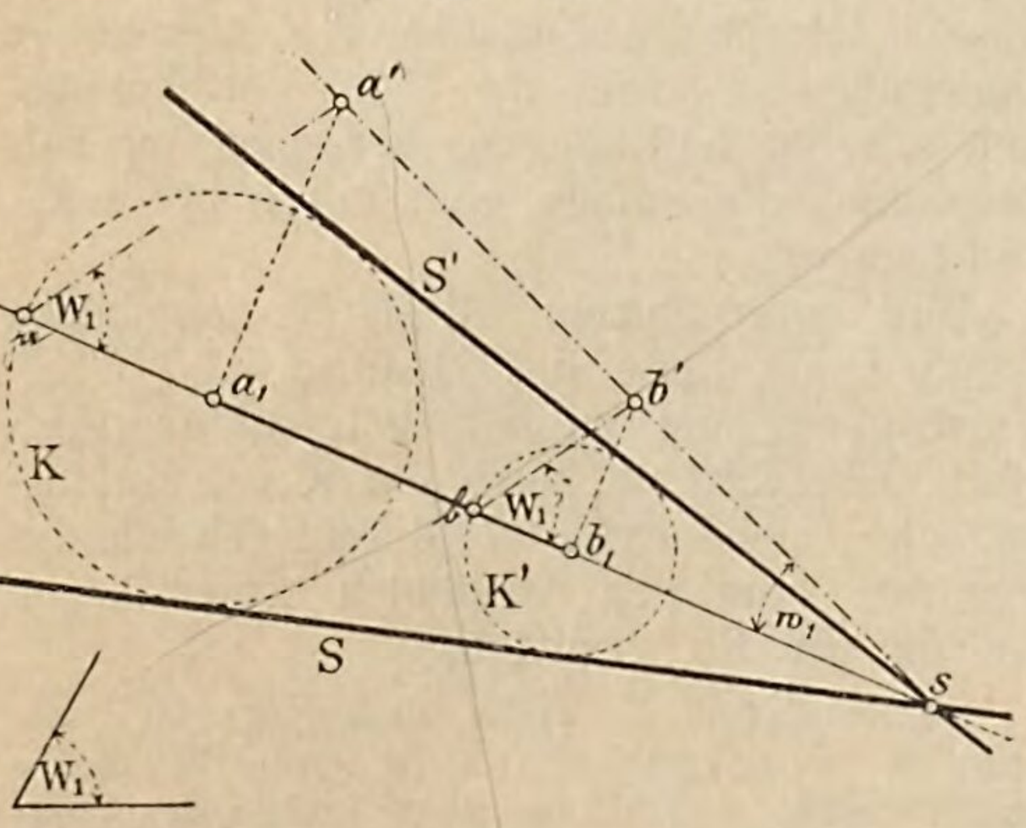


Erkl. 101. Aus der nebenstehenden Konstruktion folgt der Satz:

„Durch einen Punkt im Raume gibt es unzählig viele Ebenen, welche mit der **Pr. Eb.** einen vorgegebenen Winkel W_1 einschliessen, sie umhüllen den in der Erkl. 59 näher bezeichneten Kegel und ihre Spuren sind Tangenten an den Grundkreis dieses Kegels."

Aufgabe 19. Zwei Punkte a und b sind durch ihre Projektionen und ihre Abstände von der **Pr. Eb.** gegeben. Durch die Gerade ab ist eine Ebene zu legen, welche mit der **Pr. Eb.** einen Winkel W_1 von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

Figur 56.



Erkl. 102. Haben die Abstände der beiden Punkte gleiches Vorzeichen, so sind die möglichen zwei äusseren Tangenten als Spuren der gesuchten Ebenen zu nehmen; haben die Abstände aber ungleiches Vorzeichen, so gelten als Spuren die beiden inneren Tangenten.

Erkl. 103. Die Verlängerung von $a_1 b_1$ muss durch den Schnittpunkt s der beiden Tangenten

Neigungslinie einer Ebene der gesuchten Art aufgefasst werden. Solcher Geraden gibt es aber nach Erkl. 59 unendlich viele; ihre Spuren liegen auf dem in der genannten Erklärung näher bezeichneten Kreise. Die Spuren der gesuchten Ebenen werden daher, weil die Projektion der Neigungslinie auf der Spur der Ebene senkrecht steht, Tangenten an diesen Kreis sein.

Man erhält nach dem eben Gesagten folgende

Konstruktion: Zeichne das rechtwinklige Dreieck $a_1 a' a$, siehe Figur 55, mit $\overline{a_1 a'}$ gleich dem Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** als Kathete und W_1 als gegenüberliegenden Winkel, beschreibe um a_1 mit $\overline{a_1 a}$ als Halbmesser den Kreis K. Jede Tangente S an K ist die Spur einer Ebene der gesuchten Art.

Auflösung. Denkt man sich, siehe Fig. 56, um die Punkte a_1 und b_1 die Kreise K und K' nach Angabe der Auflösung der Aufgabe 18 gezeichnet, so wird die Spur S einer Ebene der gesuchten Art eine gemeinsame Tangente an die Kreise K und K' sein müssen.

S und S', siehe Figur 56, hindurchgehen; durch denselben Punkt geht aber auch die Verbindungslinie $a'b'$, siehe Erkl. 44. Man hätte daher auch den Punkt s als Schnittpunkt von $a_1 b_1$ und $a'b'$ bestimmen und die Spuren S und S' als Tangenten von s an K zeichnen können.

Erkl. 104. Die eben angegebene Konstruktion liefert so lange ein Resultat, als der Punkt s nicht innerhalb des Kreises K liegt. Letzteres tritt aber ein, wenn der Winkel W_1 der Ebene mit der **Pr. Eb.** kleiner als der Winkel w_1 der Geraden ab mit der **Pr. Eb.** wird. Ist $W_1 = w_1$, so fällt der Punkt S gerade auf den Kreis K und die Spur der Ebene wird senkrecht zu $a_1 b_1$ stehen. Aus dem Gesagten folgt der Satz:

„Durch eine Gerade lassen sich stets **zwei** Ebenen legen, welche mit der **Pr. Eb.** einen Winkel W_1 einschliessen, der grösser ist als der Winkel w_1 der Geraden; die Spuren dieser Ebenen liegen symmetrisch zur Projektion der Geraden, dagegen gibt es nur **eine** Ebene, wenn der Winkel $W_1 = w_1$ ist; die Spur der Ebene steht dann senkrecht zur Projektion der Geraden, keine Ebene aber, wenn $W_1 < w_1$ ist."

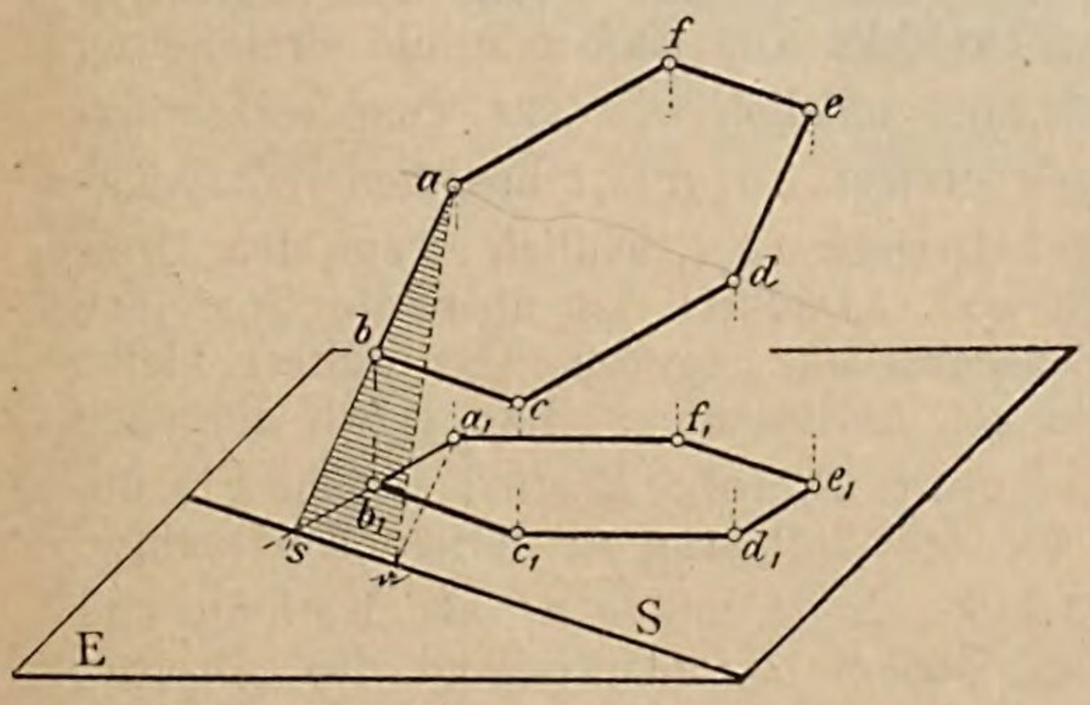
Vergleiche hiermit das in Erkl. 100 Gesagte.

Aufgabe 20. Zwei Punkte a und b sind als Ecken eines regelmässigen Sechsecks durch ihre Projektionen und ihre Abstände von der **Pr. Eb.** gegeben; die durch a gehende Hauptdiagonale soll:

a) zur **Pr. Eb.** parallel sein,
b) mit der **Pr. Eb.** einen gegebenen Winkel α einschliessen.

Man soll die Projektion und wahre Gestalt des Sechsecks, sowie die Abstände der Sechsecksecken von der **Pr. Eb.** zeichnen.

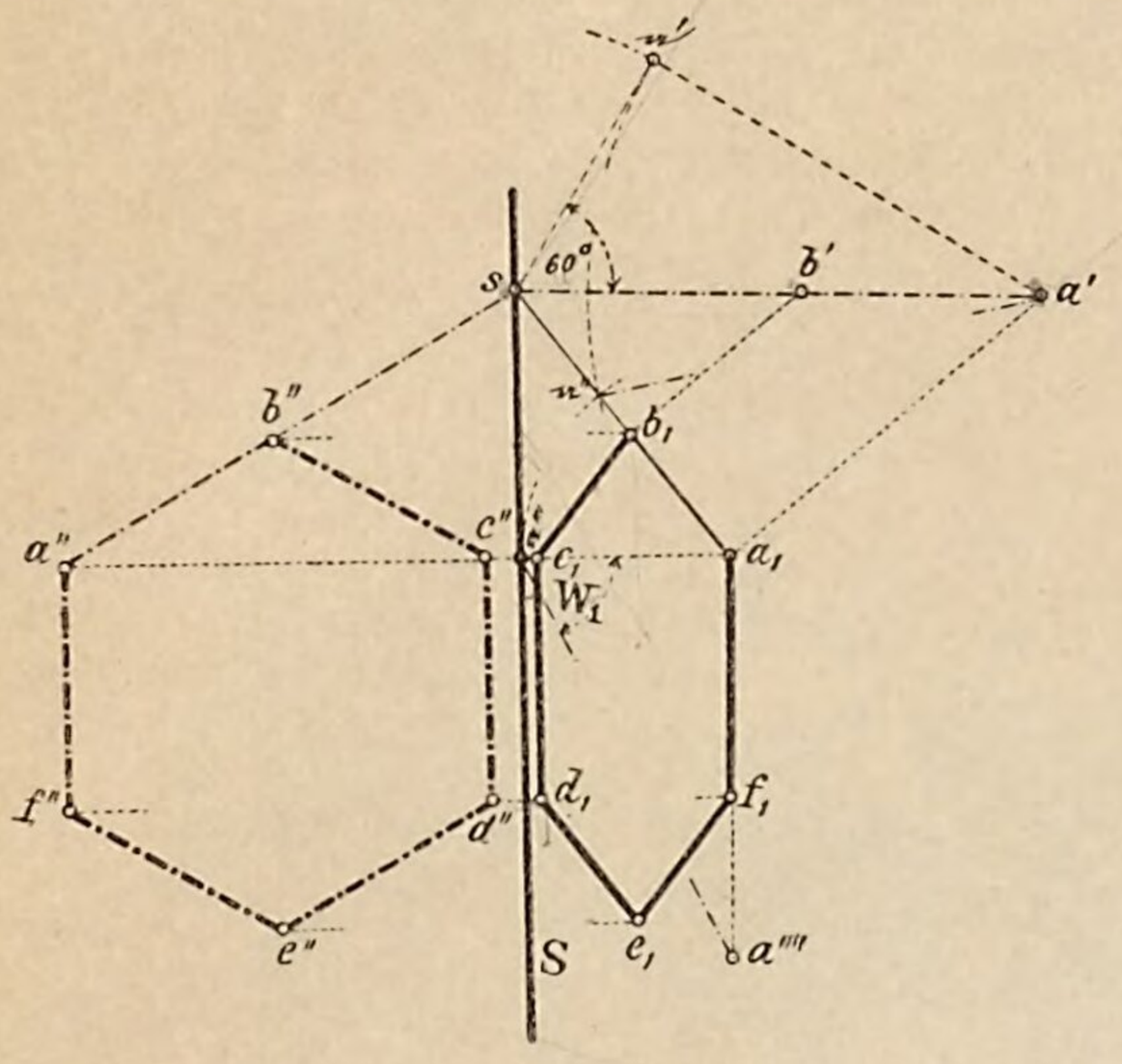
Figur 57.



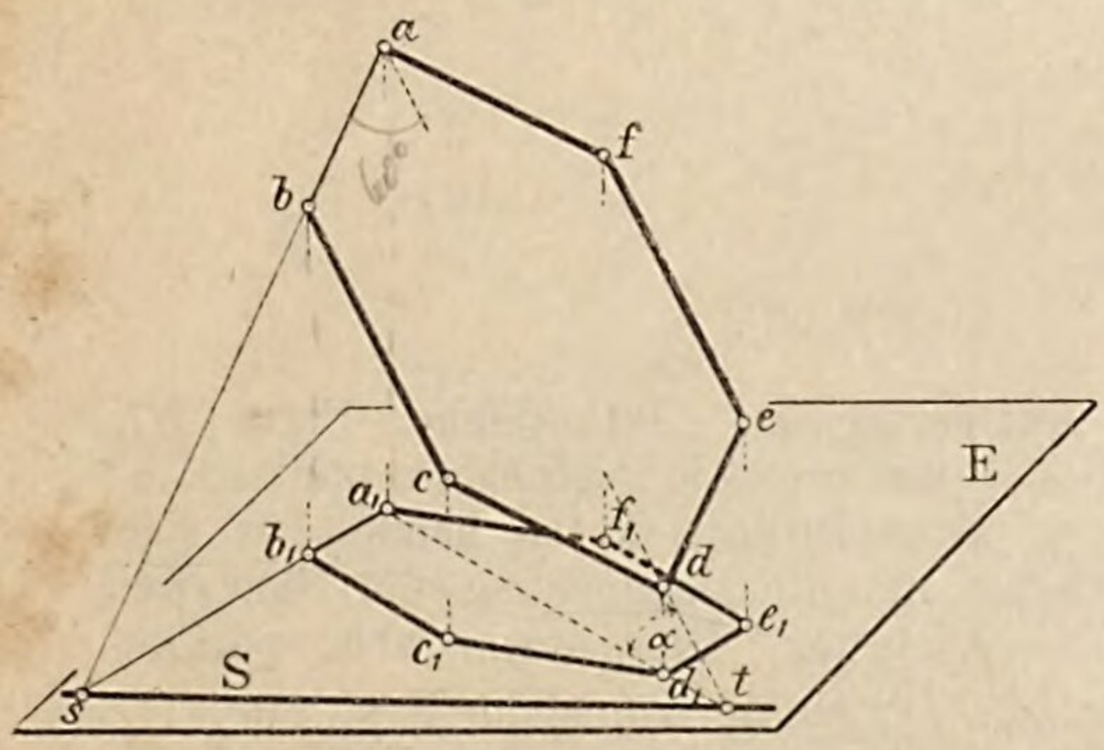
Auflösung a. Ist, siehe Figur 57, $abcdef$ das gesuchte Sechseck und $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ seine Projektion, so handelt es sich zunächst um die Bestimmung der Spur der Sechsecksebene. Diese muss aber parallel sein zur Diagonale $\overline{ad}$, siehe Erkl. 105.

Denkt man sich nun durch a die Neigungslinie $a\mathfrak{a}$ gezogen und ihre Projektion $a_1\mathfrak{a}$ gezeichnet, so ist in dem Dreieck $a\mathfrak{a}s$ die Hypotenuse $\overline{as}$, d. i. die wahre Länge der Strecke $\overline{as}$, bestimmbar; ebenso ist der Winkel $\mathfrak{a}sa = 60^0$, als Winkel, welchen die Richtung der Sechsecksseite mit der Diagonale einschliesst, gegeben. Es sind somit die beiden Katheten $\overline{a\mathfrak{a}}$ und $\overline{\mathfrak{a}s}$ konstruierbar. Kennt man aber diese, so lässt sich auch das Dreieck $a_1\mathfrak{a}s$ konstruieren, denn letzteres ist gleichfalls bei $\mathfrak{a}$ rechtwinklig und

Figur 58.



Figur 59.



Erkl. 105. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Ist eine Gerade einer Ebene parallel zu einer andern Ebene, so ist sie parallel zur Schnittlinie beider Ebenen."

die Seite as gehört auch ihm an, während die Seite a_1a als die eine Kathete des Konstruktionsdreiecks des Punktes a sich ergibt. Damit ist aber zugleich die Spur der Sechsecksebene gegeben, welch letztere nun in die **Pr. Eb.** umgelegt werden kann. Man erhält folgende

Konstruktion: Ziehe, s. Fig. 58, $\overline{a_1a'}$ u. $\overline{b_1b'}$ senkrecht zu a_1b_1 und gleich den Abständen der Punkte a u. b von der **Pr. Eb.** so liefert die Verbindungslinie $a'b'$ auf a_1b_1 die Spur s von ab. Nunmehr konstruiere das rechtwinklige Dreieck $a'a's$ (dasselbe ist kongruent dem räumlichen Dreieck aas, siehe Fig. 57) mit $\overline{a's}$ als Hypotenuse und dem Winkel von 60^0, hierauf das rechtwinklige Dreieck $a'a_1a''$ (entsprechend dem Dreieck aa_1a, Figur 57) mit $\overline{a'a''} = \overline{a'a'}$ als Hypotenuse und $\overline{a'a_1}$ als Kathete, endlich das rechtwinklige Dreieck a_1sa''' (entsprechend dem Dreieck a_1sa der Figur 57) mit $\overline{a_1s}$ als Hypotenuse und $\overline{a_1a'''} = \overline{a_1a''}$ als Kathete. Die andere Kathete sa''' liefert die Spur S der Sechsecksebene. Bestimme jetzt die Umlegung a'' des Punktes a ($\overline{a'''a''} = \overline{a'a''}$), sowie jene $\overline{a''b''}$ der Sechseckssseite $\overline{ab}$ und zeichne über dieser das Sechseck $a''b''c''d''e''f''$. Die Projektion $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$, sowie die Abstände der Ecken a bis f von der **Pr. Eb.** bestimmen sich wie bisher.

Wieviele Lagen der Sechsecksebene sind möglich?

Auflösung b. Betrachtet man das Dreieck ast, siehe Figur 59, so ist in demselben bestimmbar die Seite $\overline{as}$ (die wahre Länge von $\overline{as}$), die Seite $\overline{at}$ (aus dem rechtwinkligen Dreieck aa_1t, von welchem $\overline{aa_1}$ als Kathete und der Winkel α gegeben sind), endlich ist der Winkel bei $a = 60^0$ bekannt, daher die Seite st konstruierbar.

Von dem Dreieck a_1st, der Projektion des Dreiecks ast sind nun die drei Seiten bekannt, nämlich $\overline{a_1s}$ aus dem rechtwinkligen Dreieck aa_1s, $\overline{a_1t}$ aus dem rechtwinkligen Dreieck aa_1t, endlich $\overline{st}$ aus dem Dreieck ast. Dadurch ist aber die Spur der Sechsecksebene gegeben. Das weitere bleibt wie bei Auflösung a. Man erhält folgende

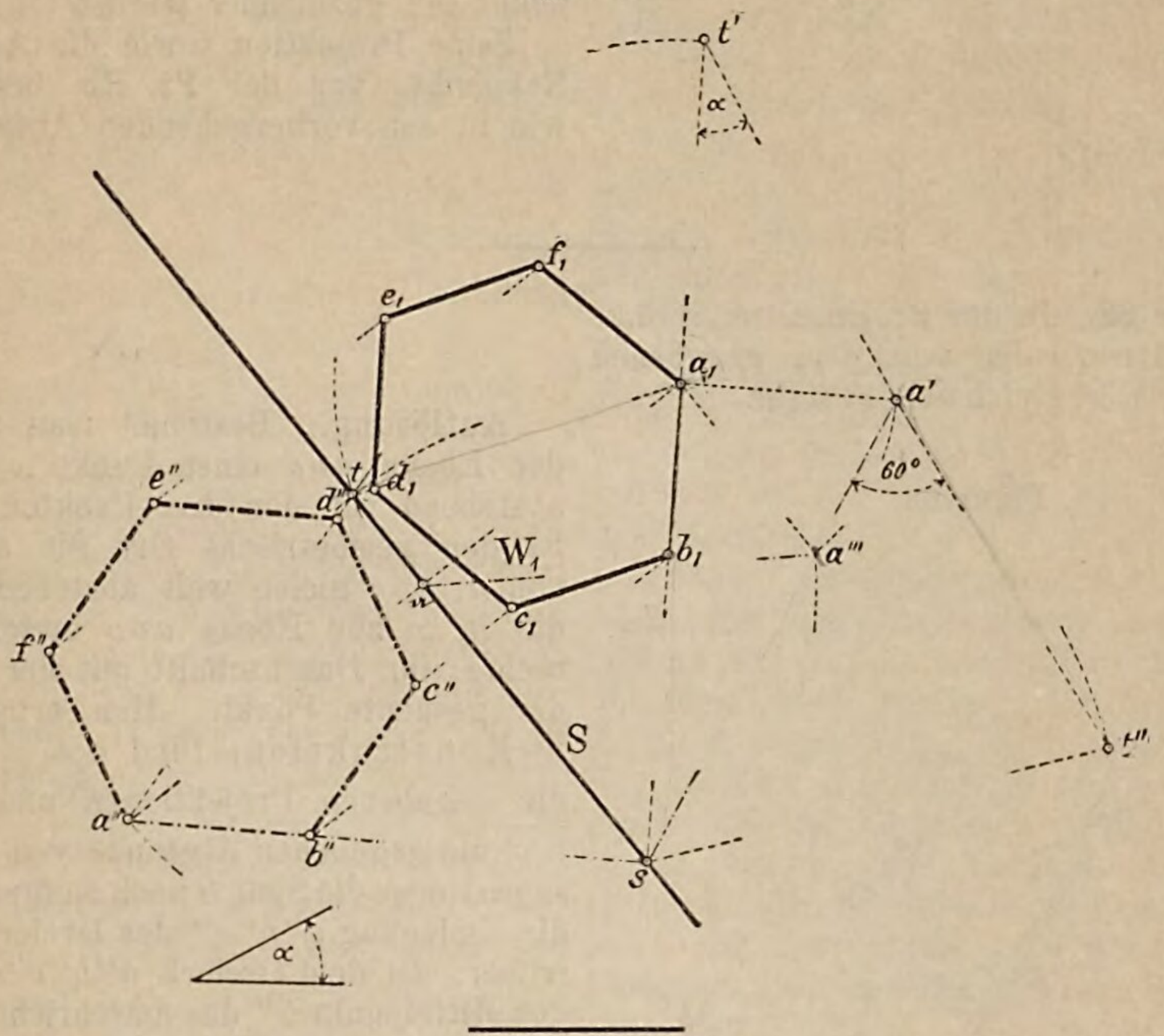
Konstruktion: Bestimme, siehe Fig. 60, s wie bei Auflösung a; ferner das rechtw. Dreieck $a'a_1t'$ mit $\overline{a'a_1}$ als Kathete und dem Winkel α (entsprechend dem Dreieck aa_1t, siehe Figur 59), endlich das Dreieck $a'st''$ mit der Seite $\overline{a't''} = \overline{a't'}$ und dem

Winkel $= 60^0$ (entsprechend dem Dreieck $a\,s\,t$ der Figur 59), beschreibe ferner um die Punkte s und a_1 als Mittelpunkte Kreise mit den Halbmessern $\overline{s\,t''}$ und $\overline{a_1\,t'}$, die sich in t durchschneiden. Die Verbindungslinie $s\,t$ ist die Spur S der Sechsecksebene.

Sowohl im Falle a. wie im Falle b. muss sich als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung die Strecke $\overline{s\,a''} = \overline{s\,a'}$ ergeben.

Wie viele Lagen der Sechsecksebene sind möglich?

Figur 60.



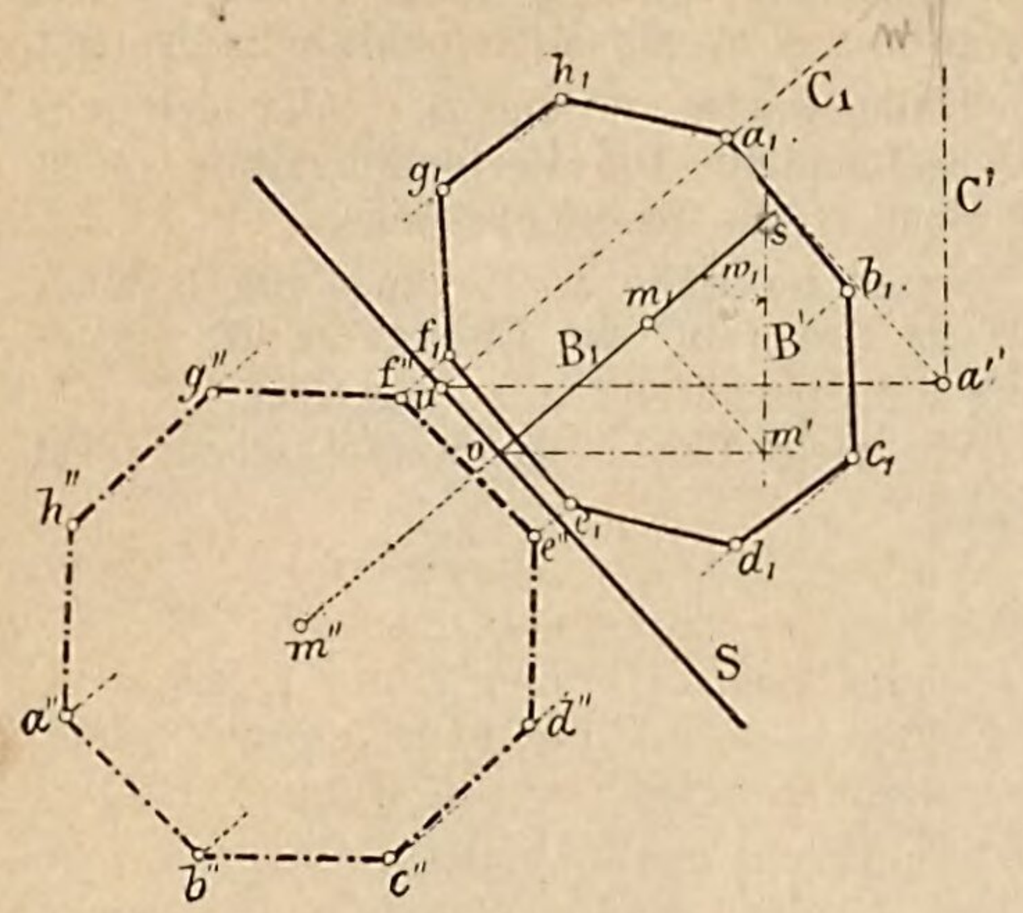
Aufgabe 21. Ein Punkt a ist als Ecke eines regelmässigen Achtecks, dessen Mittelpunkt auf einer Geraden B liegt und dessen Ebene auf B senkrecht stehen soll, gegeben.

Man soll die Projektion und wahre Gestalt, sowie die Abstände der Ecken des Achtecks von der **Pr. Eb.** zeichnen.

Auflösung. Man hat durch den Punkt a eine Ebene senkrecht zur Geraden B zu legen, ihren Schnitt mit B, sowie mit der **Pr. Eb.** zu bestimmen und die Achtecksebene in die **Pr. Eb.** umzulegen. Man erhält folgende

Konstruktion: Ziehe, siehe Figur 61, $\overline{a_1\,a'}$ senkrecht zu B_1 und gleich dem Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.**, ferner durch a_1 und a' die Parallelen C_1 und C' zu B_1 bezw. B', endlich durch a' die Senkrechte $a'u$ zu C', welche C_1 in u trifft. Durch u geht senkrecht zu B_1 die Spur S der Achtecksebene, denn die Gerade C ist

Figur 61.



eine Parallele zu B, siehe Erkl. 63, zu welcher die Ebene Sa senkrecht steht, siehe Erkl. 85.

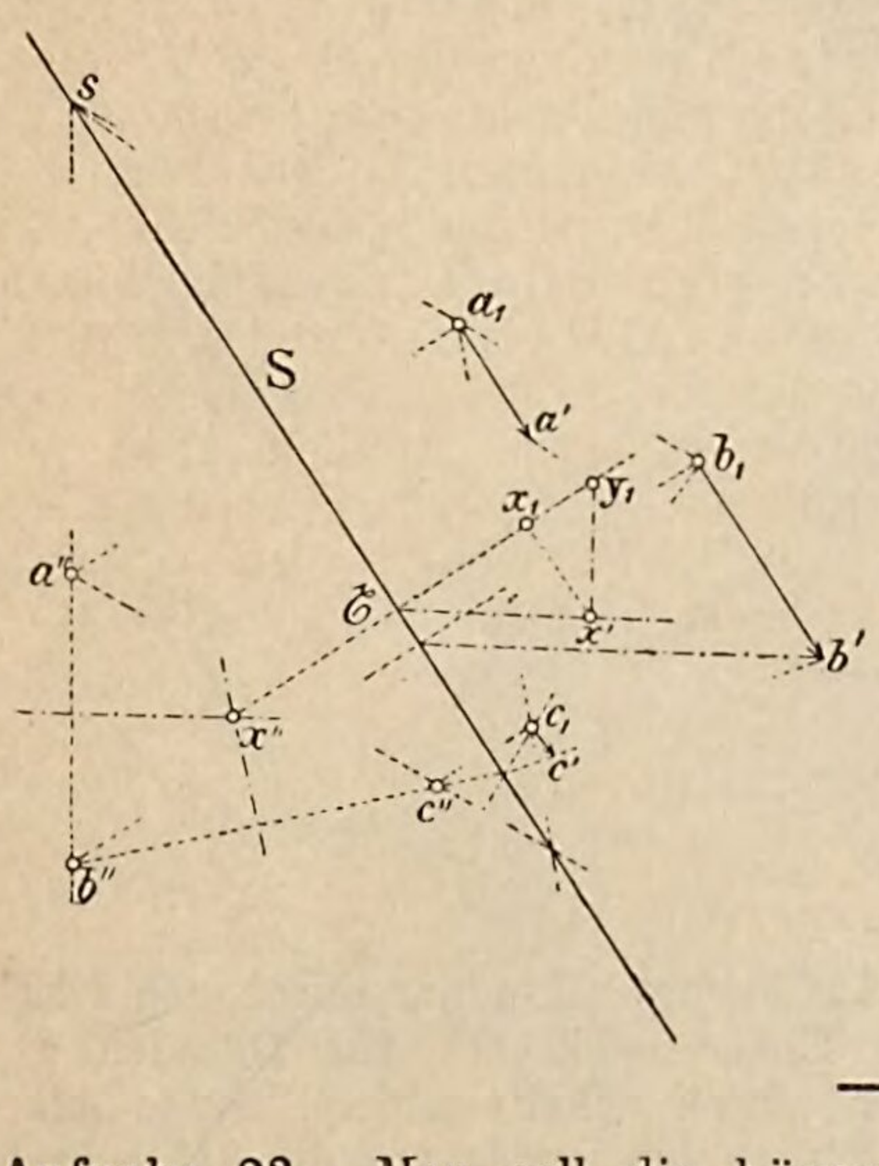
Der Fusspunkt m' der von dem Durchschnittspunkt v von B_1 und S auf B' gefällten Senkrechten gibt die Umlegung m' des Schnittpunktes m der Geraden B mit der Achtecksebene Sa, seine Projektion ist daher m_1.

Nunmehr kann die Achtecksebene samt den Punkten a und m um ihre Spur S in die **Pr. Eb.** umgelegt und hierauf das Achteck $a''\,b''\,c''\,d''\,e''\,f''\,g''\,h''$ mit dem Mittelpunkt m'' gezeichnet werden.

Seine Projektion sowie die Abstände der Eckpunkte von der **Pr. Eb.** bestimmt man wie in den vorhergehenden Aufgaben.

Aufgabe 22. In der **Pr. Eb.** ist ein Punkt zu konstruieren, der von drei gegebenen Punkten a, b, c gleichweit absteht.

Figur 62.



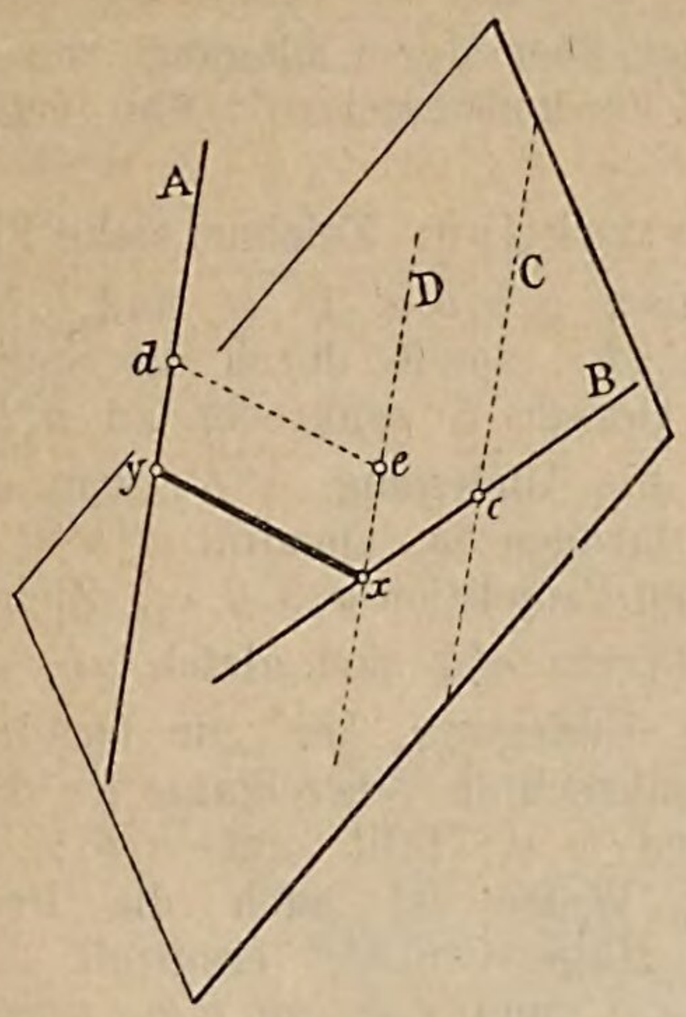
Auflösung. Bestimmt man zunächst in der Ebene abc einen Punkt x gleich weit abstehend von den drei Punkten a, b, c, so ist der geometrische Ort für alle übrigen von a, b, c gleich weit abstehenden Punkte die in x zur Ebene abc errichtete Senkrechte; ihr Durchschnitt mit der **Pr. Eb.** ist der gesuchte Punkt. Man erhält folgende

Konstruktion: Sind $a_1 b_1 c_1$, s. Fig. 62, die gegebenen Projektionen und $\overline{a_1 a'}$, $\overline{b_1 b'}$, $\overline{c_1 c'}$ die gegebenen Abstände von der **Pr. Eb.**, so bestimme die Spur S nach Aufgabe 11, sowie die Umlegung $a''\,b''\,c''$ des Dreiecks abc wie früher. In dem Dreieck $a''\,b''\,c''$ konstruiere den Mittelpunkt x'' des umschriebenen Kreises und zeichne das Konstruktionsdreieck $\mathfrak{x}x'x_1$ des Punktes x. Die in x' auf $\mathfrak{x}x'$ errichtete Senkrechte trifft $\mathfrak{x}x_1$ in dem gesuchten Punkt y_1, der von allen drei Punkten a, b, c gleich weit absteht.

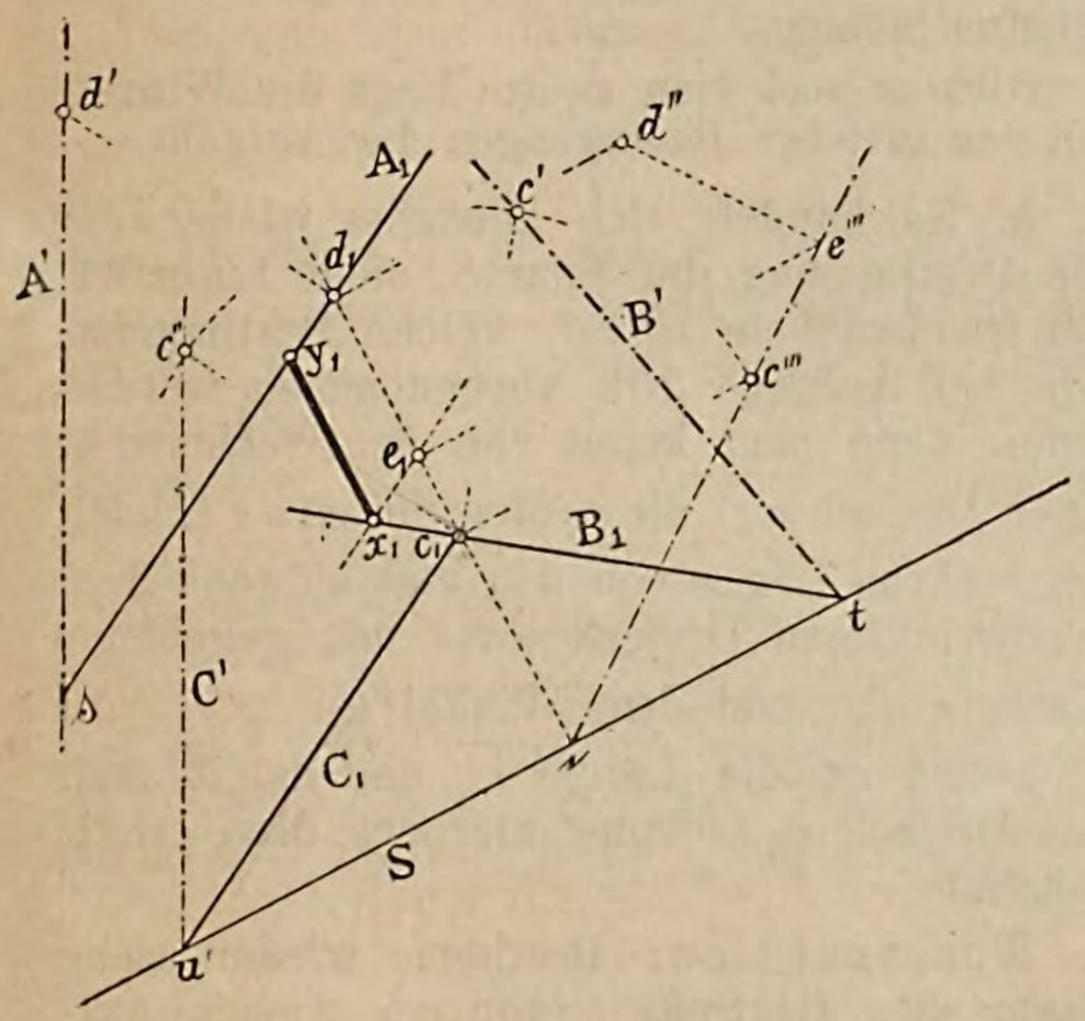
Aufgabe 23. Man soll die kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden A und B, sowie jene Gerade konstruieren, welche A und B senkrecht schneidet.

Auflösung. Sind A und B, siehe Fig. 63, die beiden windschiefen Geraden, so kann man sich auf B einen beliebigen Punkt c gewählt und durch ihn eine Parallele zu A gezogen denken. Es wird dann die Gerade A parallel zur Ebene BC sein, siehe Erkl. 34, und ihre Entfernung von dieser Ebene ist

Figur 63.



Figur 64.



zugleich die kürzeste Entfernung der beiden windschiefen Geraden A und B.

Will man aber jene Linie, welche A und B senkrecht schneidet, konstruieren, so hat man nur von einem beliebig auf A gewählten Punkt d eine Senkrechte de auf die Ebene BC zu fällen, und durch ihren Fusspunkt e eine Parallele D zu A zu zeichnen; durch deren Schnittpunkt x mit B geht die gesuchte kürzeste Senkrechte xy parallel zu de. Man erhält folgende

Konstruktion: Durch $A_1 s A'$, siehe Figur 64, ist die eine, durch $B_1 t B'$, die andere der beiden Geraden A und B gegeben.

Nehme c_1 auf B_1 beliebig an und ziehe durch c_1 die Gerade C_1 parallel B_1, mache ferner $\overline{c_1 c''}$ senkrecht zu C_1 und gleich $\overline{c_1 c'}$, ziehe endlich durch c'' die Parallele C' zu A', welche C_1 in u schneidet. Die Verbindungslinie u gibt die Spur S der Ebene BC.

Zeichne das Konstruktionsdreieck $c_1 \, c \, c'''$ des Punktes c und wähle die Projektion d_1 des Punktes d im Schnitt der verlängerten $c\,c_1$ mit A_1, bestimme den Abstand $\overline{d_1 d'}$ des Punktes d von der **Pr. Eb.** und mache $\overline{d_1 d''}$ parallel zu S und $= \overline{d_1 d'}$, so gibt die von d''' auf $c\,e'''$ gefällte Senkrechte $d'''e'''$ die Umlegung der vom Punkte d im Raume auf die Ebene BC gefällten Senkrechten de an und ihre Länge ist gleich der Strecke $d''e'''$, d. h. gleich dem kürzesten Abstand der beiden Geraden A und B. Aus e''' ergibt sich die Projektion e_1 und die durch e_1 zu A_1 gezogene Parallele trifft B_1 in einem Punkte x_1, durch welchen senkrecht zu S die Projektion $x_1 y_1$ jener Linie xy hindurchgeht, welche A und B senkrecht schneidet.

Aufgabe 24. Zwei Punkte a und b sind als die Endpunkte der Kante eines Würfels gegeben; eine zweite durch a gehende Würfelkante soll

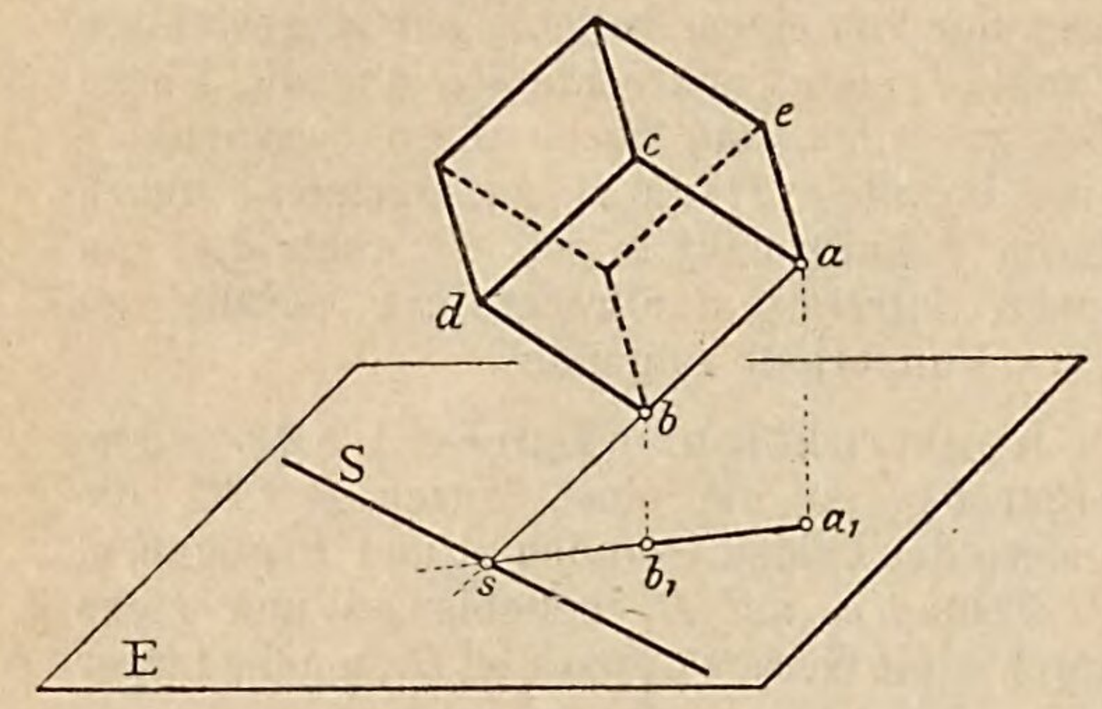
a) zur **Pr. Eb.** parallel sein,

b) mit derselben einen gegebenen Winkel α einschliessen.

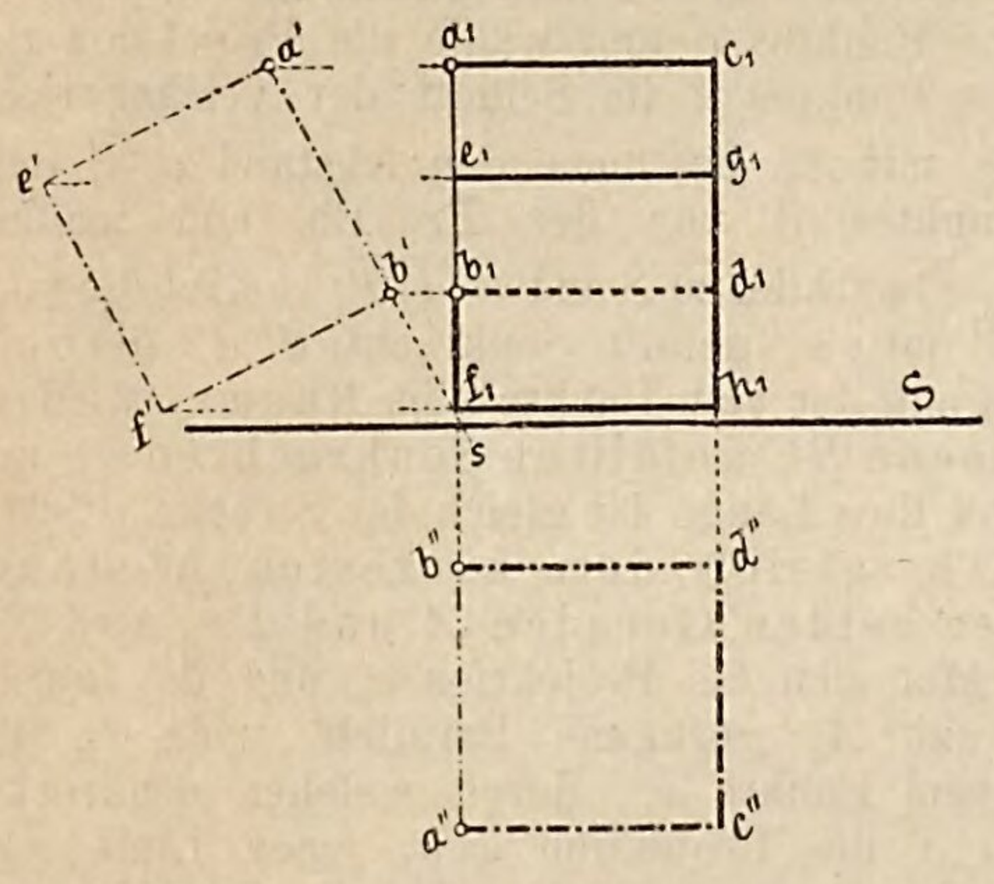
Man soll die Projektion des Würfels zeichnen.

Auflösung a. Läuft die Kante ac, siehe Figur 65, parallel zur **Pr. Eb.**, so ist auch die Spur S der Quadratebene $abcd$ parallel zu ac und da der Winkel bac ein Rechter ist, so steht ab und damit auch $a_1 b_1$ senkrecht zu S. Man hat daher nur durch die Spur s von ab die Gerade S senkrecht zu

Figur 65.



Figur 66.



Figur 67.

$a_1 b_1$ zu ziehen, die Quadratebene $abcd$ samt der Geraden ab in die **Pr. Eb.** umzulegen und über der Umlegung von $\overline{ab}$ das Quadrat zu konstruieren. Man erhält folgende

Konstruktion: Zeichne, siehe Figur 66, das Trapez $a_1 b_1 b' a'$ ($\overline{a_1 a'}$ und $b_1 b'$ senkrecht zu ab), sowie durch die Spur s von ab die Gerade S senkrecht zu $a_1 b_1$, konstruiere die Umlegung $\overline{a'' b''}$ von $\overline{ab}$ und zeichne darüber das Quadrat $a'' b'' d'' c''$, sowie dessen Projektion $a_1 b_1 d_1 c_1$. Ziehe ferner $\overline{a' e'}$ senkrecht $a' b'$ und gleich $\overline{ab}$, so stellt $\overline{a' e'}$ die Umlegung der zur Quadratebene $abdc$ senkrechten Würfelkante ae dar; ihre Projektion $a_1 e_1$ fällt auf $a_1 b_1$; in der gleichen Weise ist auch die Projektion $b_1 f_1$ mit Hülfe von $b' f'$ ermittelt. Die Parallelen $e_1 g_1$ und $f_1 h_1$ zu $a_1 c_1$ vervollständigen die Projektion des ganzen Würfels.

Wie hätte man die Projektion des Würfels auch ohne Benützung der Umlegung $a'' b'' d'' c''$ erhalten können?

Gibt es noch eine zweite Lage des Würfels bei den gleichen Bedingungen der Aufgabe?

b. Es handelt sich zunächst wieder um die Bestimmung der Spur S, siehe Figur 67, der Quadratebene $abcd$, welche Bestimmung wie bei Aufgabe 20b vorgenommen werden kann, denn man kennt von dem rechtwinkligen Dreieck ast die beiden Seiten $\overline{as}$ (gleich der wahren Länge von $\overline{as}$) und $\overline{at}$ (aus dem rechtwinkligen Dreieck $aa_1 t$ mit gegebener Kathete $\overline{aa_1}$ und dem Winkel α).

Somit ist die Länge $\overline{st}$ und damit auch das Dreieck $a_1 st$ konstruierbar. Man erhält folgende

Konstruktion: Bestimme wieder, siehe Figur 68, die Spur s von ab wie in Auflösung a, zeichne das rechtwinklige Dreieck $a' a_1 t'$ mit dem Winkel α, sowie das rechtwinklige Dreieck $a' s t''$ mit der Kathete $\overline{a' t''} = \overline{a' t'}$. Die um a_1 und s mit den Halbmessern $\overline{a_1 t'}$ und $\overline{st''}$ beschriebenen Kreise liefern den Punkt t der Spur S und damit diese selbst.

Nunmehr kann die Umlegung $\overline{a''' b'''}$, sowie über letzterer Linie das Quadrat $a''' b''' c''' d'''$ und dessen Projektion $a_1 b_1 c_1 d_1$ konstruiert werden.

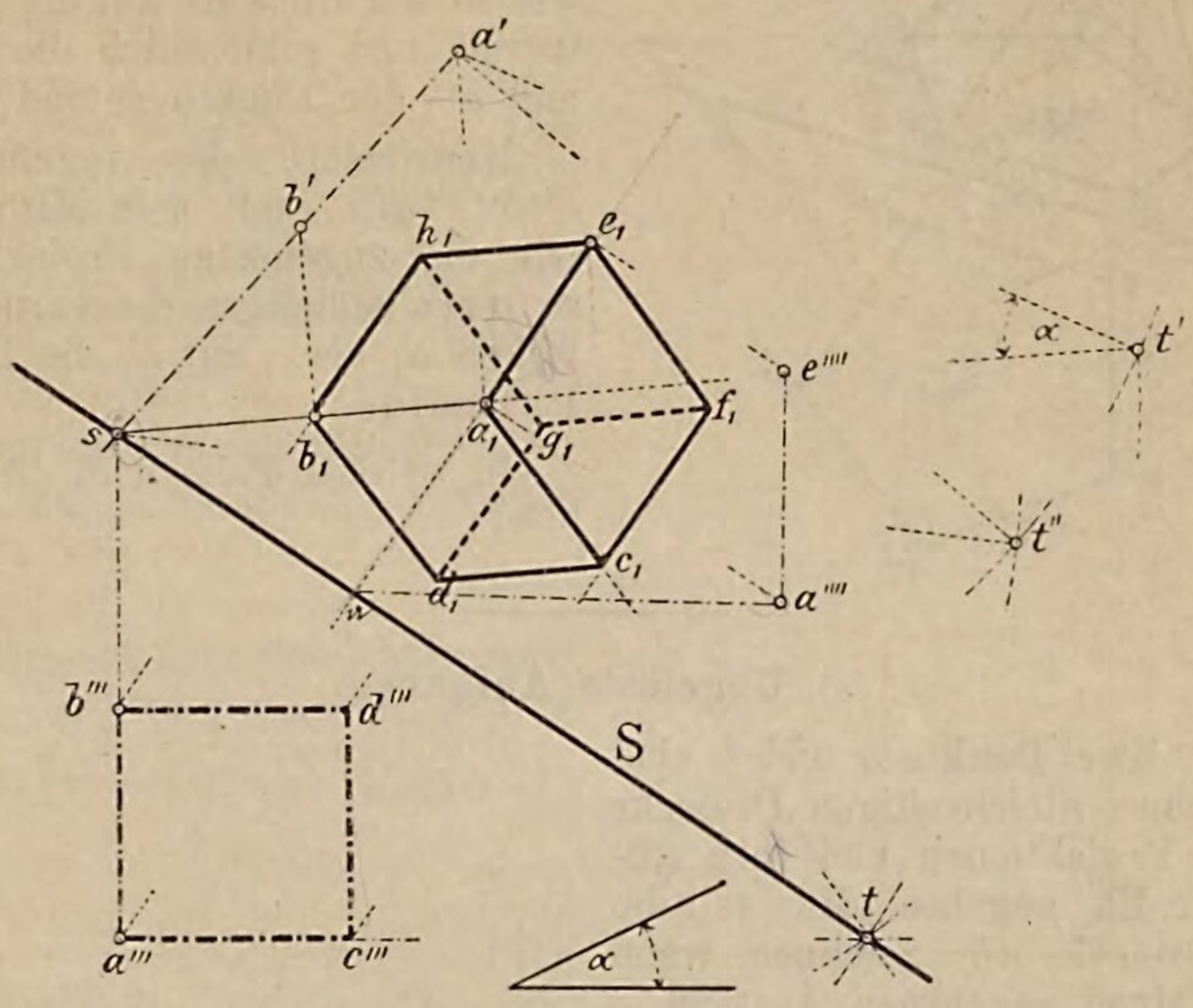
Bestimme schliesslich die Projektion $\overline{a_1 e_1}$ der dritten durch a gehenden Würfelkante $\overline{ae}$, mittels der durch a'''' zu aa'''' gezogenen Senkrechten $\overline{a'''' e''''} = \overline{a''' b'''}$.

Erkl. 106. Die mit unterbrochenen Strichen gezeichneten Würfelkanten bezeichnen die für das Auge des Beobachters unsichtbaren Würfelkanten.

Die übrigen Eckpunkte der Würfelprojektion ergeben sich durch Ziehen von Parallelen durch die bereits vorhandenen Eckpunkte zu den drei Richtungen $a_1 b_1$, $a_1 c_1$ und $a_1 e_1$.

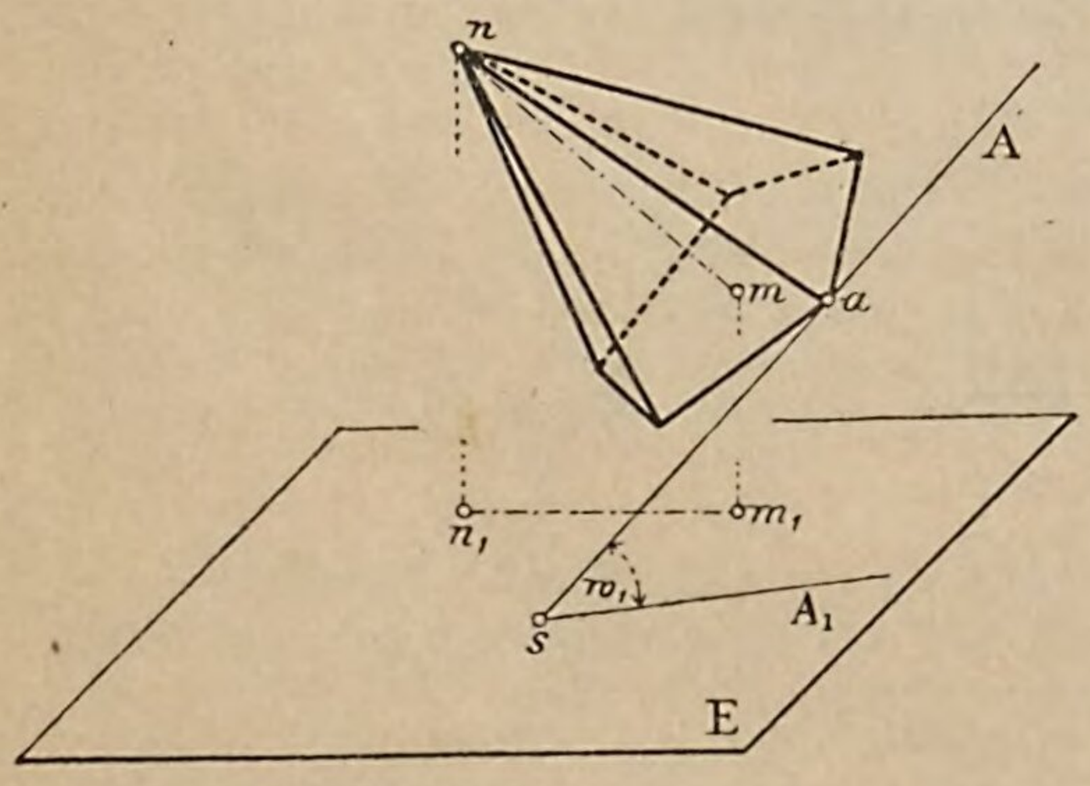
Wie viele Lagen des Würfels sind möglich?

Figur 68.



Aufgabe 25. Zwei Punkte m und n sind als Mittelpunkt der Grundfläche bezw. Spitze einer regelmässigen fünfseitigen Pyramide gegeben. Eine Ecke der Grundfläche soll auf einer gegebenen Geraden A liegen. Die Projektion der Pyramide ist zu zeichnen.

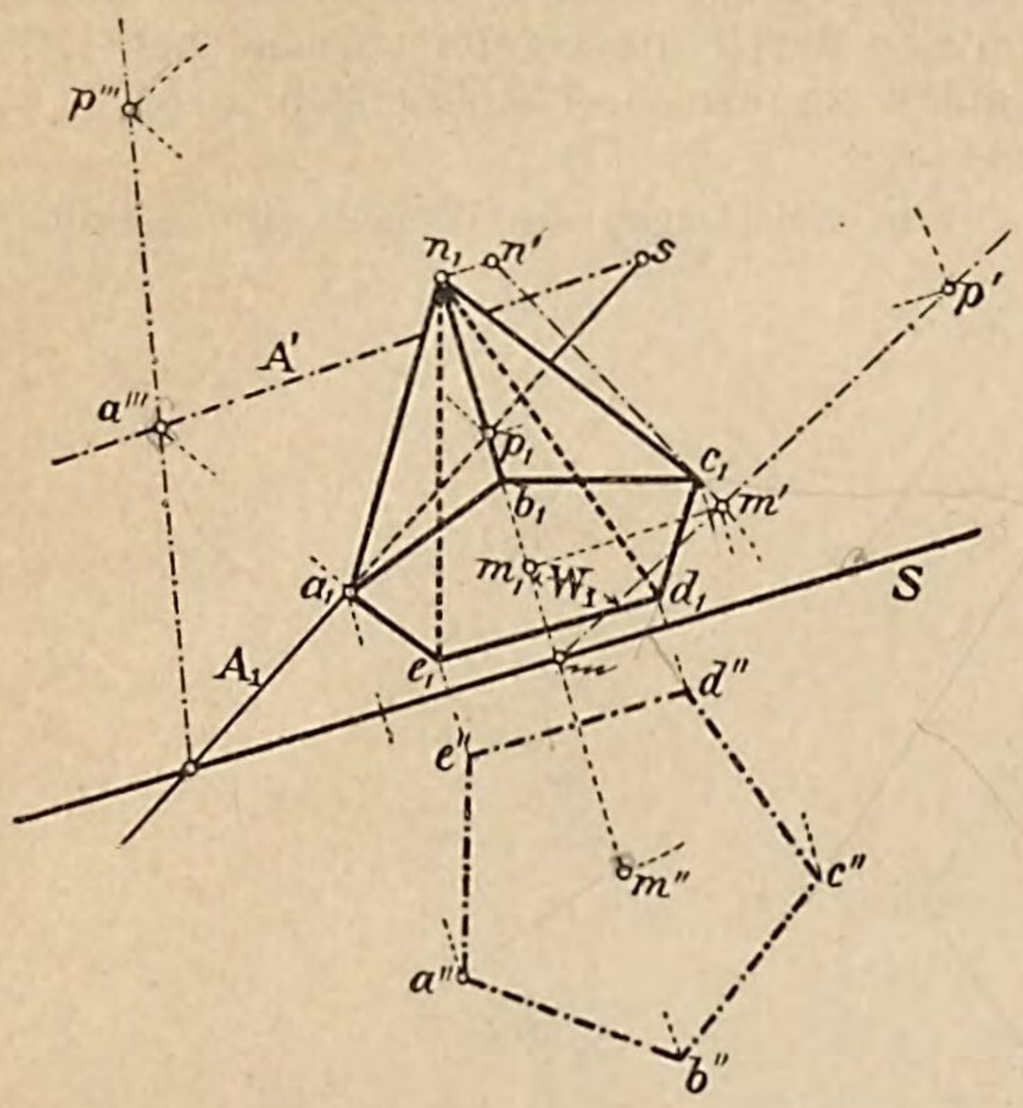
Figur 69.



Auflösung. Die Ebene der Grundfläche ist die durch den Punkt m, siehe Figur 69, senkrecht zur Geraden mn geführte Ebene; ihre Durchschnittslinie mit der **Pr. Eb.** gibt die Spur S der Fünfecksebene, ihr Durchschnittspunkt mit der Geraden A die Ecke a der Grundfläche der Pyramide. Es kann nunmehr die Grundflächenebene in die **Pr. Eb.** umgelegt, die Umlegung von m und a bestimmt und hieraus das regelmässige Fünfeck mit dem Mittelpunkt m und der Ecke a gezeichnet werden. Aus der Umlegung bestimmt sich aber auch die Projektion des Fünfecks. Die Verbindungslinien der Eckpunkte der letzteren mit n_1 liefern die Projektionen der Seitenkanten der Pyramide. Man erhält folgende

Konstruktion: Zeichne zunächst, siehe Figur 70, das Trapez $m_1 n_1 n' m'$, so dass $\overline{m' n'}$ die Umlegung der Geraden mn darstellt, und

Figur 70.



führe durch m' die Senkrechte $m'\mathfrak{m}$ zu $m'n'$, so geht durch deren Schnittpunkt $\mathfrak{m}$ mit $m_1 n_1$ senkrecht zu $m_1 n_1$ die Spur S der Fünfecksebene; zugleich ist das Dreieck $\mathfrak{m} m' m_1$ das Konstruktionsdreieck des Punktes m und der Winkel W_1 der Neigungswinkel der Fünfecksebene mit der **Pr. Eb.** Ist ferner durch $A s A'$ die gegebene Gerade dargestellt, so bestimme ihren Schnittpunkt a mit der Ebene $S W_1$, so, wie in der Antwort auf die Frage 31 gezeigt wurde, und schliesslich die Umlegungen m'' und a'' der Punkte m und a.

Konstruiere das regelmässige Fünfeck $a''b''c''d''e''$ mit dem Mittelpunkte m'', sowie die zugehörige Projektion $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$, so vervollständigen die Verbindungslinien der Ecken a_1 bis e_1 mit n_1 die Projektion der Pyramide.

In welchem Falle wird die Aufgabe unmöglich?

ε) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 26. Zwei Punkte a und b sind als die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks abc durch ihre Projektionen und ihre Abstände von der **Pr. Eb.** gegeben. Man soll die Projektion des Dreiecks abc zeichnen, wenn die dritte Ecke einen gegebenen Abstand p von der **Pr. Eb.** haben soll.

Aufgabe 27. Von einem ebenen Viereck $abcd$ kennt man seine Projektion $a_1 b_1 c_1 d_1$, ausserdem die Abstände der Ecken a und b, sowie des Diagonalschnittpunktes e von der **Pr. Eb.** Man soll die wahre Gestalt der Viereckseben, sowie die Abstände der Ecken c und d von der **Pr. Eb.** zeichnen.

Aufgabe 28. Von einem ebenen Fünfeck $abcde$ sind die Projektionen der Punkte $abcd$, sowie der Abstand der Ecke d von der **Pr. Eb.** gegeben; ausserdem kennt man die Spuren s und t der Fünfecksseiten $\overline{cd}$ und $\overline{ed}$. Man soll die wahre Gestalt des Fünfecks, sowie den Abstand seiner übrigen Ecken von der **Pr. Eb.** zeichnen.

Aufgabe 29. Ein ebenes Viereck $abcd$ hat als Projektion ein Quadrat $a_1 b_1 c_1 d_1$ mit einer Seitenlänge von 40 mm; die Spur der Viereckseben fällt mit der Diagonale $\overline{b_1 d_1}$ zusammen, die zweite Diagonale bildet mit der **Pr. Eb.** einen Winkel von 30^0. Man soll die wahre Gestalt des Vierecks, sowie die Abstände der Ecken a und c zeichnen.

Aufgabe 30. Ein ebenes Sechseck $abcdef$ hat als Projektion ein regelmässiges Sechseck $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ mit einer Seitenlänge gleich 30 mm. Die Diagonalen $\overline{ad}$ und $\overline{be}$ schliessen mit der **Pr. Eb.** einen Winkel von 30^0 bezw. 45^0 ein; der Abstand des Diagonalschnittpunktes von der **Pr. Eb.** ist 25 mm. Man soll die wahre Gestalt, sowie die Abstände der Eckpunkte des Sechsecks von der **Pr. Eb.** zeichnen.

Aufgabe 31. Drei Punkte a, b, c sind durch ihre Projektionen und ihre Abstände von der **Pr. Eb.** gegeben. Man soll:

a) den Mittelpunkt des dem Dreieck umund jenen des einbeschriebenen Kreises,

b) den Höhenschnittpunkt,

c) den Schwerpunkt des Dreiecks

durch Projektion und Abstand von der **Pr. Eb.** ermitteln.

Aufgabe 32. Man soll die wahre Entfernung:

a) eines Punktes a von einer Geraden B,

b) zweier parallelen Geraden C und D

konstruieren.

Aufgabe 33. Auf einer Geraden A einen Punkt zu konstruieren, welcher von einem gegebenen Punkt b eine Entfernung $= p$ hat.

Wie viele Punkte der verlangten Art gibt es und wann wird die Aufgabe unmöglich?

Aufgabe 34. Zwei Punkte a und b sind als Endpunkte

a) einer Seite,

b) einer Diagonale

eines Rechtecks gegeben, von dem eine Ecke c auf einer Geraden D liegen soll. Man soll die Projektion des Rechtecks zeichnen.

Aufgabe 35. Zwei Punkte a und b sind als die Endpunkte einer Diagonale eines Rhombus gegeben. Ein Endpunkt c der zweiten Diagonale soll auf einer Geraden D liegen. Man soll die Projektion des Rhombus zeichnen.

Aufgabe 36. Ein Punkt m ist als Mittelpunkt eines regelmässigen Achtecks gegeben. Zwei aufeinander folgende Hauptdiagonalen sollen mit der **Pr. Eb.** gegebene Winkel 30^0 und 60^0 einschliessen. Man soll die Projektion des Achtecks zeichnen.

Aufgabe 37. Ein Punkt m ist als Mittelpunkt eines regelmässigen Secksecks gegeben, von welchem eine Seite in eine gegebene Gerade A fällt. Man soll die Projektion des Sechsecks zeichnen.

Aufgabe 38. Eine Gerade $\overline{ab}$ ist als Kante eines Würfels gegeben; eine durch $\overline{ab}$ gehende Würfelebene soll mit der **Pr. Eb.** einen Winkel von 45^0 einschliessen. Man soll die Projektion des Würfels zeichnen.

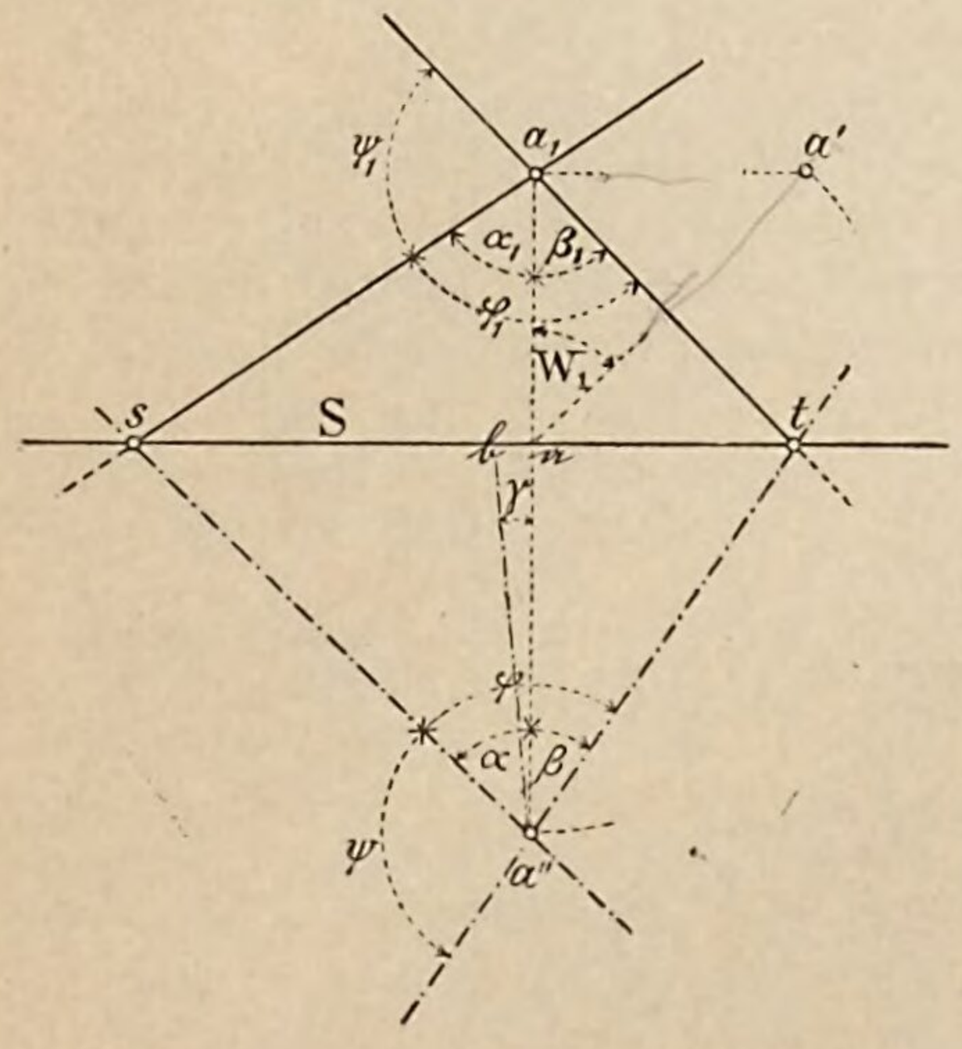
Aufgabe 39. Eine Gerade $\overline{ab}$ ist als Seitenkante eines Parallelepipedons mit quadratischer Grundfläche gegeben. Der Endpunkt der durch a gehenden Quadratdiagonale soll auf einer gegebenen Geraden A liegen. Man soll die Projektion des Parallelepipedons zeichnen.

Aufgabe 40. Ein Punkt m ist als Mittelpunkt, ein Punkt a als Eckpunkt der Grundfläche einer regelmässigen sechsseitigen Pyramide deren Höhe doppelt so gross sein soll als eine Grundkante, gegeben. Die Grundfläche soll mit der **Pr. Eb.** einen Winkel von 30^0 einschliessen. Man soll die Projektion der Pyramide zeichnen.

ζ) Ueber den Zusammenhang zwischen der wahren Grösse eines Winkels und der Grösse seiner Projektion.

Frage 35. Welche Lagen kann ein in einer gegebenen Ebene liegender Winkel zu der durch seinen Scheitel gezogenen Neigungslinie der Ebene haben?

Figur 71.



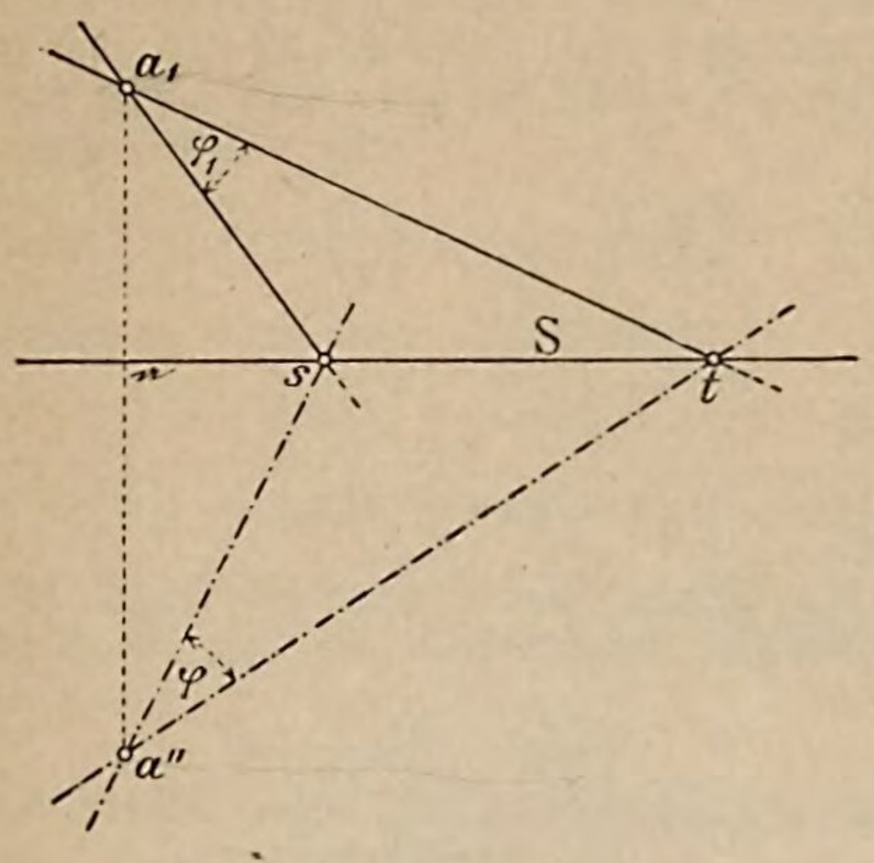
Antwort. Bezüglich der Lage eines Winkels in einer gegebenen Ebene Sa lassen sich zwei Hauptfälle unterscheiden. Es kann nämlich die durch den Scheitel a des Winkels gezogene Neigungslinie der Ebene die Spur S der letzteren in einem Puukte a schneiden, der

a. zwischen den Spuren s und t, siehe Figur 71, der Schenkel des Winkels liegt, oder der

b. auf der Verlängerung der durch die Spuren s und t gebildeten Strecke, siehe Figur 72, sich befindet.

Frage 36. In welcher Weise ist die Grösse der Projektion des Winkels von den in der Antwort auf die Frage 35 genannten Lagen abhängig?

Figur 72.



Erkl. 107. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Liegen die Spuren der allenfalls über den Scheitel hinaus verlängerten Schenkel eines Winkels auf **verschiedenen** Seiten der Spur der durch den Scheitel des Winkels gezogenen Neigungslinie seiner Ebene, so ist die Projektion des Winkels stets **grösser** als der Winkel selbst, wenn die genannte Neigungslinie in den Winkelraum des Winkels oder dessen Scheitelwinkel fällt, dagegen stets **kleiner** als der Winkel, wenn jene Neigungslinie im Nebenwinkelraum des Winkels liegt."

Ist insbesondere der Winkel ein Rechter, so ist im ersten Falle seine Projektion stets ein stumpfer, im zweiten Falle aber stets ein spitzer Winkel.

Erkl. 107a. Liegt eine der Spuren der Winkelschenkel in unendlicher Ferne, d. h. läuft ein Winkelschenkel parallel zur **Pr. Eb.,** so ist die Projektion des Winkels grösser oder kleiner als der Winkel selbst, je nachdem letzterer spitz oder stumpf ist.

Erkl. 108. Fällt dagegen eine der Spuren der Winkelschenkel mit der Spur der eben genannten Neigungslinie zusammen, d. h. ist einer der Schenkel des Winkels eine Neigungslinie seiner Ebene, so ist die Projektion des Winkels kleiner oder grösser als der Winkel selbst, je nach dem der Winkel stumpf oder spitz ist.

* **Erkl. 109.** Der Zusammenhang zwischen der wahren Grösse eines Winkels und der Grösse seiner Projektion lässt sich auf tri-

Antwort. Hat der Winkel die in der Antwort auf Frage 35 unter a genannte Lage, so ergibt sich folgendes: Ist die Ebene Sa samt den den Winkel φ bildenden Geraden in die **Pr. Eb.**, siehe Figur 71, umgelegt, wobei der Scheitel a nach a'' gelangt ist, so wird die Projektion φ_1 des Winkels φ durch die Linie $a_1 a''$ in die beiden Winkel α_1 und β_1, die Umlegung φ aber in die beiden Winkel α und β zerlegt.

Nun ist, da die Strecke $\overline{a_1 a}$ stets kleiner sein muss als die Strecke $\overline{a'' a}$, sowohl der Winkel α_1 wie auch β_1 stets grösser als der Winkel α bezw. β, woraus folgt, dass auch: $\sphericalangle\alpha_1 + \sphericalangle\beta_1$ grösser sein muss als $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta$; d. h. es ist $\sphericalangle\varphi_1$ stets grösser als $\sphericalangle\varphi$.

Die eben angegebene Beziehung findet aber nur statt, wenn die Punkte s und t die Spuren der Schenkel des Winkels φ bezw. seines Scheitelwinkels darstellen. Würde aber, wie z. B. bei dem Winkel ψ_1 ein Schenkel über den Scheitel des Winkels bis zu seinem Schnittpunkt t mit der **Pr. Eb.** verlängert werden müssen, so dass die Projektion der Neigungslinie durch den Scheitel a_1 in den Nebenwinkelraum von ψ_1 fiele, so wäre, weil $\varphi_1 > \varphi$ ist, umgekehrt $\psi_1 < \psi$.

Hat der Winkel die in der Antwort auf die Frage 35 unter b. genannte Lage, siehe Figur 72, so werden die Winkel φ_1 und φ im allgemeinen eine verschiedene Grösse haben und es lässt sich unmittelbar nicht erkennen, welcher von beiden Winkeln der grössere ist.

gonometrischem Wege leicht wie folgt feststellen.

Aus der Trigonometrie ist bekannt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis der einem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden, die trigonometrische Tangente des Winkels (in Zeichen: tg, lies: tangens) genannt wird.

Zieht man nun, siehe Figur 71, die Linie $a''\mathfrak{b}$ als Halbierlinie des Winkels φ, so bildet diese mit der Linie $a''\mathfrak{a}$ den Winkel γ und es ist aus der Figur ersichtlich, dass:

$$\sphericalangle \alpha = \frac{\varphi}{2} + \gamma \text{ und}$$

$$\sphericalangle \beta = \frac{\varphi}{2} - \gamma \text{ ist.}$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken $a_1\mathfrak{a}s$, $a''\mathfrak{a}s$, $a_1\mathfrak{a}t$ und $a''\mathfrak{a}t$ ergeben sich nach der obigen Erklärung folgende Beziehungen:

Es ist:

$$7) \ldots \overline{s\mathfrak{a}} = \overline{a_1\mathfrak{a}} \times \operatorname{tg} \alpha_1 = \overline{a''\mathfrak{a}} \times \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \gamma\right)$$

$$8) \ldots \overline{t\mathfrak{a}} = \overline{a_1\mathfrak{a}} \times \operatorname{tg} \beta_1 = \overline{a''\mathfrak{a}} \times \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \gamma\right)$$

Aus Gleichung 7) folgt aber:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\overline{a''\mathfrak{a}}}{\overline{a_1\mathfrak{a}}} \times \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \gamma\right) \text{ oder}$$

$$\text{da } \frac{\overline{a''\mathfrak{a}}}{\overline{a_1\mathfrak{a}}} = \cos W_1 \text{ ist,}$$

$$9) \ldots \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \gamma\right)}{\cos W_1}$$

Entsprechend erhielte man:

$$10) \ldots \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \gamma\right)}{\cos W_1}$$

* **Erkl. 110.** In der Goniometrie, siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre), wird die Richtigkeit folgender Beziehungen bewiesen.

Bezeichnen α und β die Grössen irgend zweier Winkel, so hat man:

$$11) \ldots \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$12) \ldots \begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \times \cos\beta \pm \cos\alpha \times \sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \times \cos\beta \mp \sin\alpha \times \sin\beta \end{cases}$$

$$13) \ldots \cos 2\alpha = 2 \times \cos^2 \alpha - 1$$

$$14) \ldots \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

$$15) \ldots \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \times \operatorname{tg}\beta}$$

* **Erkl. 111.** Mit Bezug auf das in Erkl. 110 Gesagte, erhält man, da:

$$\sphericalangle \varphi_1 = \sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle \beta_1 \text{ ist,}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \beta_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\beta_1}{1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \times \operatorname{tg}\beta_1}$$

und in Rücksicht auf die Gleichungen 9 und 10:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\gamma\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\gamma\right)\right]\times\frac{1}{\cos W_1}}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\gamma\right)\times\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\gamma\right)}$$
$$\cos^2 W_1$$

In dieser Gleichung ist der Zusammenhang zwischen den Winkeln φ und φ_1 ausgedrückt; es lässt sich dieselbe jedoch noch einfacher gestalten, wenn man zunächst Zähler und Nenner der rechten Seite mit:

$$2\times\cos^2 W_1\times\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\gamma\right)\times\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\gamma\right)$$

multipliziert, denn man erhält dann:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2\times\cos W_1\times\left[\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\gamma\right)\times\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\gamma\right)+\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\gamma\right)\times\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\gamma\right)\right]}{2\times\cos^2 W_1\times\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\gamma\right)\times\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\gamma\right)-2\times\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\gamma\right)\times\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\gamma\right)}$$

Der Zähler der rechten Seite vereinfacht sich in Rücksicht auf die Beziehungen 12) auf folgende Form:

$$2\times\cos W_1\times\sin\varphi$$

Mit Zuhilfenahme der Beziehungen 11) bis 13) nimmt der Nenner die Form an:

$$\cos\varphi\times(1+\cos^2 W)-\cos 2\gamma\times\sin^2 W_1$$

so dass schliesslich die obige Gleichung übergeht in folgende:

$$16)\ \ldots\ \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2\times\cos W_1\times\sin\varphi}{\cos\varphi\times(1+\cos^2 W_1)-\cos 2\gamma\times\sin^2 W_1}$$

Aus vorstehender Gleichung erhellt, dass, wenn man sich den Winkel φ im Raume um den Scheitel a in seiner Ebene gedreht denkt, die Grösse der Projektion des Winkels φ fortwährend sich ändert, desgleichen auch die Grösse des Winkels γ, welchen die Halbierlinie von φ mit der Neigungslinie des Scheitels einschliesst. Der Winkel φ_1 wird am grössten sein, wenn der Nenner des Bruches der Gleichung 16) seinen kleinsten Wert annimmt, d. h. wenn γ gleich Null ist. Dann fällt aber die Halbierlinie von φ mit der Neigungslinie zusammen.

Umgekehrt wird φ_1 seinen kleinsten Wert erhalten, wenn γ am grössten, d. h. gleich 90^0 ist, denn in diesem Falle ist:

$$\cos 2\gamma = -1$$

Vorstehendes lässt sich in die folgenden Sätze zusammenfassen:

„Ein Winkel projiziert sich stets **am grössten,** wenn die durch seinen Scheitel gezogene Neigungslinie seiner Ebene mit der **inneren Halbierlinie** des Winkels zusammenfällt, dagegen am **kleinsten,** wenn jene Neigungslinie mit der **äusseren Halbierlinie** sich deckt."

Frage 37. Welche praktische Anwendung kann man von dem in Erkl. 109 bis 111 Gesagten machen?

Antwort. Mit Hilfe des in Erkl. 109 bis 111 Gesagten lässt sich in einer gegebenen Ebene ein Winkel φ von bestimmter

Erkl. 112. Bei der in der Antwort auf die Frage 37 bezeichneten Aufgabe kann man drei Fälle unterscheiden, man kann nämlich den gegebenen Winkel φ so gegen die **Pr. Eb.** legen, dass seine Projektion:

a. eine vorgeschriebene Grösse φ_1,

b. eine Grösse $= 90^0$,

c. eine Grösse $= \varphi$

besitzt.

In den Fällen a. und b. besteht die Lösung darin, dass man aus der Gleichung 16) den Wert von $\cos 2\gamma$ und aus letzterem jenen von γ bestimmt.

Eine einfache Lösung und zwar eine rein geometrische gestattet der Fall c.

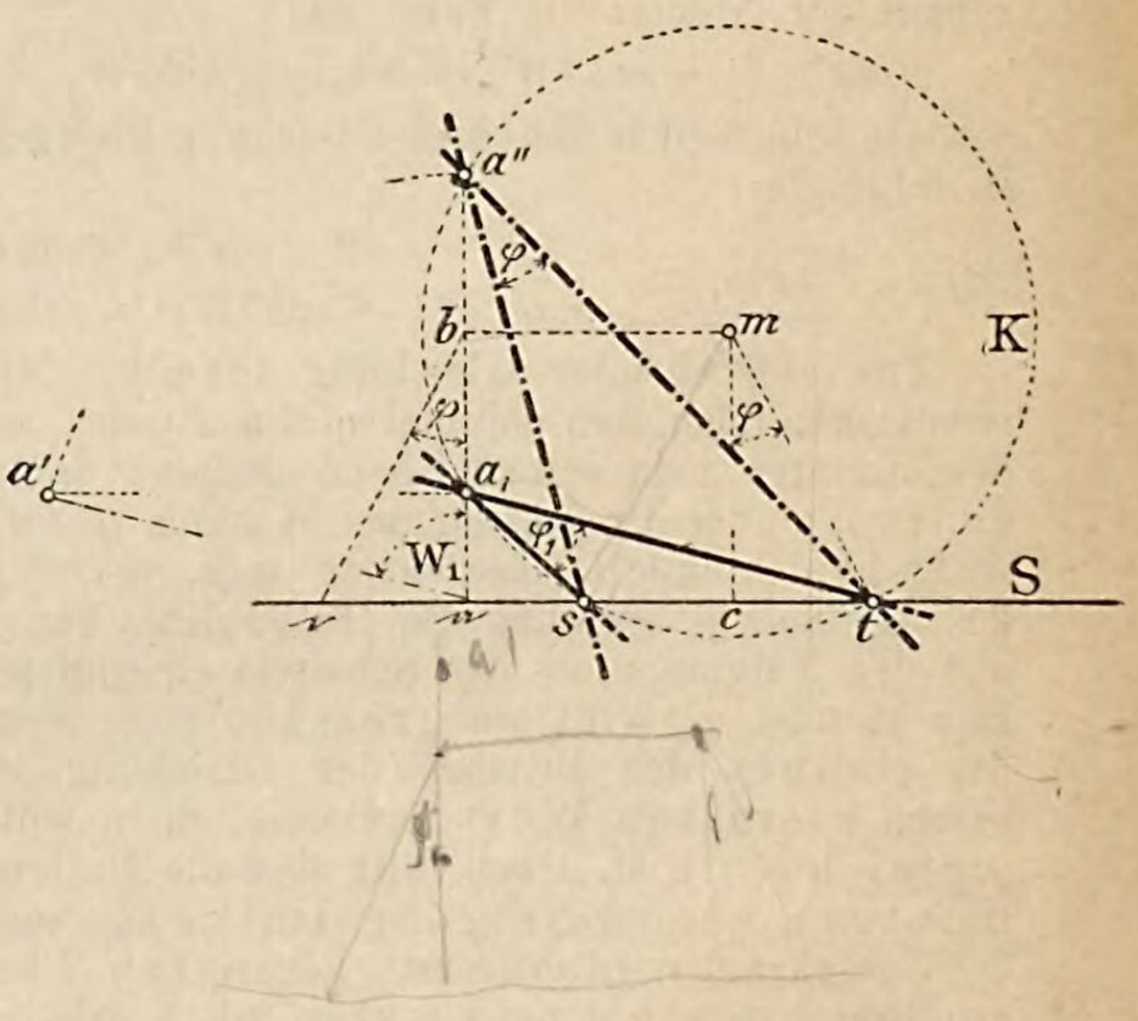
Es sind nämlich, siehe Figur 73, wenn a_1 die Projektion und a'' die Umlegung des Winkelscheitels in die **Pr. Eb.** bezeichnet, lediglich die Spuren s und t der Winkelschenkel zu konstruieren. Zufolge der Gleichheit der Winkel φ_1 und φ liegen aber, siehe Erkl. 113, die vier Punkte s, t, a_1 und a'' auf einem Kreise K, dessen Halbmesser wie folgt bestimmbar ist.

Denkt man sich den Mittelpunkt m des Kreises K mit s und t verbunden und von m die Senkrechte mc auf S gefällt, so ist der Winkel $cmt = \varphi$, siehe Erkl. 114; ausserdem kennt man aber auch die Länge $\overline{mc} = \overline{ab}$ (b Halbierpunkt der Strecke $\overline{a_1 a''}$). Man erhält folgende

Konstruktion: Ist, s. Fig. 73, aS die Ebene des Winkels φ, so lege man dieselbe um ihre Spur S in die **Pr. Eb.** um und bestimme die Umlegung a'' von a. (Im vorliegenden Falle wurde die Umlegung und die Projektion auf der nämlichen Seite der Spur S gewählt.) Halbiere $\overline{a_1 a''}$ in b und trage an $a''a$ in b den gegebenen Winkel φ an, dessen zweiter Winkelschenkel die Spur S in c trifft. Zeichne den durch a_1 und a'' gehenden Kreis K mit einem Halbmesser gleich $\overline{bc}$, so schneidet derselbe aus der Spur S die Spuren s und t der gesuchten Winkelschenkel aus. Die Verbindungslinien sa_1 und ta_1 bilden daher die Projektion φ_1 des Winkels φ.

Wie viele Lagen des Winkels φ sind möglich?

Figur 73.



Erkl. 113. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Peripheriewinkel, die auf der gleichen Sehne stehen, sind einander gleich."

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Erkl. 114. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

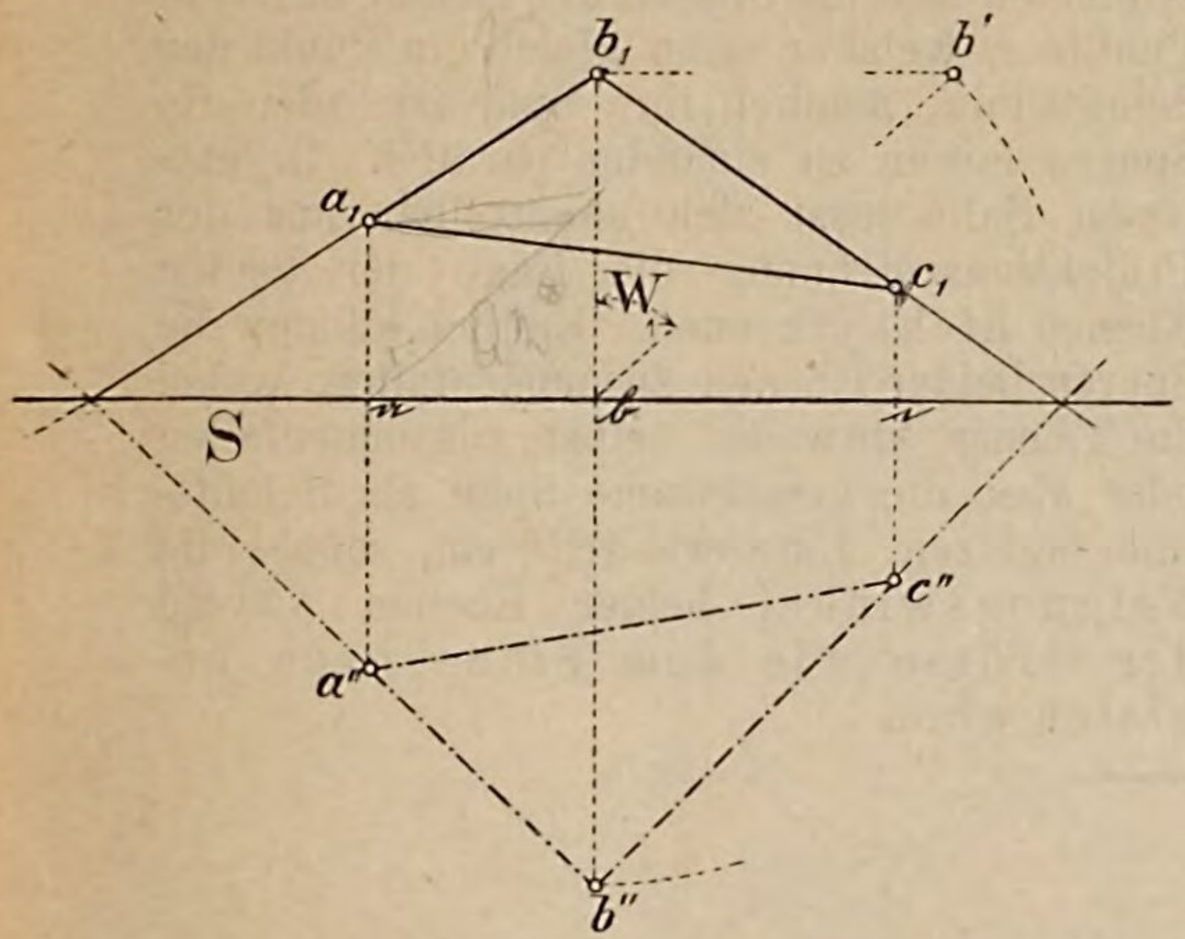
„Der Centriwinkel ist doppelt so gross als der auf der gleichen Sehne stehende Peripheriewinkel."

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

η) Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt einer ebenen Figur und dem Inhalt ihrer Projektion.

*__Frage 38.__ In welchem Zusammenhange steht der Flächeninhalt einer ebenen Figur zum Inhalte ihrer Projektion?

Figur 74.



__Antwort.__ Ist in einer Ebene Sb eine Figur, z. B. ein Dreieck, dessen Projektion $a_1 b_1 c_1$ ist, siehe Figur 74, gegeben, so denke man sich das Dreieck um die Spur S der Ebene in die **Pr. Eb.** umgelegt, so dass es nach $a''b''c''$ gelangt, so ist aus der Figur 74 unmittelbar ersichtlich, dass die Inhalte von $a_1 b_1 c_1$ und $a''b''c''$ sich zusammensetzen aus den algebraischen Summen der Inhalte der Trapeze $a_1 \mathfrak{a} \mathfrak{b} b_1$, $b_1 \mathfrak{b} \mathfrak{c} c_1$, $a_1 \mathfrak{a} \mathfrak{c} c_1$ bezw. $a'' \mathfrak{a} \mathfrak{b} b''$, $b'' \mathfrak{b} \mathfrak{c} c''$, $a'' \mathfrak{a} \mathfrak{c} c''$, d. h. es ist der Flächeninhalt F_1 des Dreiecks $a_1 b_1 c_1$:

$$F_1 = \frac{\overline{a_1 \mathfrak{a}} + \overline{b_1 \mathfrak{b}}}{2} \times \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \frac{\overline{b_1 \mathfrak{b}} + \overline{c_1 \mathfrak{c}}}{2} \times \overline{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} - \frac{\overline{a_1 \mathfrak{a}} + \overline{c_1 \mathfrak{c}}}{2} \times \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{c}},$$

jener des Dreiecks $a''b''c''$ aber:

$$F = \frac{\overline{a'' \mathfrak{a}} + \overline{b'' \mathfrak{b}}}{2} \times \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \frac{\overline{b'' \mathfrak{b}} + \overline{c'' \mathfrak{c}}}{2} \times \overline{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} - \frac{\overline{a'' \mathfrak{a}} + \overline{c'' \mathfrak{c}}}{2} \times \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}$$

Nun ist aber:

$$\overline{a_1 \mathfrak{a}} = \overline{a'' \mathfrak{a}} \times \cos W_1$$
$$\overline{b_1 \mathfrak{b}} = \overline{b'' \mathfrak{b}} \times \cos W_1$$
$$\overline{c_1 \mathfrak{c}} = \overline{c'' \mathfrak{c}} \times \cos W_1$$

daher:

$$F_1 = \frac{\overline{a'' \mathfrak{a}} + \overline{b'' \mathfrak{b}}}{2} \times \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \times \cos W_1 + \frac{\overline{b'' \mathfrak{b}} + \overline{c'' \mathfrak{c}}}{2} \times \overline{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \times \cos W_1 + \frac{\overline{a'' \mathfrak{a}} + \overline{c'' \mathfrak{c}}}{2} \times \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \times \cos W_1$$

oder:

17) . . . $F_1 = F \times \cos W_1$

Auf die gleiche Weise lässt sich jede ebene begrenzte Figur und deren Projektion in Trapeze zerlegen und aus den algebraischen Summen der Inhalte der letzteren der Inhalt der Figur und ihrer Projektion ermitteln. Man findet allgemein, dass die Gleichung 17) für jede ebene Figur Gültigkeit hat, wenn F ihren Flächeninhalt, F_1 den ihrer Projektion und W_1 den Winkel der Ebene der Figur mit der **Pr. Eb.** bezeichnet, siehe Erkl. 115.

*__Erkl. 115.__ Aus der Antwort auf die Frage 38 folgt der Satz:

„Der Inhalt der Projektion einer ebenen Figur ist gleich dem Inhalte der Figur, multipliziert mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebene der Figur mit der **Pr. Eb.**“

__Erkl. 116.__ Ist die Ebene der Figur parallel zur **Pr. Eb.**, so ist der Inhalt der Projektion gleich dem Inhalte der Figur, steht deren Ebene aber auf der **Pr. Eb.** senkrecht, so ist der Inhalt der Projektion gleich Null.

__Erkl. 117.__ Sind in ein und derselben Ebene mehrere ebene Figuren gelegen, so findet zwischen den Inhalten der Figuren und ihren Projektionen stets die durch die Gleichung 17) ausgedrückte Beziehung statt; da aber der Winkel W_1 für eine und dieselbe Ebene der gleiche ist, so folgt der weitere Satz:

„Die Inhalte aller in der nämlichen Ebene gelegenen Figuren stehen in demselben Verhältnis zu einander, wie die Inhalte ihrer Projektionen.“

c) Ueber die Lagen zweier Ebenen.

Frage 39. Welche Lagen können zwei Ebenen zu einander haben?

Antwort. Zwei Ebenen können entweder
a. einander schneiden,
b. zu einander parallel sein.

Frage 40. Wie erkennt man aus der Projektionszeichnung die gegenseitige Lage zweier Ebenen?

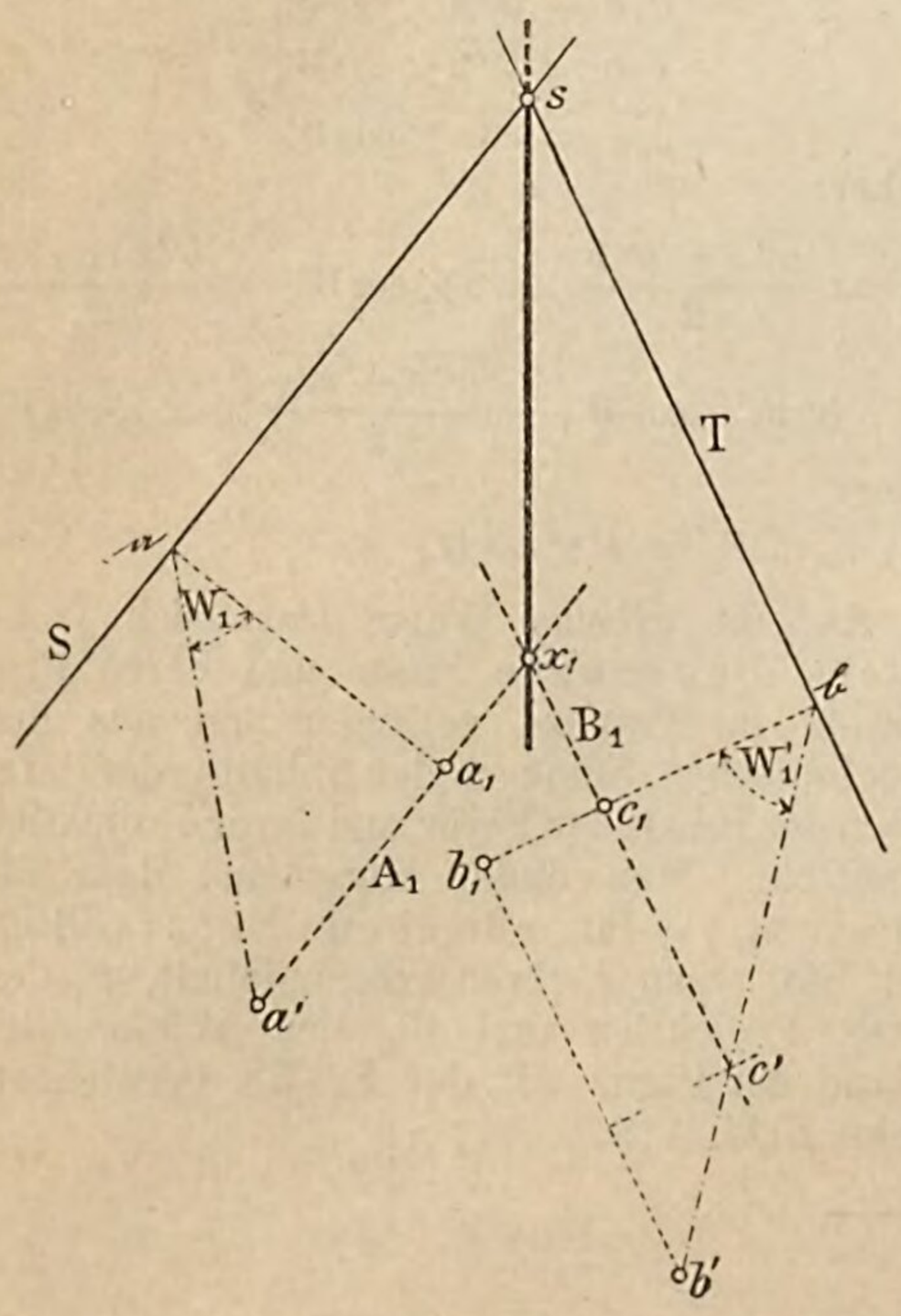
Erkl. 118. Aus der Antwort auf die Frage 40 folgt der Satz:

„Aus der Projektionszeichnung lässt sich unmittelbar nur dann erkennen, ob zwei Ebenen sich schneiden, wenn ihre Spuren sich schneiden; der Schnittpunkt der letzteren ist die Spur der Schnittlinie. In allen übrigen Fällen kann über die Lage beider Ebenen erst auf Grund einer besonderen Untersuchung entschieden werden."

Antwort. Schneiden sich zwei Ebenen, so können drei Fälle eintreten, entweder schneiden sich die Spuren der Ebene in einem Punkte s, welcher dann gleich ein Punkt der Schnittlinie, nämlich ihre Spur ist, oder die Spuren laufen zu einander parallel. In letzterem Falle lässt sich unmittelbar aus der Projektionszeichnung die Lage der beiden Ebenen nicht erkennen. Endlich können die Spuren beider Ebenen zusammenfallen, wobei die Ebenen entweder selbst zusammenfallen oder aber die gemeinsame Spur als Schnittlinie besitzen. Letzteres tritt ein, sobald die Neigungswinkel beider Ebenen sowohl der Grösse wie dem Sinne nach ungleich sind.

Frage 41. Wie bestimmt man in den in der Antwort auf die Frage 40 genannten Fällen die Schnittlinie zweier Ebenen?

Figur 75.



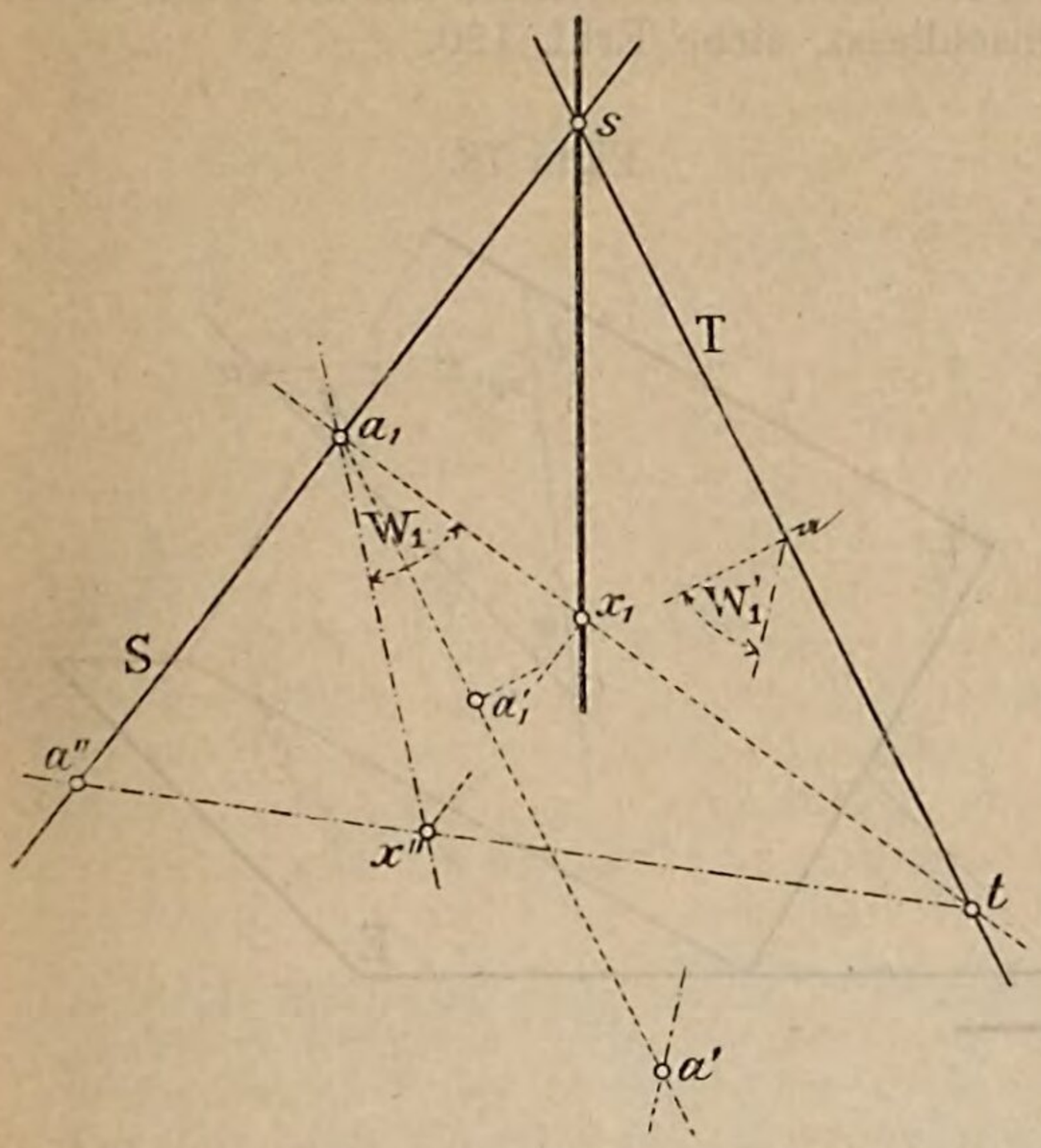
Antwort. Sind durch SW_1 und TW_1', siehe Figur 75, die beiden Ebenen E' und E'', deren Spuren S und T in einem Punkte s sich treffen, gegeben, so ist s schon ein Punkt der Schnittlinie beider Ebenen; einen weiteren Punkt derselben erhält man, wenn man sich in jeder Ebene in gleichem Abstande von der **Pr. Eb.** eine Gerade, etwa gleich eine Parallele zur betreffenden Spur gezogen denkt. Diese Parallelen liegen in einer Parallelebene zur **Pr. Eb.** und treffen sich daher in einem Punkte der gesuchten Schnittlinie. Man erhält folgende Konstruktion:

Ziehe, siehe Figur 75, etwa gleich durch den Punkt a die Parallele zur Spur S, so ist ihre Projektion die Gerade A_1, zeichne ferner das Konstruktionsdreieck $b_1 b' \mathfrak{b}$ des Punktes b der Ebene E'', und bestimme auf der Hypotenuse $\overline{b'\mathfrak{b}}$ desselben den Punkt c' so, dass $\overline{c_1 c'} = \overline{a_1 a'}$ ist, so geht durch c_1 die Parallele B_1 zu T, welche A_1 in der Projektion x_1 eines Punktes x der Schnittlinie beider Ebenen trifft.

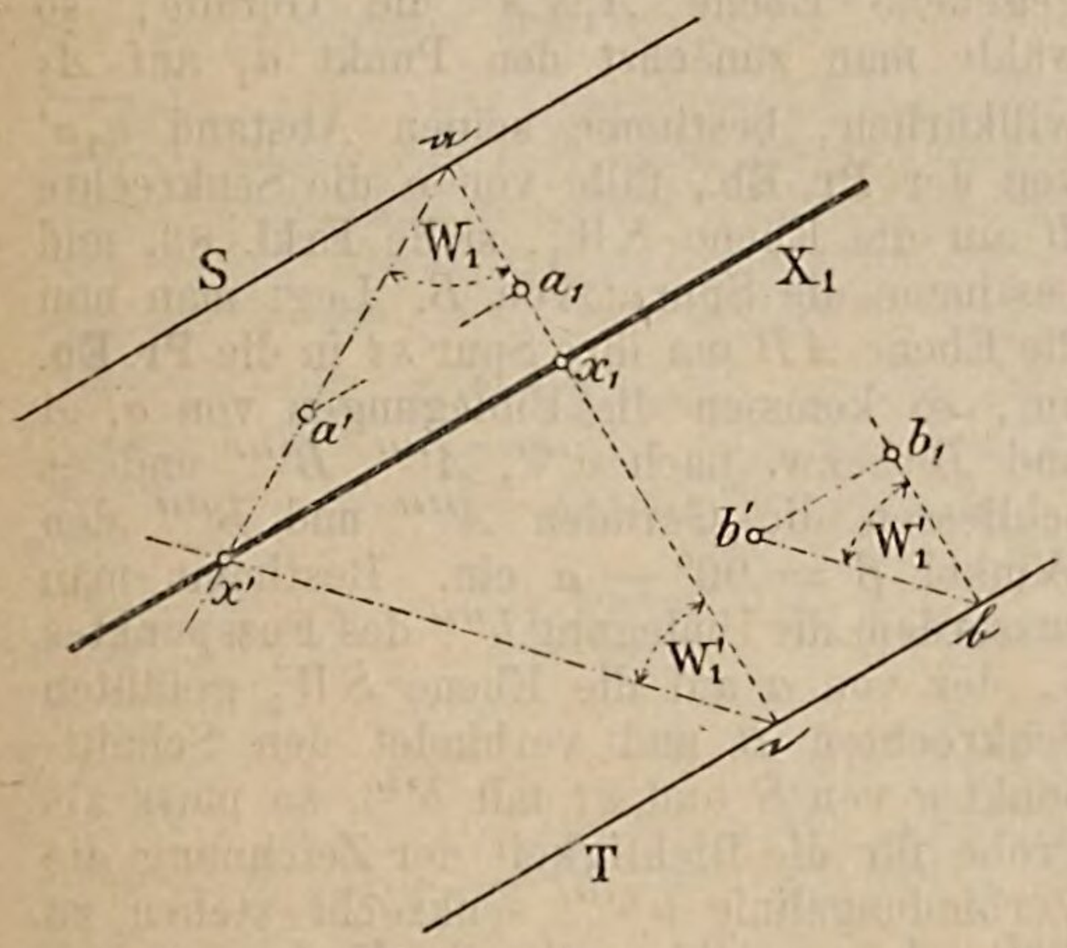
Die Projektion der gesuchten Schnittlinie ist somit die Linie $s_1 x_1$.

Ein zweites Verfahren bestände darin, dass man, siehe Figur 76, den zur Spur S senkrechten Winkelschenkel von W_1 als Projektion $a_1 t$ einer Geraden der Ebene E''

Figur 76.



Figur 77.



Erkl. 119. Sind die Spuren der Ebenen nicht unmittelbar gegeben, so bestimme man dieselben, wie früher gezeigt wurde und verfahre zur Ermittelung der Schnittlinie wie in der Antwort auf die Frage 41, oder man bestimme, siehe Frage und Antwort 31, die Schnittpunkte von zweien Geraden der einen Ebene mit der andern Ebene. Die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte liefert dann ebenfalls die Schnittlinie beider Ebenen.

auffasst und ihre projizierende Ebene samt der Geraden ta in die **Pr. Eb.** umlegt. Die Umlegung ta'' ($\overline{a_1 a''} = \overline{a_1' a'}$) von ta trifft den zweiten Winkelschenkel von W_1 in einem Punkte x'', dessen Projektion x_1 auf $a_1 t$ liegt. $x_1 s$ ist die Projektion der Schnittlinie.

Sind, siehe Figur 77, die Spuren S und T beider Ebenen zu einander parallel und ist $a_1 a'$ ein Punkt der einen und $b_1 b'$ ein Punkt der andern Ebene, so zeichne man die Konstruktionsdreiecke der Punkte a und b und führe durch den Schnittpunkt c der verlängerten $\mathfrak{a} a_1$ mit T eine Parallele zu $\mathfrak{b} b'$, so trifft dieselbe die verlängerte $\mathfrak{a} a'$ in einem Punkte x', dessen Projektion x_1 ist, durch welch letzteren Punkt die Projektion X_1 der Schnittlinie X beider Ebenen parallel zu S und T hindurch geht.

d) Ueber die Bestimmung des Winkels einer Geraden und einer beliebigen Ebene.

Frage 42. Was versteht man unter dem Winkel einer Geraden mit einer Ebene?

Antwort. Unter dem Winkel einer Geraden ac mit einer Ebene E' versteht man

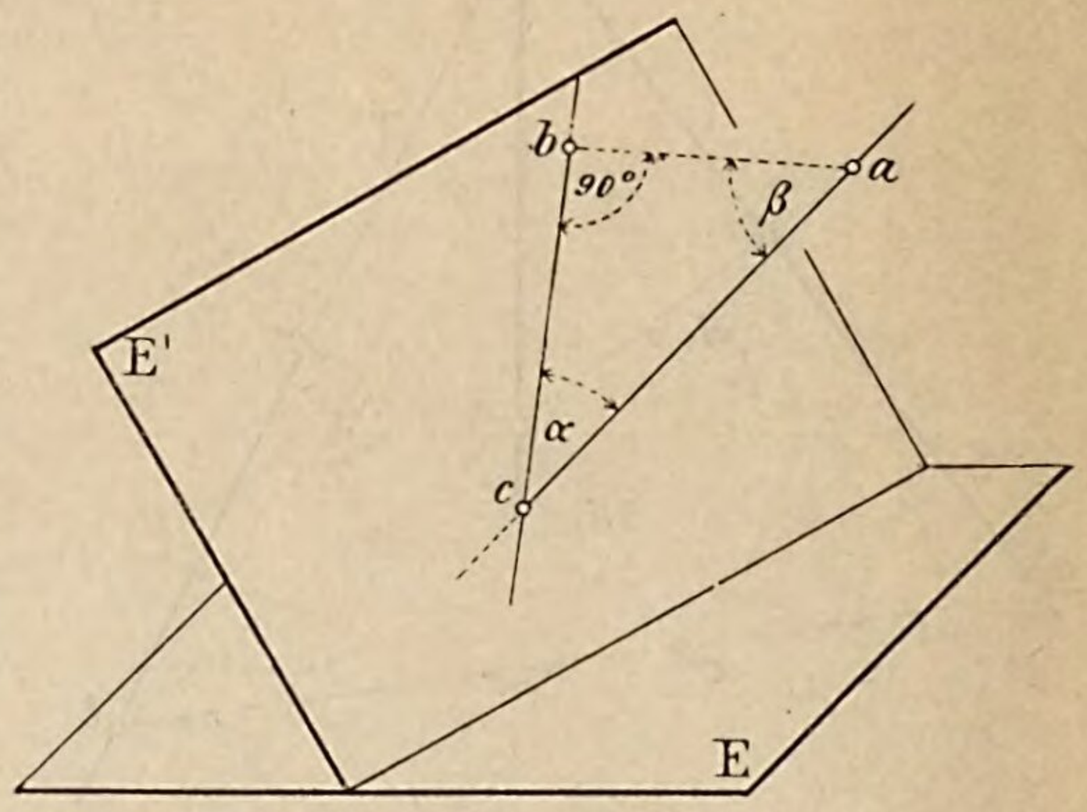
Erkl. 120. Unter der Projektion einer Geraden auf eine Ebene E' versteht man die Verbindungslinie der Fusspunkte der von den Punkten der Geraden auf die Ebene gefällten Senkrechten. Diese Projektion ist bestimmt, sobald man entweder zwei der eben genannten Fusspunkte oder aber den Schnittpunkt c der Geraden mit der Ebene E' sowie einen der Fusspunkte, etwa den Fusspunkt b der von einem beliebigen Punkte a auf die Ebene E' gefällten Senkrechten kennt.

Erkl. 121. Aus der Figur 78 ist zu ersehen, dass, da das Dreieck abc bei b rechtwinklig ist, der Winkel $\beta = 90^0 - \alpha$ ist. Man erhält demnach die Grösse des Winkels α einer Ebene E' mit einer Geraden als den Complementswinkel des Winkels einer Normalen zur Ebene mit der gegebenen Geraden.

Erkl. 122. Das Wort „Complement“ stammt aus dem Lateinischen (complere, ergänzen) und heisst Ergänzung.

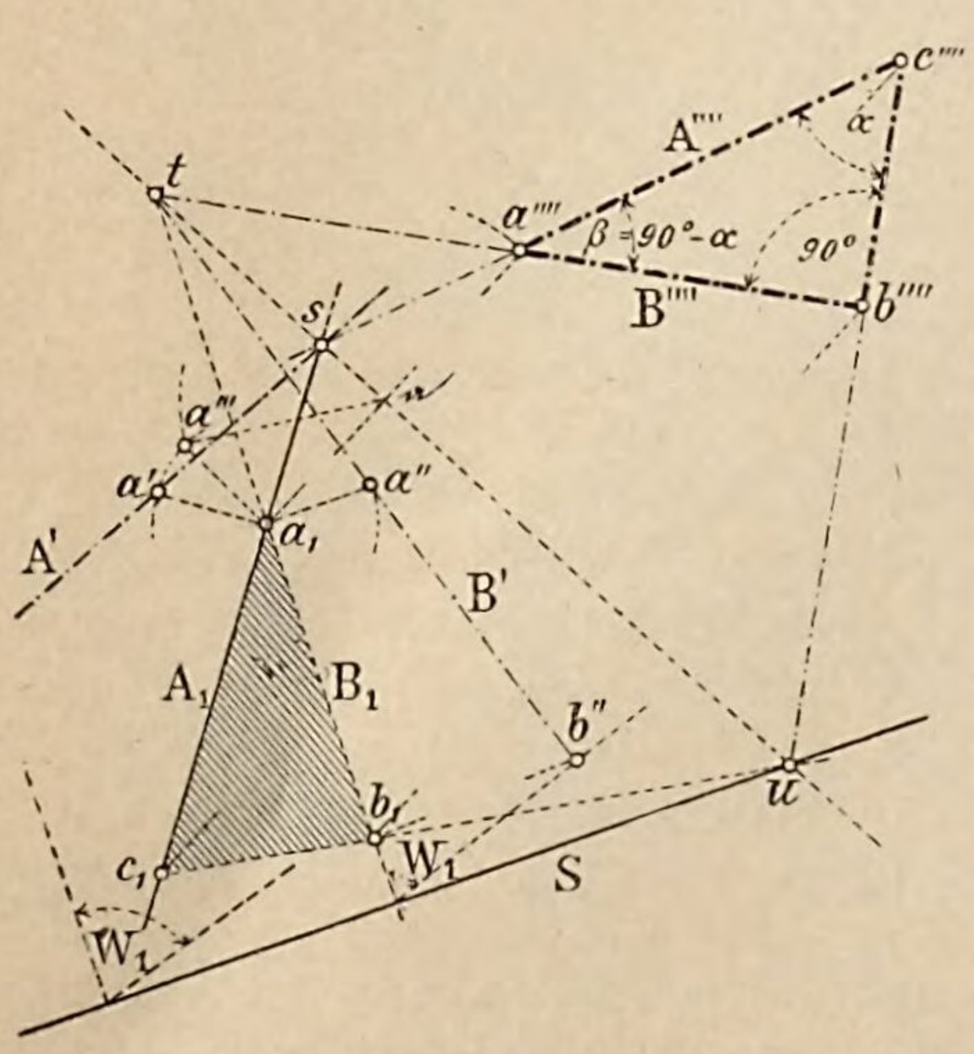
den Winkel α, siehe Figur 78, welchen die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene E' einschliesst, siehe Erkl. 120.

Figur 78.



Frage 43. Wie lässt sich aus der Projektionszeichnung die wahre Grösse des Winkels einer Geraden mit einer Ebene bestimmen?

Figur 79.



Antwort. Ist SW_1, siehe Figur 79, die gegebene Ebene $A_1 s A'$ die Gerade, so wähle man zunächst den Punkt a_1 auf A_1 willkürlich, bestimme seinen Abstand $\overline{a_1 a'}$ von der **Pr. Eb.**, fälle von a die Senkrechte B auf die Ebene SW_1, siehe Erkl. 83, und bestimme die Spur t von B. Legt man nun die Ebene AB um ihre Spur st in die **Pr. Eb.** um, so kommen die Umlegungen von a, A und B bezw. nach a'''', A'''', B'''' und es schliessen die Geraden A'''' und B'''' den Winkel $\beta = 90^0 - \alpha$ ein. Bestimmt man ausserdem die Umlegung b'''' des Fusspunktes b, der von a auf die Ebene SW_1 gefällten Senkrechten B und verbindet den Schnittpunkt u von S und st mit b'''', so muss als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung die Verbindungslinie ub'''' senkrecht stehen zu B'''', denn ub'''' stellt die Umlegung der Projektion der Geraden A auf die Ebene SW_1 dar; sie schneidet die Linie A'''' in dem Punkte c'''', der Umlegung des Schnittpunktes c der Geraden A mit der Ebene SW_1. Das Dreieck $a'''' b'''' c''''$ ist demnach die Umlegung, d. h. die wahre Gestalt des Dreiecks abc.

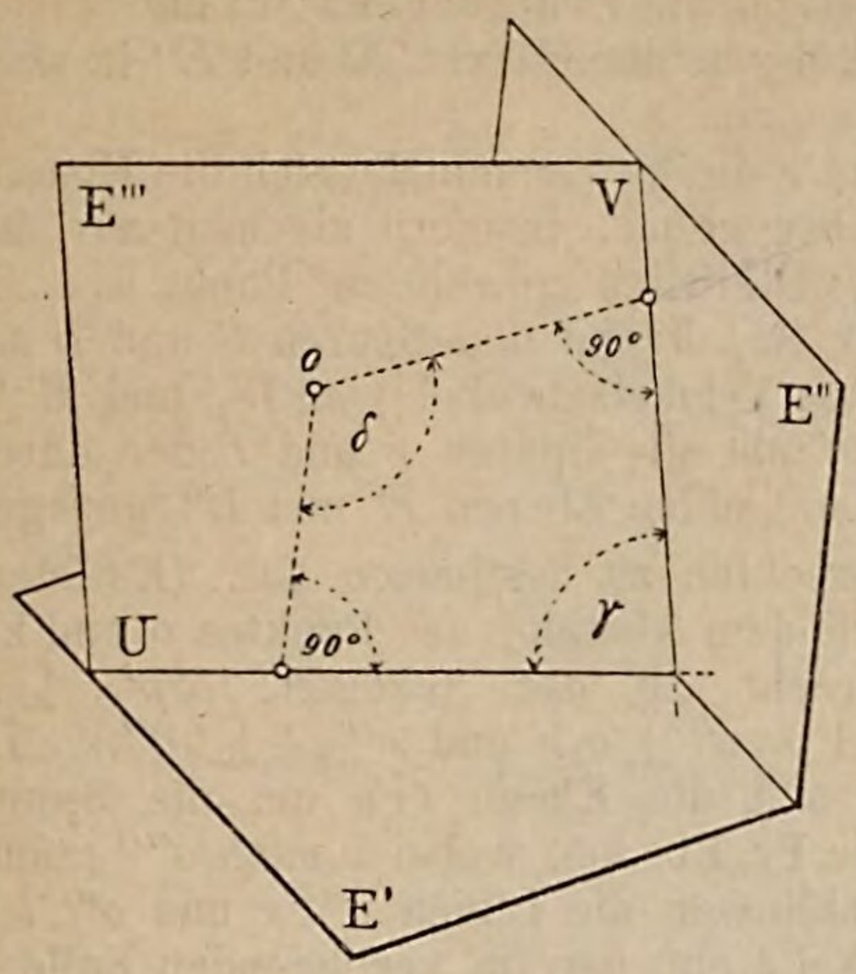
---

e) Ueber die Bestimmung des Winkels zweier Ebenen.

Frage 44. Was versteht man unter dem Winkel zweier Ebenen?

Antwort. Unter dem Winkel zweier Ebenen E' und E'', siehe Figur 80, versteht man den Winkel γ, welchen die Schnittlinien U

Figur 80.

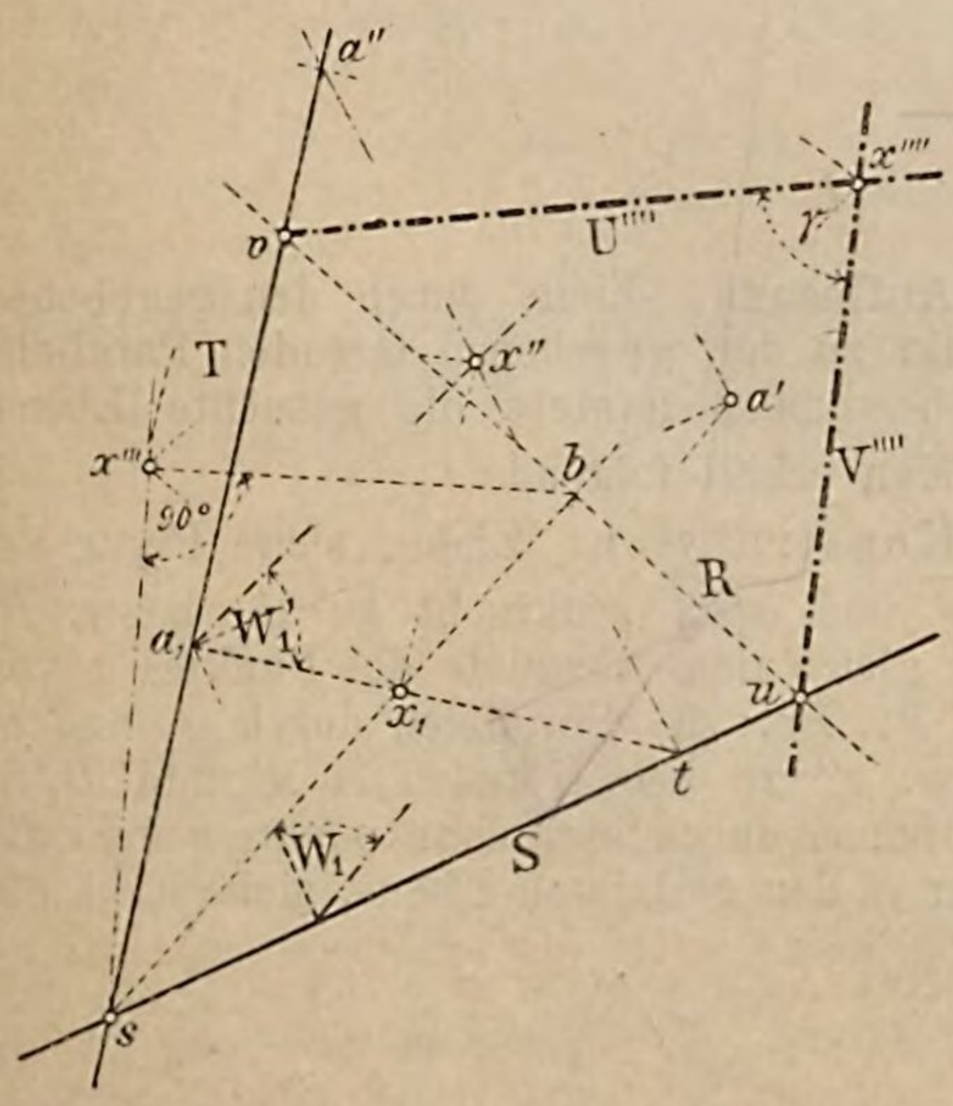


Erkl. 123. Fällt man von einem willkürlich gewählten Punkte o, siehe Figur 80, auf die beiden Ebenen E' und E'' Senkrechte, so schliessen diese einen Winkel δ ein, der entweder den Winkel γ zu 180^0 ergänzt, siehe Erkl. 124, oder aber gleich γ ist, je nachdem der Punkt o im Winkelraume von γ oder in dessen Nebenwinkelraume angenommen wurde.

Erkl. 124. Der Ergänzungswinkel eines anderen Winkels zu 180^0 heisst dessen Supplementswinkel; das Wort „Supplement“ stammt aus dem Lateinischen (supplere, ergänzen, nachtragen) und heisst Ergänzung.

Frage 45. Wie lässt sich aus der Projektionszeichnung die wahre Grösse des Winkels zweier Ebenen bestimmen?

Figur 81.



Antwort. Zur Bestimmung der wahren Grösse des Winkels zweier Ebenen kann man folgende zwei Wege einschlagen:

Entweder bestimmt man nämlich

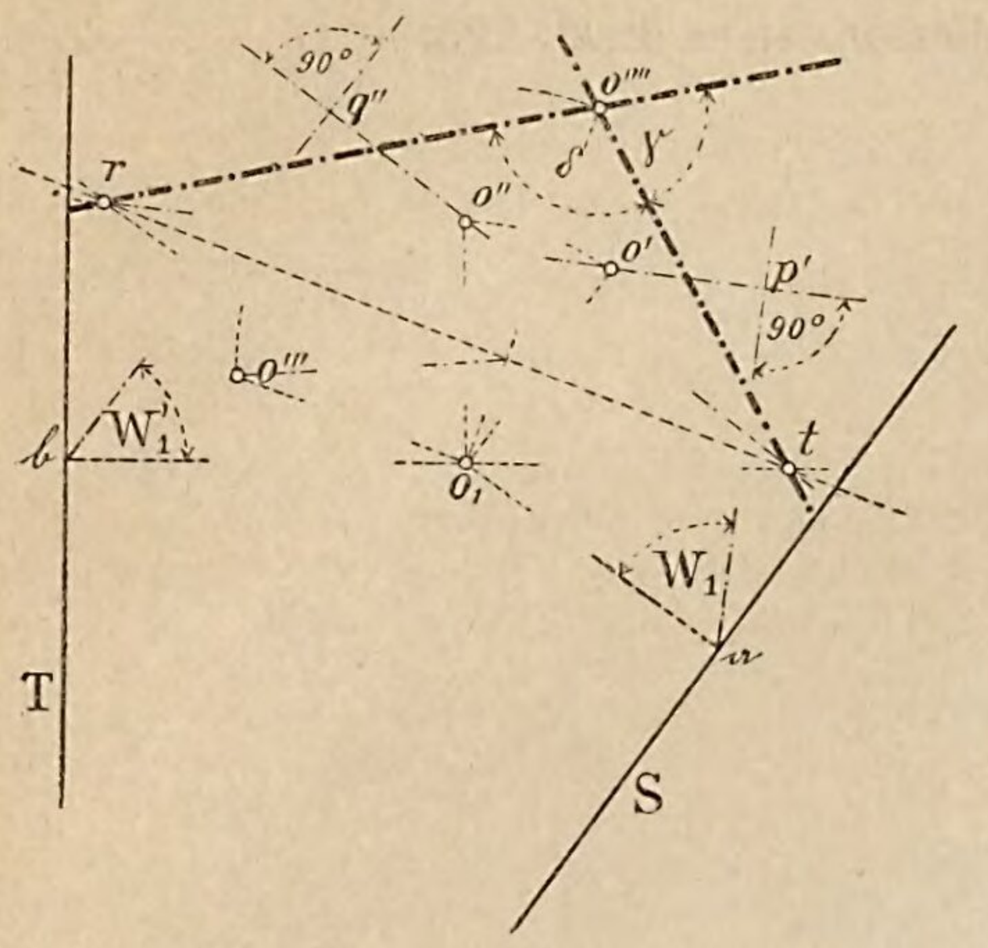
a. den Winkel beider Ebenen direkt, oder

b. man konstruiert seinen Supplementswinkel.

Im Falle a. verfährt man wie folgt:

Ist durch SW_1 die Ebene E', siehe Fig. 81, durch TW_1' die Ebene E'' gegeben, so bestimmt man den Punkt x der Schnittlinie, wie in dem zweiten Verfahren, siehe die Antwort auf die Frage 41, angegeben. Legt man nun die projizierende Ebene von sx in die **Pr. Eb.** um, wobei x nach x''' kommt und zieht $x'''b$ senkrecht zu sx''' bis zum Schnitt b mit sx_1, so geht durch b senkrecht zu sx_1 die Spur R der durch x senkrecht zu sx gelegten Ebene E''' und sie schneidet die Spuren S und T in den Spuren u und v der Schnittlinien $ux = U$ und $vx = V$ von E''' mit E' bezw. E''. Bestimmt man nun die

Figur 82.



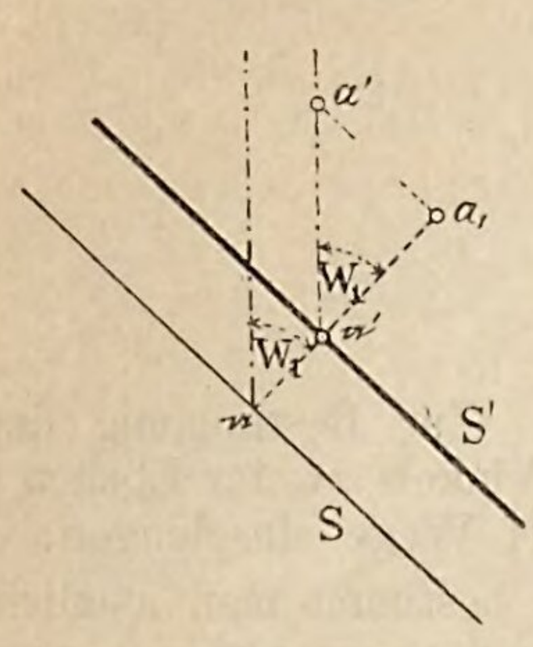
Umlegung der Ebene E''' um ihre Spur R, so schliessen die Umlegungen U'''' und V'''' den Winkel γ beider Ebenen E' und E'' in wahrer Grösse ein.

Im Falle b. vereinfacht sich die Konstruktion bedeutend, insofern als man nur durch den willkürlich gewählten Punkt o_1, siehe Figur 82, die zu den Spuren S und T senkrechten Winkelschenkel von W_1 und W_1' zu legen und die Spuren r und t der durch o zu den beiden Ebenen E' und E'' gezogenen Senkrechten zu bestimmen hat. (Es ist $\overline{o_1 o'}$ gleich dem Abstand des Punktes o und zwar senkrecht zu $o_1 \mathfrak{a}$ gezogen, $o'p' \perp \mathfrak{a}p'$, ferner $o_1 o'' \perp o_1 \mathfrak{b}$ und $o''q'' \perp \mathfrak{b}q''$.) Legt man nun die Ebene tro um die Spur rt in die **Pr. Eb.** um, wobei o nach o'''' gelangt, so schliessen die Linien $o''''r$ und $o''''t$ den Winkel δ ein, der im vorliegenden Falle den Winkel γ zu 180^0 ergänzt.

f) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 41. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene SW_1 zu legen.

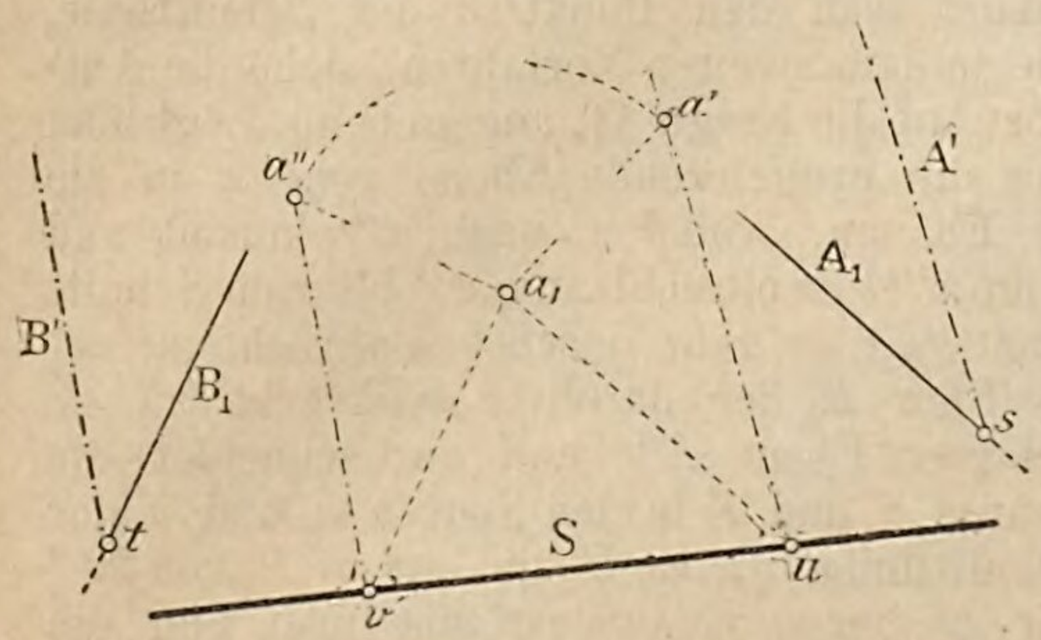
Figur 83.



Auflösung. Ziehe, siehe Figur 83, durch a_1 die Senkrechte $a_1\mathfrak{a}$ zu S und nehme $a_1\mathfrak{a}$ als den einen Winkelschenkel von W_1. Zeichne das Konstruktionsdreieck $a_1\mathfrak{a}'a'$ von a, so dass seine eine Kathete mit $a_1\mathfrak{a}$ zusammenfällt und W_1 der der anderen Kathete gegenüberliegende Winkel ist. Durch $\mathfrak{a}'$ geht parallel zu S die Spur S' der gesuchten Ebene.

Aufgabe 42. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Ebene parallel zu zweien Geraden B und C zu legen.

Figur 84.



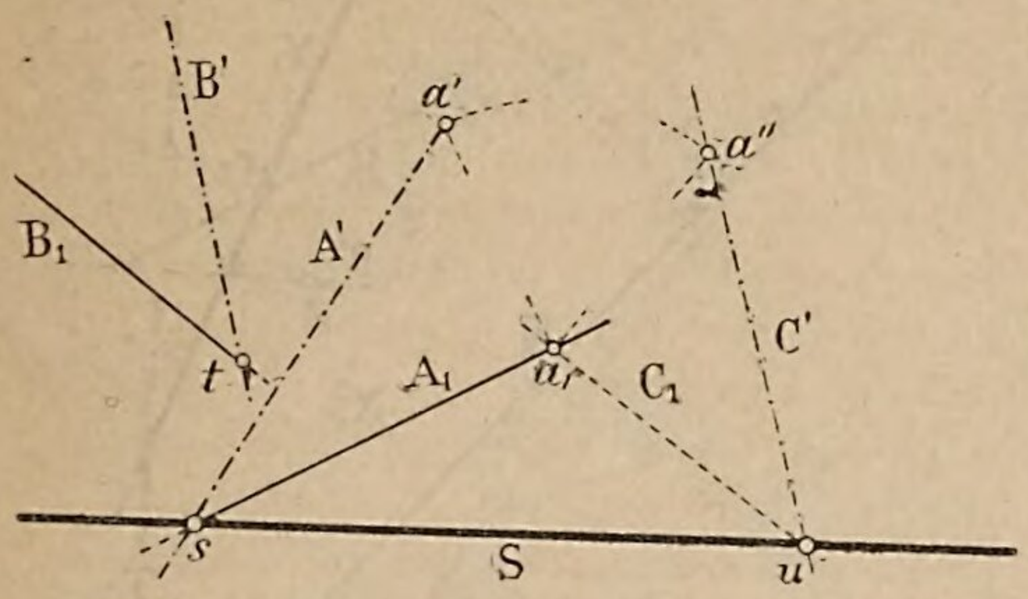
Auflösung. Ziehe durch den gegebenen Punkt zu den gegebenen Geraden Parallele, so bestimmen letztere die gesuchte Ebene.

Man erhält folgende

Konstruktion: Ziehe, siehe Figur 84, $\overline{a_1 a'}$ und $\overline{a_1 a''}$ senkrecht zu A_1 bezw. B_1 und gleich dem Abstande des Punktes a von der **Pr. Eb.**; die Parallelen durch a_1 und a' bezw. a'' zu den Geraden A_1A' und B_1B' bestimmen durch ihre Schnittpunkte u und v die Spur S der gesuchten Ebene, siehe Erkl. 63.

Aufgabe 43. Durch eine gegebene Gerade A ist eine Ebene zu legen, welche zu einer zweiten gegebenen Geraden B parallel läuft.

Figur 85.



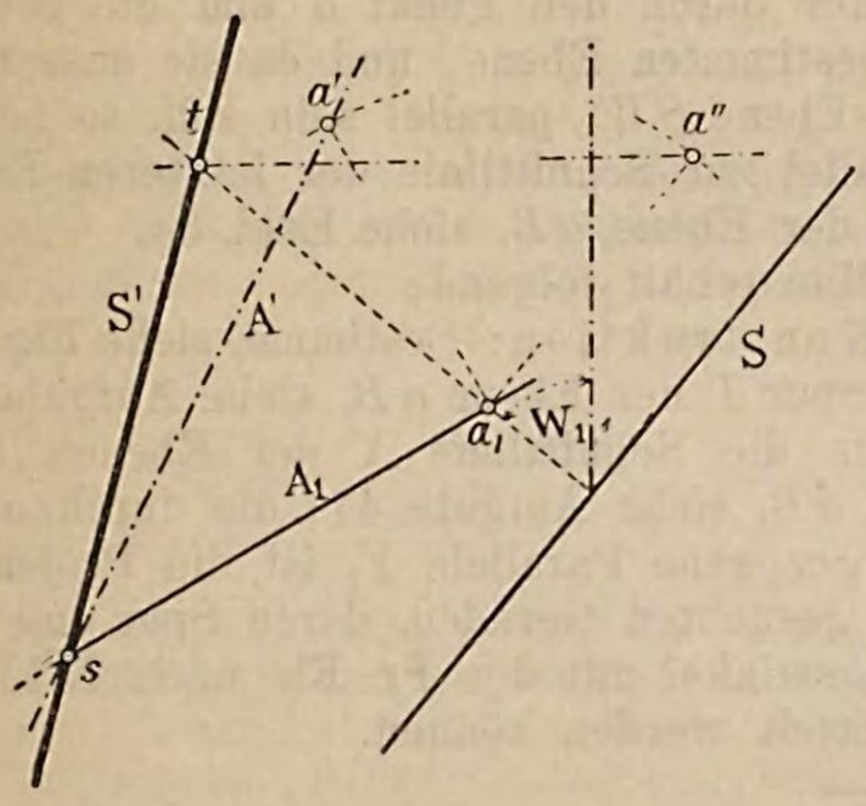
Auflösung. Durch einen beliebigen Punkt a der gegebenen Geraden A ziehe eine Parallele C zur gegebenen Geraden B, so bestimmen die Geraden A und C die gesuchte Ebene.

Man erhält folgende

Konstruktion: Ziehe, siehe Fig. 85, wie in voriger Aufgabe durch a_1 und a' die Gerade C_1 bezw. C' parallel zu B_1 bezw. B'; ihr Schnittpunkt u ist ein Punkt der Spur S der gesuchten Ebene. Die Spur S ist daher die Verbindungslinie us.

Aufgabe 44. Durch eine Gerade A ist eine Ebene zu legen, senkrecht zu einer gegebenen Ebene SW_1.

Figur 86.



Auflösung. Durch einen beliebigen Punkt der gegebenen Geraden fälle eine Senkrechte zur gegebenen Ebene, so bestimmt diese mit der gegebenen Geraden die gesuchte Ebene.

Man erhält folgende

Konstruktion: Wähle auf der Geraden A, siehe Figur 86, den Punkt a beliebig und fälle von ihm, siehe Erkl. 83, auf die Ebene SW_1 die Senkrechte at. Die Verbindungslinie st ist die Spur S der gesuchten Ebene.

Aufgabe 45. In einer gegebenen Ebene SW_1 ist eine Gerade zu zeichnen, welche zwei gegebene Gerade A und B schneidet.

Erkl. 125. Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung ergibt sich, dass, wenn man die projizierende Ebene von xy samt den Punkten x und y in die **Pr. Eb.** umlegt, siehe Erkl. 44 und 45, die Verbindungslinie $x''y''$ durch den Schnittpunkt u von x_1y_1 mit S hindurchgehen muss, denn u ist die Spur der Geraden xy, siehe Erkl. 44 und 82.

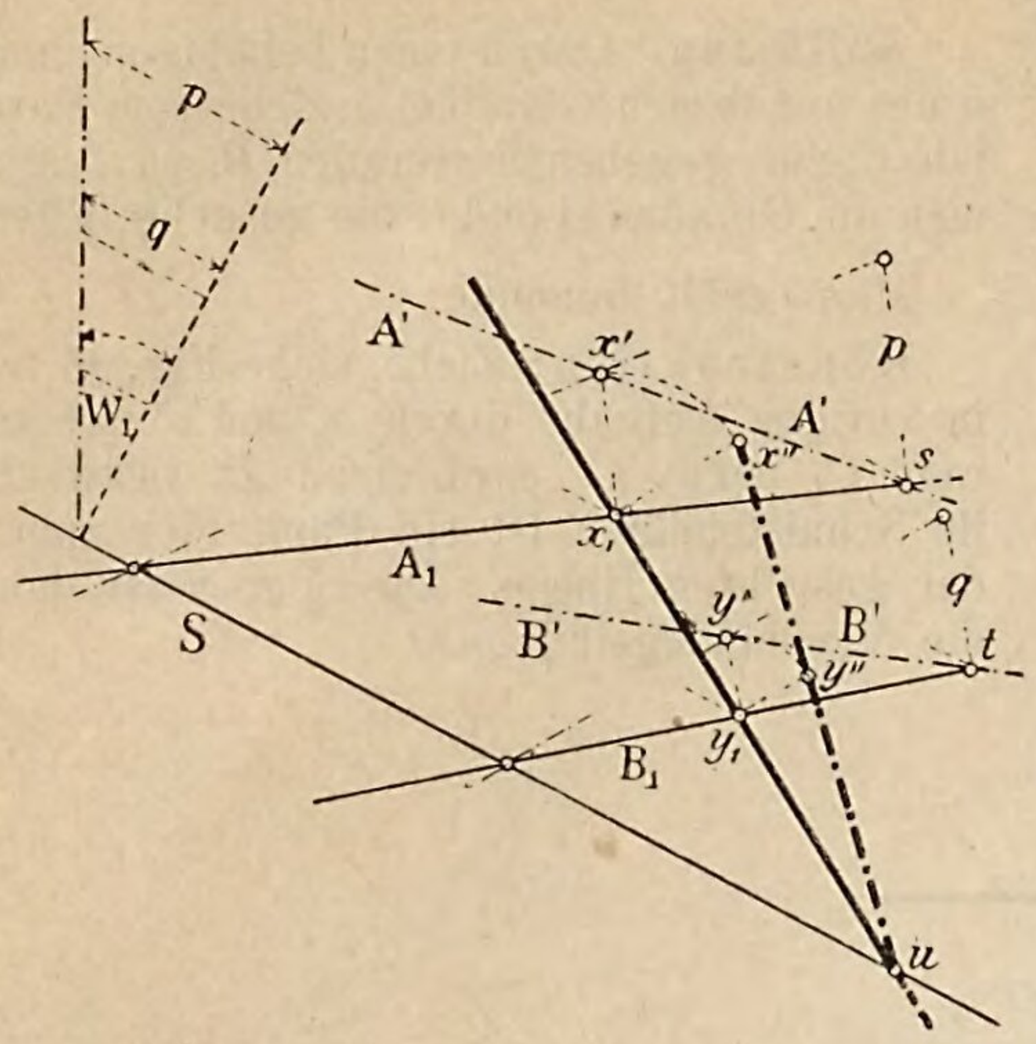
Auflösung. Die gesuchte Gerade ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden A und B mit der Ebene SW_1.

Man erhält folgende

Konstruktion: Bestimme, siehe Fig. 87, die Schnittpunkte x und y der Geraden A und B mit der Ebene SW_1, siehe Frage und Antwort 31; die Verbindungslinie x_1y_1 ist die Projektion der gesuchten Geraden.

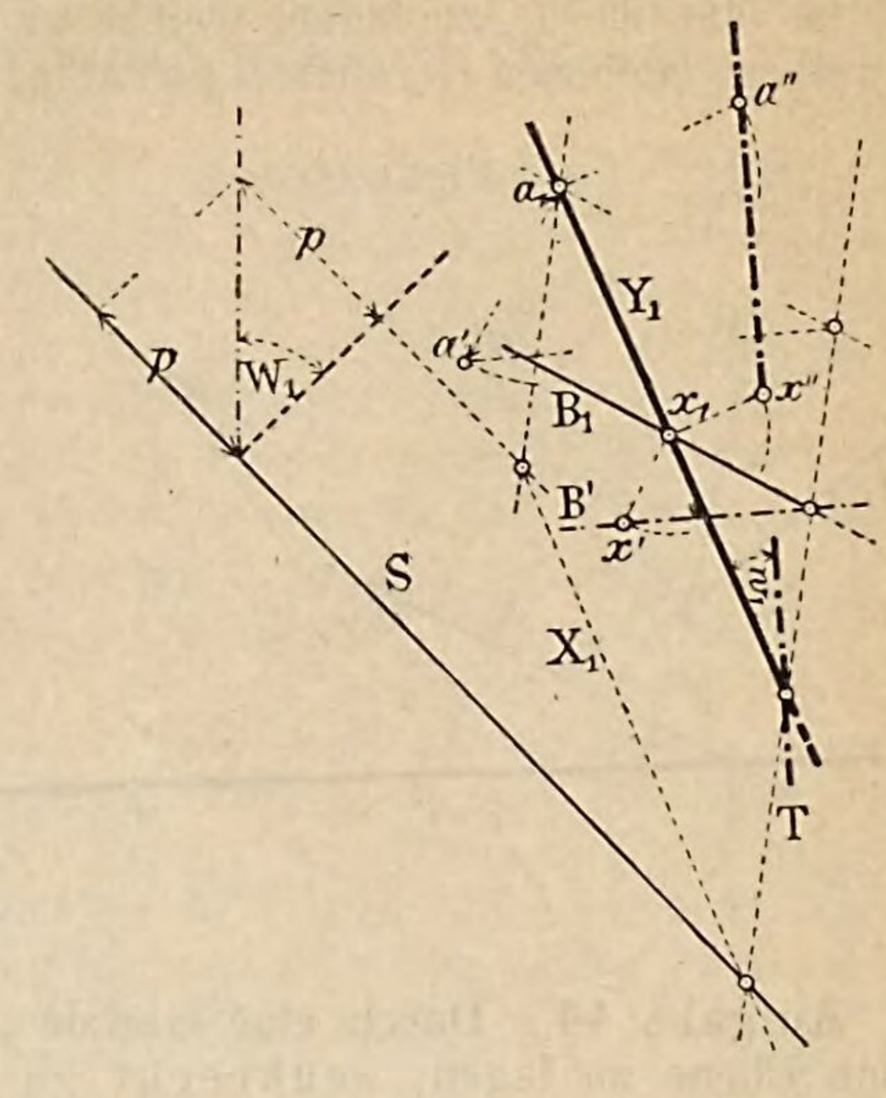
Die mit p und q bezeichneten Strecken sind bezw. einander gleich.

Figur 87.



Aufgabe 46. Durch einen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche eine gegebene Gerade B schneidet und zu einer Ebene SW_1 parallel läuft.

Figur 88.



Auflösung. Die gesuchte Gerade liegt in der durch den Punkt a und die Gerade B bestimmten Ebene, und da sie ausserdem zur Ebene SW_1 parallel sein soll, so ist sie parallel zur Schnittlinie der letzteren Ebene mit der Ebene aB, siehe Erkl. 34.

Man erhält folgende

Konstruktion: Bestimme, siehe Fig. 88, die Spur T der Ebene aB, siehe Aufgabe 12, sowie die Schnittlinie X der Ebenen SW_1 und aB, siehe Aufgabe 41; die durch a_1 zu X_1 gezogene Parallele Y_1 ist die Projektion der gesuchten Geraden, deren Spur und Neigungswinkel mit der **Pr. Eb.** nach Erkl. 63 ermittelt werden können.

Aufgabe 47. Durch einen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche zwei gegebene Gerade B und C schneidet.

Erkl. 126. Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung findet man, dass, wenn man die projizierende Ebene der Geraden au samt den Punkten x und y in die **Pr. Eb.** umlegt, die so sich ergebenden Abstände der Punkte x und y gleich sein müssen den aus den Umlegungen der projizierenden Ebenen der Geraden B und C folgenden Abstände. Es müssen in der Figur die durch p, ebenso jene durch q bezeichneten Strecken bezw. einander gleich sein.

Erkl. 127. Die in der Auflösung der Aufgabe 47 angegebene Konstruktion hat nur so lange Gültigkeit, als der gegebene Punkt a in endlicher Ferne liegt; fällt er aber in unend-

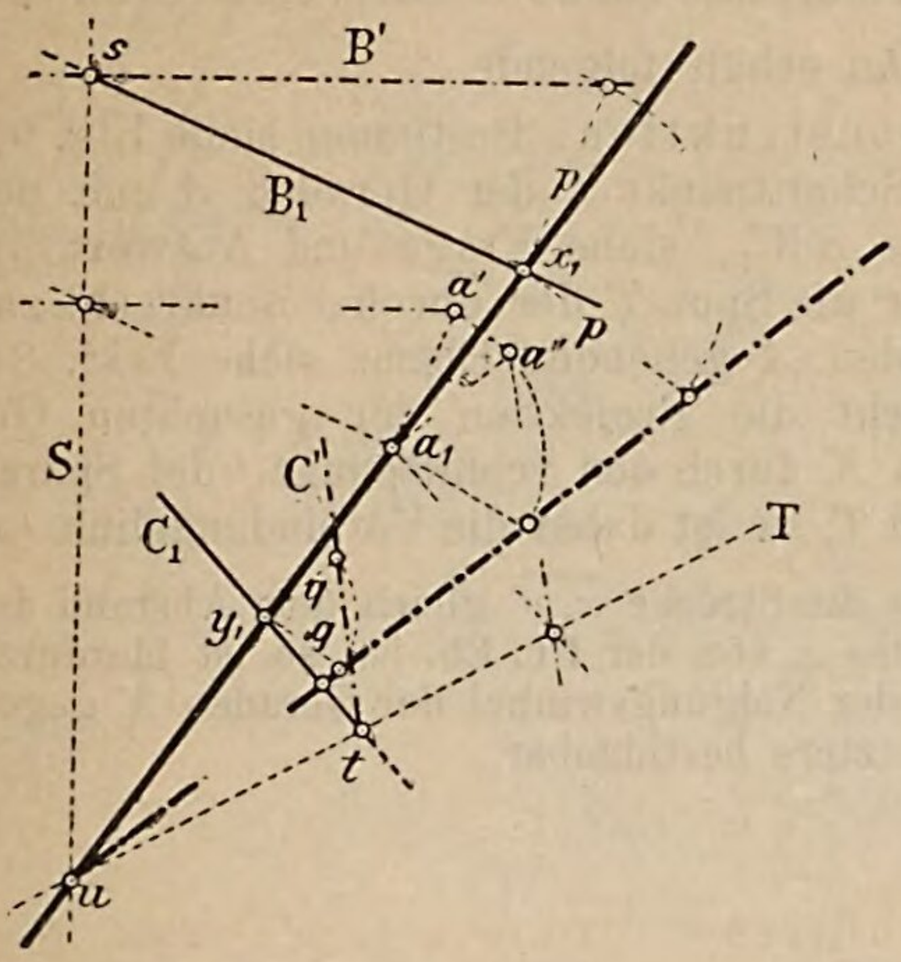
Auflösung. Die gesuchte Gerade muss sowohl in der Ebene aB als auch in der Ebene aC liegen, sie ist demnach die Schnittlinie beider Ebenen.

Man erhält folgende

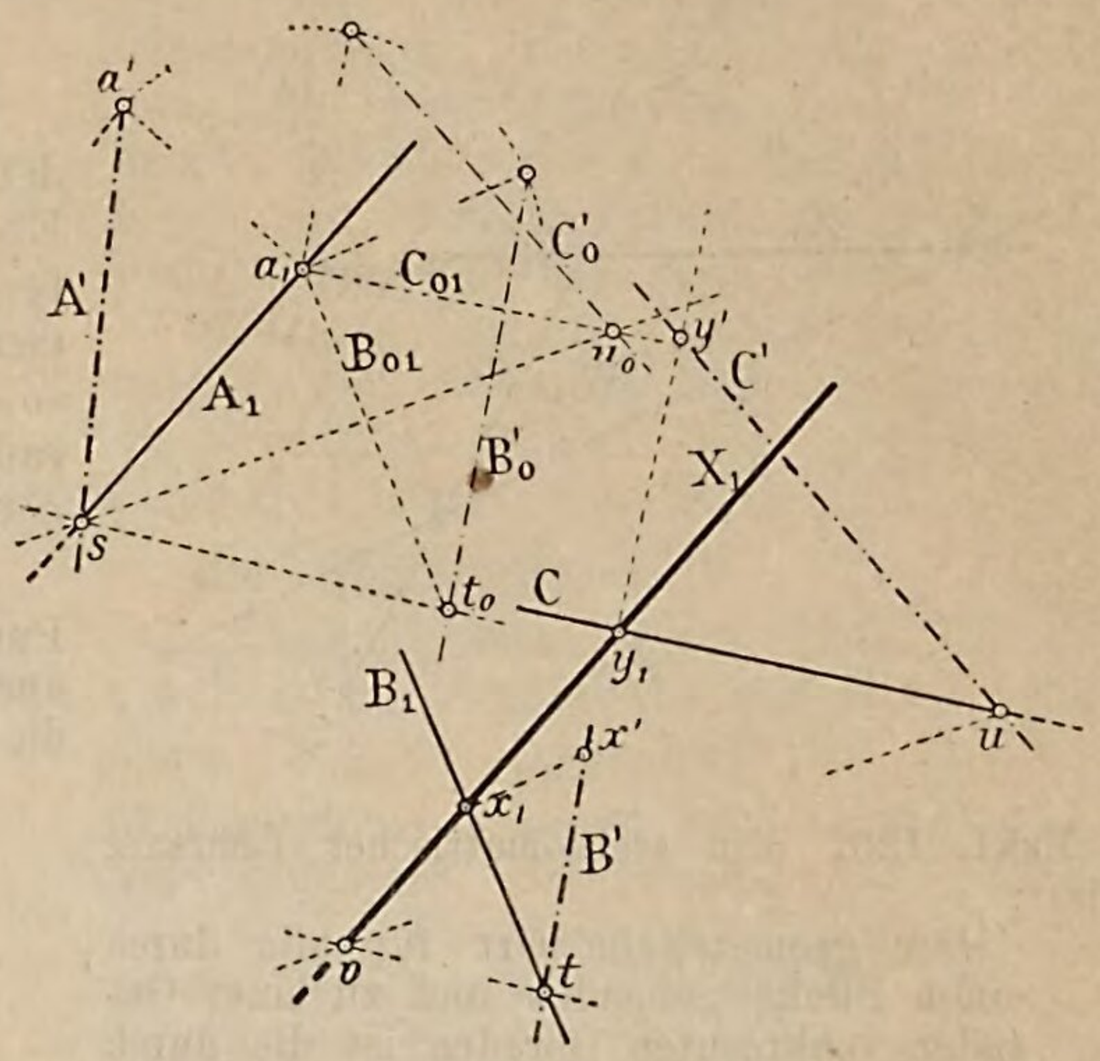
Konstruktion: Bestimme, siehe Fig. 89, die Spuren S und T beider Ebenen, siehe Aufgabe 12, so liefert deren Schnittpunkt u einen Punkt der gesuchten Geraden, deren Projektion daher a_1u ist; sie schneidet die Projektionen der gegebenen Geraden in den Punkten x_1 und y_1.

liche Ferne, d. h. soll die gesuchte Gerade durch einen unendlichen fernen Punkt gehen, so wird die Lage dieses Punktes bestimmt werden durch eine Gerade, zu welcher die gesuchte Gerade parallel sein soll. Man erhält in diesem Falle folgende Aufgabe:

Figur 89.



Figur 90.



Aufgabe 48. Parallel zu einer gegebenen Geraden A ist eine Gerade zu zeichnen, welche zwei gegebene Gerade B und C schneidet.

Auflösung. Die gesuchte Gerade muss je in einer Ebene liegen, welche die Gerade B, bezw. C enthält und parallel zu Geraden A läuft, sie ist daher die Schnittlinie beider Ebenen.

Man erhält folgende

Konstruktion: Um möglichst rasch die Schnittlinie der eben genannten beiden Ebenen zu erhalten, nehme man auf der Geraden A, siehe Figur 90, den Punkt a willkürlich an, ziehe durch a die Parallelen B_0 zu B bezw. C_0 zu C, und ermittele deren Spuren t_0 bezw. u_0; so sind die Verbindungslinien st_0 und su_0 die Richtungen der Spuren oben genannter Ebenen; denn die Ebenen AB_0 bezw. AC_0 sind parallel zu diesen.

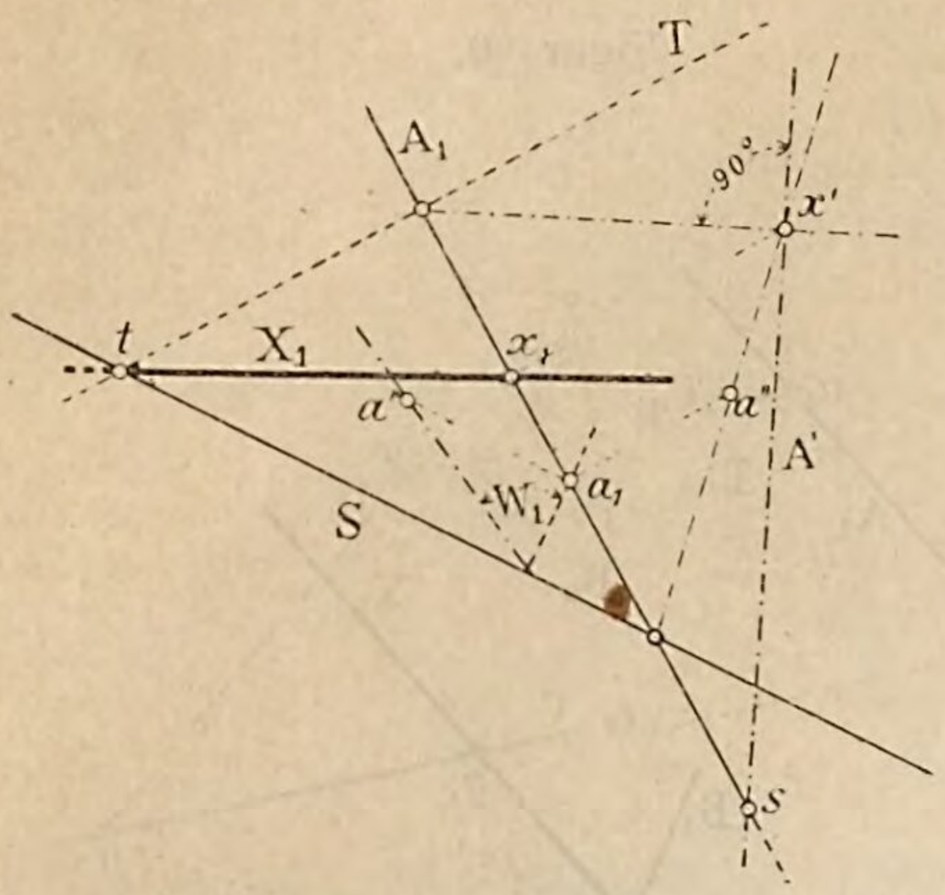
Zieht man daher durch die Spuren t und u der beiden Geraden B und C Parallele zu su_0 bezw. tu_0, so geht durch deren Schnittpunkt v parallel zu A_1 die Projektion X_1 der gesuchten Geraden. Sie schneidet auf B_1 und C_1 die Projektionen x_1 und y_1 der Schnittpunkte von B und C mit X aus.

Da die Punkte x und y auch den Geraden B und C angehören, so sind ihre Abstände von der **Pr. Eb.** bestimmt.

Erkl. 128. Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung müssen die Abstände der Punkte x und y von der **Pr. Eb.**, je nachdem dieselben als den Geraden B und C oder aber der Geraden X angehörig genommen werden, dieselbe Grösse besitzen.

Aufgabe 49. In einer gegebenen Ebene SW_1 ist eine Gerade zu zeichnen, welche eine gegebene Gerade A rechtwinklig schneidet.

Figur 91.



Auflösung. Die gesuchte Gerade geht einerseits durch den Schnittpunkt der Geraden A mit der Ebene SW_1 und liegt ausserdem in der durch diesen Schnittpunkt senkrecht zur Geraden A gezogenen Ebene, sie ist daher die Schnittlinie beider Ebenen, siehe Erkl. 129.

Man erhält folgende

Konstruktion: Bestimme, siehe Fig. 91, den Schnittpunkt x der Geraden A mit der Ebene SW_1, siehe Frage und Antwort 31, ferner die Spur T der durch x senkrecht zur Geraden A gehenden Ebene, siehe Erkl. 84, so geht die Projektion der gesuchten Geraden X durch den Schnittpunkt t der Spuren S und T, sie ist daher die Verbindungslinie tx.

Da die Strecke $\overline{x_1 x'}$ gleich dem Abstand des Punktes x von der **Pr. Eb.** ist, so ist hierdurch auch der Neigungswinkel der Geraden X gegen die letztere bestimmbar.

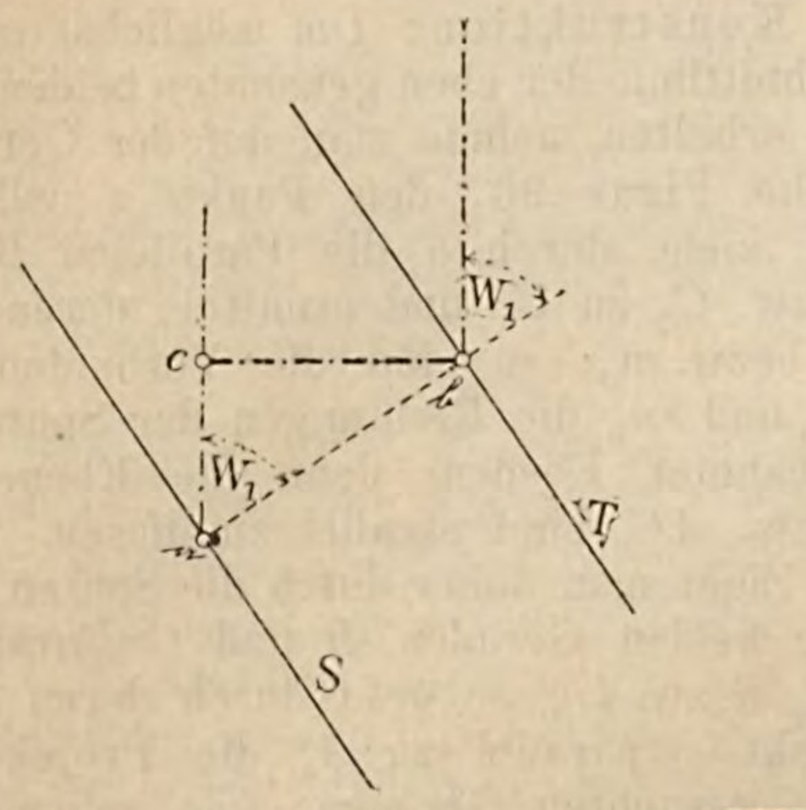
Erkl. 129. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Der geometrische Ort für alle durch einen Punkt gehenden und zu einer Geraden senkrechten Geraden ist die durch den Punkt senkrecht zur Geraden gezogene Ebene."

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Aufgabe 50. Man soll den Abstand zweier parallelen Ebenen SW_1 und TW_1 in wahrer Grösse zeichnen.

Figur 92.



Auflösung. Der gesuchte Abstand ist das zwischen den beiden Ebenen gelegene Stück einer zu diesen Ebenen senkrechten Geraden.

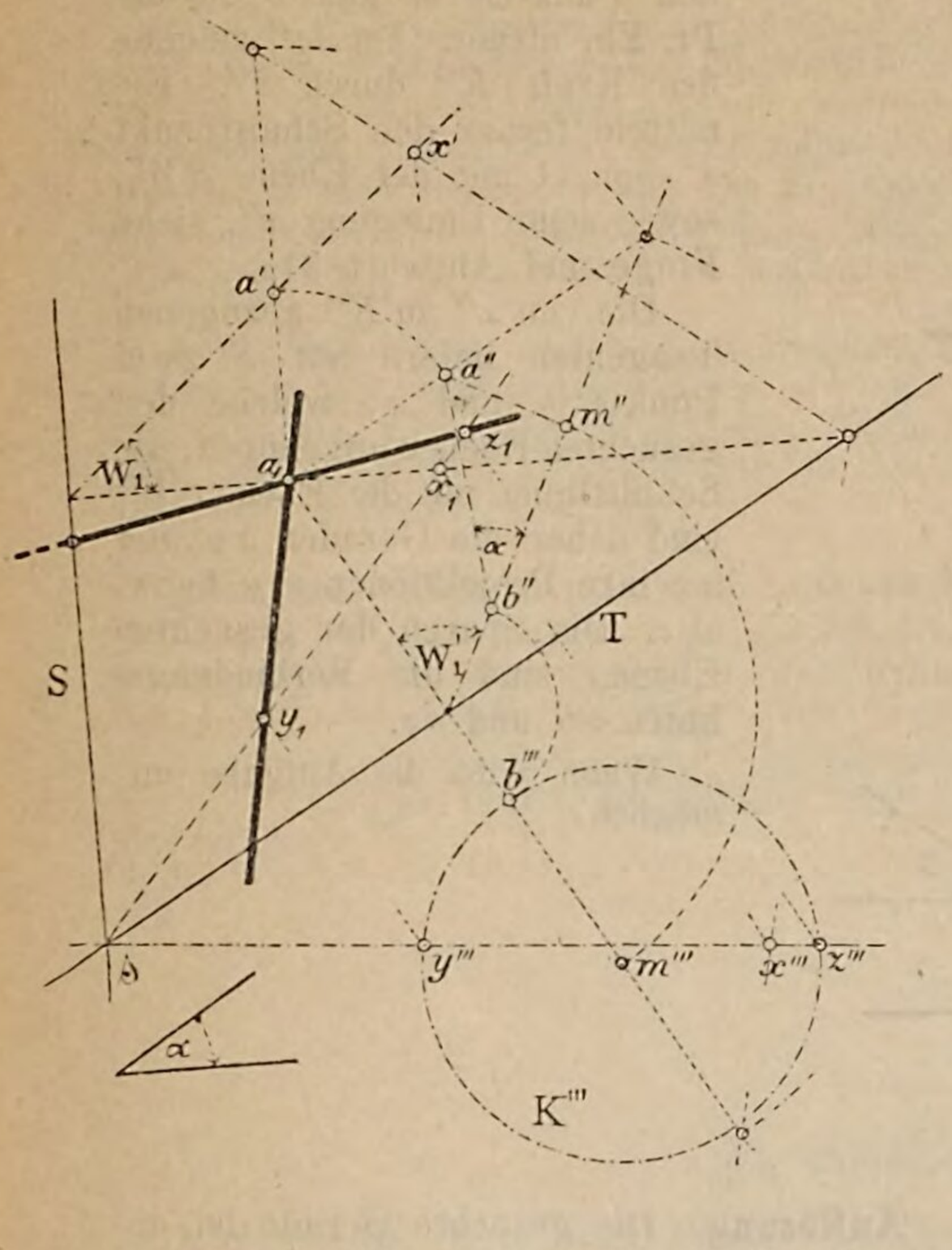
Man erhält folgende

Konstruktion: Ziehe $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, siehe Fig. 92, senkrecht zu S bezw. T und fälle vom Schnittpunkte $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ mit T eine Senkrechte $\mathfrak{b}\,c$ auf den zweiten Winkelschenkel von W_1. Die Länge dieser Senkrechten ist gleich dem gesuchten Abstande beider Ebenen in wahrer Grösse.

Aufgabe 51. Durch einen Punkt a einer gegebenen Ebene Sa ist eine Gerade zu zeichnen, welche mit einer zweiten gegebenen Ebene TW_1' einen gegebenen Winkel α bildet.

Auflösung. Soll die gesuchte Gerade mit der gegebenen Ebene TW_1' einen gegebenen

Figur 93.



Erkl. 130. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Jede durch die Spitze eines senkrechten Kreiskegels gehende Ebene schneidet aus dem Kegel im allgemeinen zwei durch die Kegelspitze gehende Gerade, d. h. zwei Mantellinien aus."

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Winkel α bilden, so ist sie Mantellinie eines senkrechten Kreiskegels, siehe Erkl. 59, dessen Achse die durch den Punkt a zu SW_1 gezogene Senkrechte ist. Dieser Kegel trifft die genannte Ebene nach einem Kreise K, dessen Halbmesser gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks sein wird, dessen andere Kathete gleich der Länge der obigen Senkrechten, der dieser Kathete gegenüberliegende Winkel aber gleich α ist. Vorstehendes folgt unmittelbar aus Erkl. 59, wenn man in derselben statt „**Pr. Eb.**" die gegebene Ebene und statt „Projizierende" die Senkrechte zur gegebenen Ebene setzt.

Nun soll aber die gesuchte Gerade auch noch in der Ebene Sa liegen; sie ist daher die Schnittlinie dieser Ebene mit dem oben genannten Kegel, siehe Erkl. 130.

Man erhält folgende

Konstruktion: Ziehe, siehe Figur 93, durch a die Senkrechte zur Ebene TW_1', siehe Erkl. 83, trage an $a''m''$ in a'' den Winkel $90^0 - \alpha$ an, so ist die Strecke $\overline{m''b''}$ der Halbmesser des Kreises K. Lege nun die Ebene TW_1' samt den Punkten m und b in die **Pr. Eb.** nach m''' und b''' um, siehe Frage und Antwort 34, und beschreibe um m''' mit $\overline{m'''b'''}$ als Halbmesser den Kreis K''', so stellt derselbe die Umlegung des Kreises K dar.

Bestimme ferner die Schnittlinie sx der Ebenen Sa und TW_1', siehe Frage 41, sowie ihre Umlegung sx'''. Letztere Linie schneidet K''' in zweien Punkten y''' und z''', denen auf sx_1 die Punkte y_1 und z_1 als Punkte der gesuchten Geraden entsprechen. Die Projektionen dieser Geraden sind daher die Verbindungslinien a_1y_1 und a_1z_1.

Wann wird die Aufgabe unmöglich?

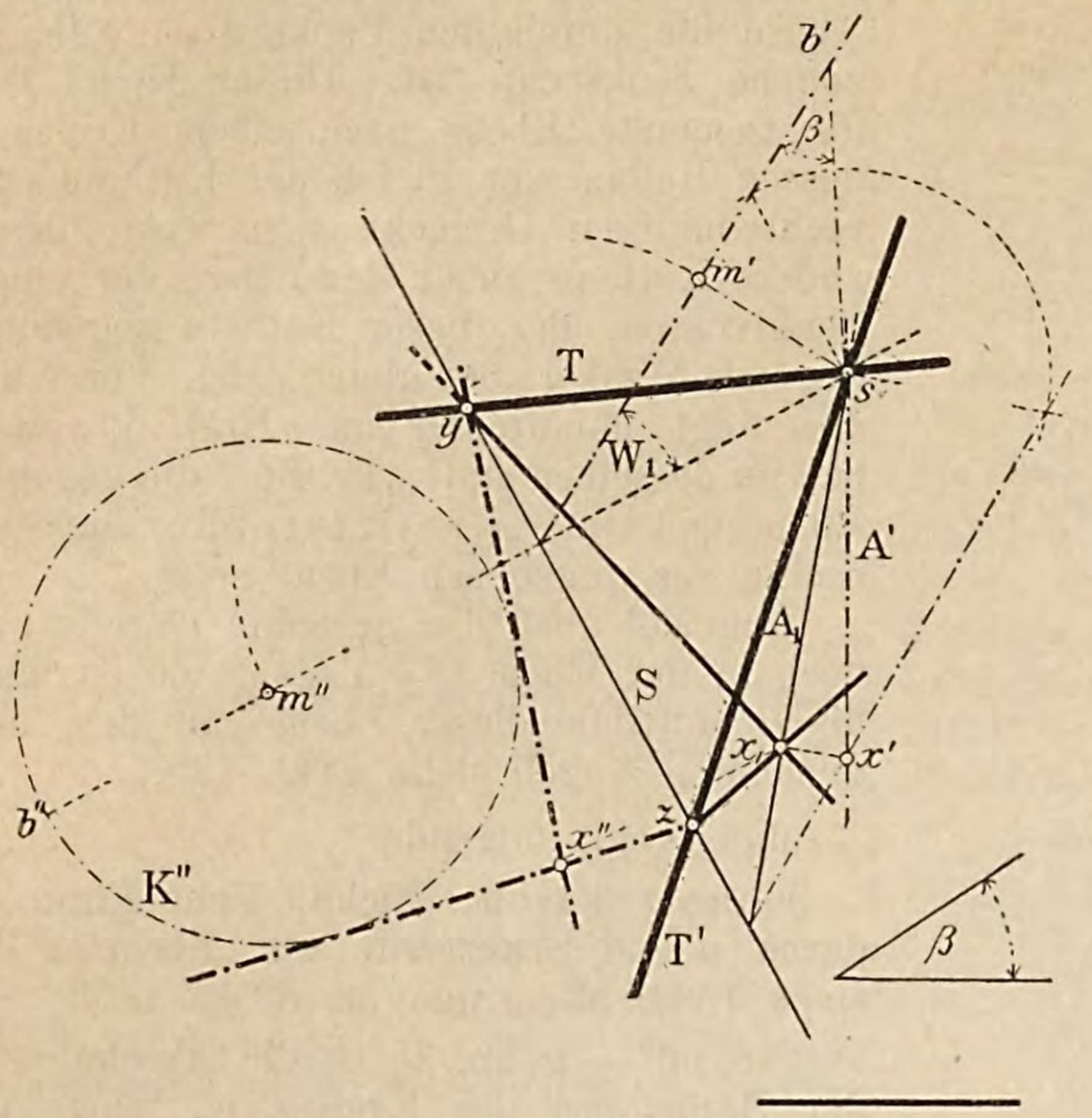
Aufgabe 52. Durch eine gegebene Gerade A ist eine Ebene zu legen, welche mit einer Ebene SW_1 einen gegebenen Winkel β bildet.

Auflösung. Nimmt man auf der Geraden A einen beliebigen Punkt als Spitze eines Kegels, dessen Mantellinien mit der Ebene SW_1 den gegebenen Winkel β bilden, so ist die Schnittlinie der gesuchten Ebene mit der gegebenen eine Tangente an den Schnittkreis K des Kegels mit der Ebene SW_1 und zwar geht diese Tangente durch den Schnittpunkt x der Geraden A mit der Ebene SW_1.

Man erhält folgende

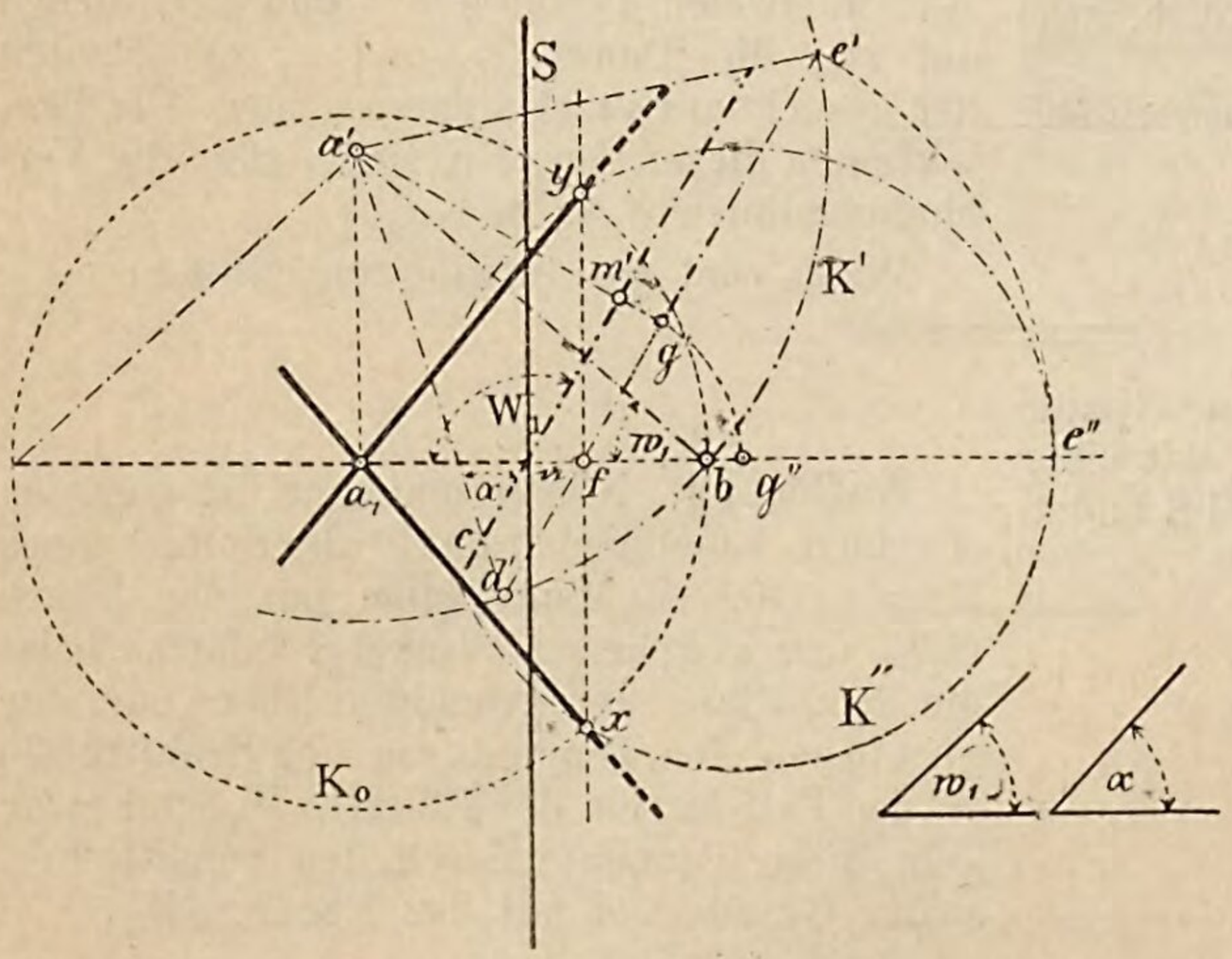
Konstruktion: Fälle, siehe Figur 94, etwa gleich von dem Punkte s der Geraden A die Senkrechte sm' zur Ebene SW_1, siehe Erkl. 83, trage an sm' den Winkel $90^0 - \beta$

Figur 94.



Aufgabe 53. Durch einen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche mit der **Pr. Eb.** sowie mit einer Ebene SW_1 gegebene Winkel w_1 und α bildet.

Figur 95.



Auflösung. Die gesuchte Gerade ist die Schnittlinie zweier Drehungskegel, deren Mantellinien mit der **Pr. Eb.** und der Ebene SW_1 bezw. die Winkel w_1 und α einschliessen, siehe Erkl. 59 sowie Aufgabe 51.

Man erhält folgende

Konstruktion: Zeichne durch a die Senkrechte am zur Ebene SW_1, siehe Erkl. 83. Die Geraden a_1a' und $a'm'$ stellen die Umlegungen der Achsen der oben erwähnten Kegel dar. Zieht man daher durch a' die Geraden $a'b$ und $a'c$ die erstere unter dem Winkel $90^0 - w_1$ gegen $a'a_1$, die letztere unter dem Winkel $90^0 - \alpha$ gegen $a'm'$ geneigt, so sind diese Linien die umgelegten Schnittlinien der projizierenden Ebene a_1a mit den beiden Kegeln aw_1 und $a\alpha$, siehe Erkl. 132.

Um nun die Schnittlinie beider Kegel möglichst rasch zu erhalten, denke man sich um die gemeinsame Spitze a eine Kugel mit beliebigem Halbmesser gezeichnet und deren Schnittlinien mit den beiden Kegeln aufgesucht. Diese Schnittlinien sind Kreise senkrecht zur betreffenden Kegelachse und

Erkl. 131. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Zwei Drehungskegel mit gemeinsamer Spitze schneiden sich nach Mantellinien."

Erkl. 132. Die Kegel, deren Spitze der Punkt a ist und welche mit der **Pr. Eb.** bezw. der Ebene SW_1 die Winkel w_1 und α bilden, seien kurzweg durch aw_1 und $a\alpha$ bezeichnet.

Erkl. 133. Die beiden Kegelkreisebenen stehen auf der projizierenden Ebene $a_1\mathfrak{a}$ senkrecht, mithin auch ihre Schnittlinie; folglich steht ihre Projektion senkrecht zur Spur $a_1\mathfrak{a}$ der Ebene $a_1\mathfrak{a}$, siehe Erkl. 86.

Erkl. 134. Legt man die Schnittkreisebene der Kugel mit dem Kegel $a\alpha$ in die **Pr. Eb.** um, so erhält man als umgelegten Schnittkreis von Kugel und Kegel den um g'' mit einem Halbmesser gleich der Strecke $\overline{g'd'}$ beschriebenen Kreis K'', welcher durch die Punkte x und y hindurchgeht.

durch ihre gemeinsamen Punkte gehen die Schnittlinien beider Kegel.

Zieht man daher um a', etwa mit einem Halbmesser gleich $\overline{a'b}$ den Kreis K', so ist dieser aufzufassen als die umgelegte Schnittlinie der projizierenden Ebene $a_1\mathfrak{a}$ mit der Kugel und K' schneidet die Gerade $a'c'$ in einem Punkte d'. Die durch d' zu $a'm'$ gezogene Senkrechte $d'e'$ trifft $a_1\mathfrak{a}$ in f und stellt die umgelegte Schnittlinie der projizierenden Ebene $a_1\mathfrak{a}$ mit der Schnittkreisebene des Kegels $a\alpha$ und der Kugel dar. Die Schnittlinie der Kugel mit dem Kegel aw_1 ist der in der **Pr. Eb.** liegende, um a_1 mit einem Halbmesser gleich $\overline{a_1b}$ beschriebene Kreis K_0. Die Schnittlinie beider Kegelkreisebenen steht nun senkrecht zu a_1f, siehe Erkl. 133, und geht durch f; sie trifft K_0 in zweien Punkten x und y, welche beiden Kegeln, d. h. den gesuchten Geraden angehören. Die Projektionen derselben sind daher a_1x und a_1y, siehe Erkl. 134.

Wie viele Gerade der verlangten Art gibt es im allgemeinen? Wann ist die Aufgabe nicht mehr möglich?

g) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 54. Durch einen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche zu zweien Ebenen SW_1 und TW_1' parallel läuft.

Aufgabe 55. Durch einen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche eine Gerade B schneidet und zu einer Geraden C senkrecht steht.

Aufgabe 56. Durch einen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche auf zweien Geraden B und C senkrecht steht.

Aufgabe 57. Durch einen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche zu einer Ebene SW_1 parallel läuft und auf einer Geraden B senkrecht steht.

Aufgabe 58. Eine Gerade ist zu zeichnen, welche zwei Gerade A und B schneidet, zu einer dritten Geraden C senkrecht steht und endlich zu einer Ebene SW_1 parallel läuft.

Aufgabe 59. Zu einer gegebenen Ebene SW_1 ist eine Parallelebene in gegebenem Abstande von ersterer zu zeichnen.

Wie viele Ebenen der verlangten Art gibt es?

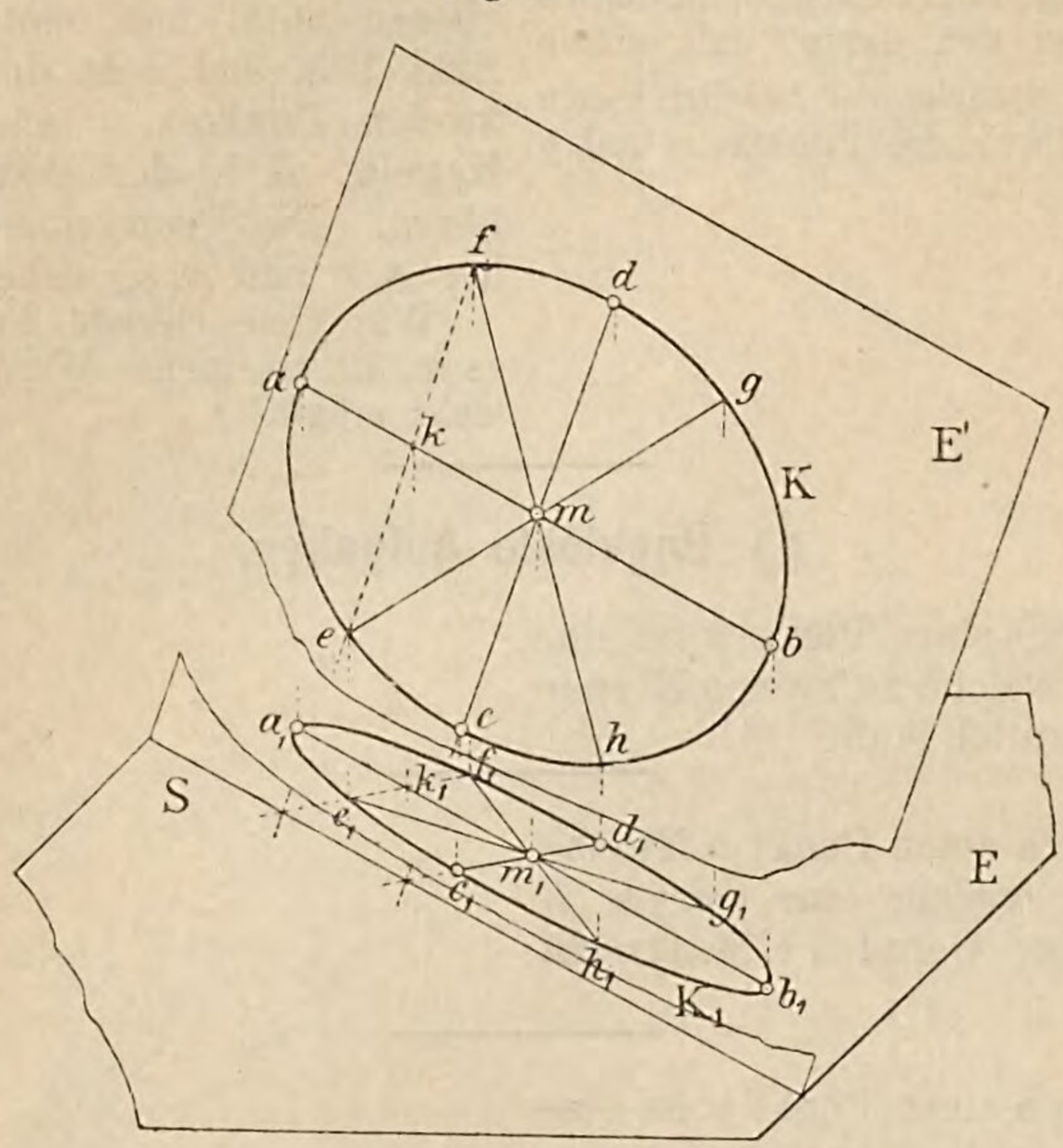
Aufgabe 60. Durch einen Punkt a ist eine Ebene zu legen, welche zu einer Ebene SW_1 senkrecht steht und mit einer Ebene TW_1 einen Winkel β bildet.

Aufgabe 61. Durch einen Punkt a ist eine Ebene zu legen, welche mit zweien gegebenen Ebenen (der **Pr. Eb.** und der Ebene SW_1) die gegebenen Winkel W_1 und β bildet.

F) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Kreises.

a) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Kreises im allgemeinen.

Figur 96.



Frage 46. Was für eine Linie erhält man im allgemeinen als rechtwinklige Projektion eines Kreises?

Erkl. 135. Das Wort „Ellipse“ stammt aus dem Griechischen (elleipsis) und bezeichnet eine länglich geformte, geschlossene Linie.

Antwort. Projiziert man, siehe Fig. 96, einen in einer Ebene E' liegenden Kreis K auf die **Pr. Eb.** E, so erhält man im allgemeinen eine geschlossene Linie K_1, welche **Ellipse** heisst.

Frage 47. Wie lässt sich in der Projektionszeichnung die Projektion einer in einer Ebene SW_1 liegenden Kreislinie K zeichnen?

Antwort. Ist $m_1 m'$, siehe Figur 97, der Mittelpunkt des Kreises K, so lege man, siehe Frage und Antwort 34, die Kreisebene samt dem Mittelpunkt m, mittels des Konstruktionsdreiecks $m_1 m m'$ in die **Pr. Eb.** um, wodurch der Punkt m nach m'' gelangt. Um

Erkl. 136. Zufolge der zwischen der Kreislinie K'' und der Ellipse K_1 bestehenden affinen Beziehung, siehe Erkl. 93 und 94, lassen sich auch mit Benützung dieser Beziehung Punkte der Kreisprojektion leicht ermitteln. Zieht man beispielsweise, siehe Figur 97, durch m'' eine beliebige Gerade, etwa $h''f''$, so entspricht derselben die Gerade $m_1 s$ und auf ihr liegen im Schnitt der durch h'' und f'' zu S gezogenen Senkrechten die Punkte h_1 und f_1 der Ellipse K_1.

m'' als Mittelpunkt beschreibe mit dem als gegeben vorausgesetzten Halbmesser den Kreis K''. Nimmt man nun auf K'' eine Reihe von Punkten a'', b'' etc. $\cdots h''$ an, und bestimmt mittels der zugehörigen Konstruktionsdreiecke, wie die Figur 97 zeigt, deren Projektionen a_1, b_1 $\cdots h_1$, so erhält man durch Verbindung dieser Punkte die Projektion K_1 des Kreises K.

Figur 97.

b) Ueber einige Eigenschaften der Ellipse.

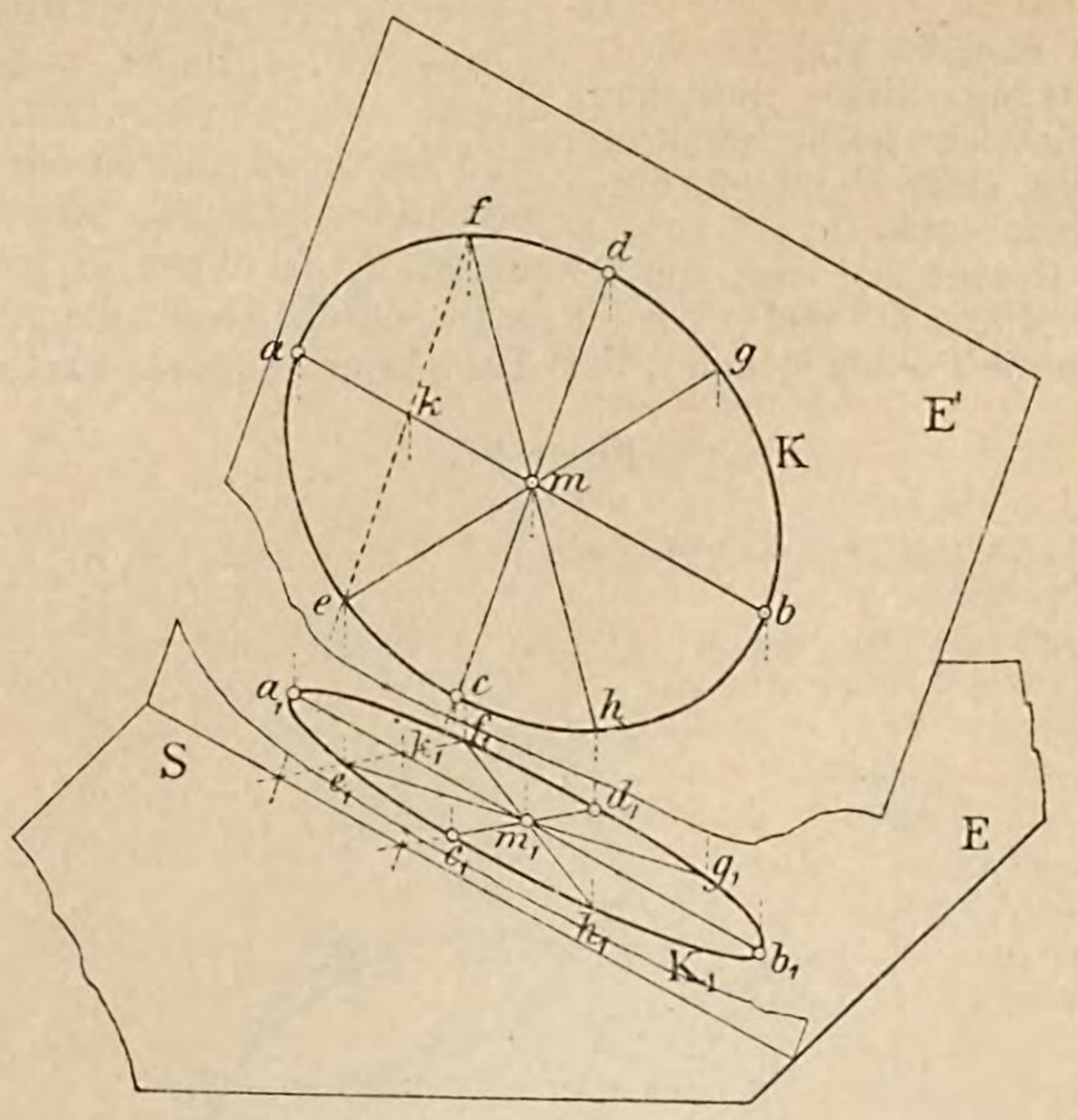
Frage 48. Welche Eigenschaften kommen der Ellipse als Projektion eines Kreises zu?

Antwort. Für die Ellipse K_1, s. Fig. 96a und 97, ergeben sich zufolge ihrer Entstehung als Kreisprojektion unmittelbar folgende Eigenschaften.

Zunächst erkennt man, dass die Linie K_1 einen Mittelpunkt m_1 besitzt, nämlich die Projektion m_1 des Kreismittelpunktes m; denn jeder Kreisdurchmesser projiziert sich als eine durch m_1 gehende und in letzterem Punkte gehälftete Strecke, siehe Erkl. 51. Jede solche Strecke ist ein Ellipsendurchmesser. Doch besitzen die Ellipsendurchmesser verschiedene Länge.

Zieht man, s. Fig. 96a u. 97, den zur Spur S parallelen, bezw. senkrechten Kreis-

Figur 96 a.



Erkl. 137. Aus der nebenstehenden Antwort auf die Frage 48 folgen die Sätze:

„Eine Ellipse besitzt einen Mittelpunkt und unendlich viele Durchmesser von verschiedener Länge, welche im Mittelpunkt halbiert werden."

„Jeder Ellipsendurchmesser wird durch den Mittelpunkt in zwei gleich grosse Ellipsenhalbmesser geteilt."

„Unter den Durchmessern der Ellipse befindet sich ein **grösster** und ein **kleinster**, welche beide auf einander senkrecht stehen und die **Hauptachsen** oder kurzweg die **Achsen** der Ellipse heissen. Die grosse Achse läuft **parallel zur Spur** der Kreisebene, die kleine Achse steht **senkrecht** zu ihr.

Erkl. 138. Jede der beiden Hauptachsen teilt die Ellipse in zwei kongruente, symmetrisch liegende Hälften. Durch die beiden Hauptachsen zerfällt die Ellipse in vier kongruente Teile, welche Ellipsenquadranten, siehe Erkl. 139, heissen.

Erkl. 139. Das Wort „Quadrant" stammt aus dem Lateinischen (quadrans) und heisst das Viertel.

Erkl. 140. In einer Ellipse gibt es unendlich viele Paare gleich langer Durchmesser, welche zu jeder der beiden Hauptachsen symmetrisch liegen.

* **Erkl. 141.** Bezeichnet r die Länge des Kreishalbmessers, W_1 den Winkel der Kreisebene mit der **Pr. Eb.**, α die Länge der grossen durchmesser $\overline{ab}$ bezw. $\overline{cd}$, so sind die zugehörigen Projektionen $\overline{a_1b_1}$ und $\overline{c_1d_1}$ ebenfalls parallel, bezw. senkrecht zur Spur S, stehen somit aufeinander senkrecht. Ausserdem folgt, s. Frage und Antwort 16, sowie Erkl. 100, dass $\overline{a_1b_1}$ der grösste, $\overline{c_1d_1}$ aber der kleinste Ellipsendurchmesser sein muss, siehe Erkl. 141. Zwei zu einem der Durchmesser $\overline{ab}$, bezw. $\overline{cd}$ symmetrisch liegende Durchmesser, z. B. $\overline{eg}$ und $\overline{bf}$ projizieren sich als zwei gleich lange, symmetrisch zu $\overline{a_1b_1}$ und $\overline{c_1d_1}$ liegende Ellipsendurchmesser $\overline{e_1g_1}$ und $\overline{b_1f_1}$, siehe Erkl. 100.

und β die der kleinen Halbachse, so bestehen nach Erkl. 48 zwischen r, α, β und W_1 folgende Beziehungen:

Es ist:

18) . . . $\alpha = r$

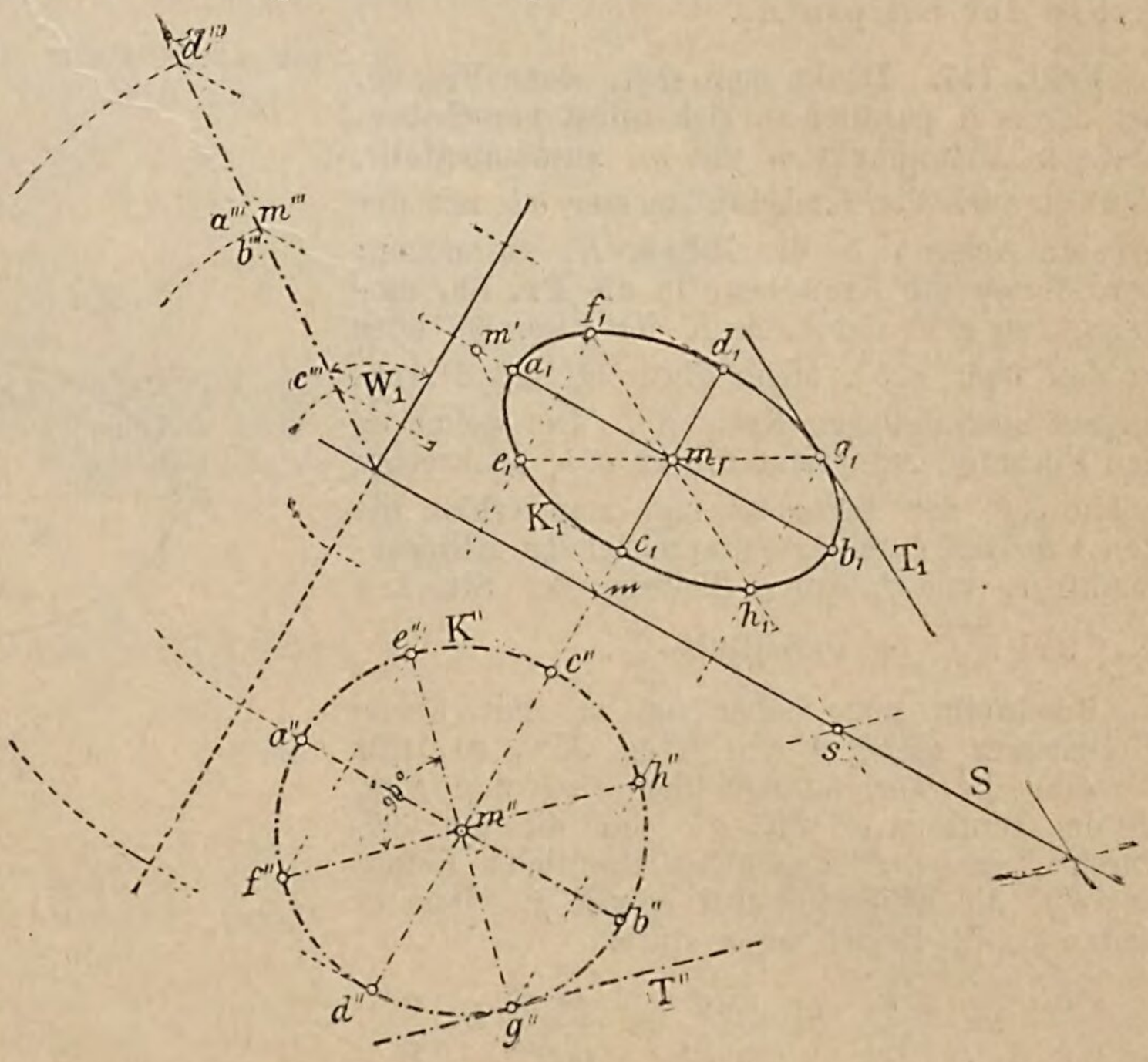
19) . . . $\beta = r \times \cos W_1$

***Erkl. 142.** Das in der Antwort auf die Frage 48, sowie in den Erkl. 137 bis 140 Gesagte lässt sich in folgendem Satze zusammenfassen:

„Ein in einer Ebene SW_1 liegender Kreis projiziert sich im allgemeinen stets als eine Ellipse, deren grosse Achse **parallel** und deren kleine Achse senkrecht zur Spur S der Kreisebene läuft. Die Länge der **halben grossen Achse** ist gleich dem Kreishalbmesser, die der **halben kleinen Achse** gleich dem Kreishalbmesser multipliziert mit dem Cosinus des Winkels W_1 der Kreisebene mit der **Pr. Eb.** Steht die Kreisebene auf der **Pr. Eb.** senkrecht, so geht die Projektion des Kreises in eine **Gerade** über, ist die Kreisebene parallel zur **Pr. Eb.**, so ist die Projektion des Kreises **gleichfalls ein Kreis**, kongruent dem in der Ebene SW_1 liegenden Kreise K.“

Erkl. 143. Zeichnet man, siehe Figur 97 a, an den Kreis K'' eine Tangente T'' und bestimmt deren Projektion T_1, so ist letztere eine Tangente an die Ellipse K_1, denn die Kreistangente ist als Verbindungslinie von zweien unendlich nahen Punkten aufzufassen, denen in der **Pr. Eb.** wieder zwei unendlich nahe Punkte entsprechen; ihre Verbindungslinie T_1 muss demnach eine Tangente an die Kreisprojektion sein.

Figur 97 a.



Erkl. 144. Zeichnet man, siehe Figur 97 a, im Kreise K'' zwei auf einander senkrechte Kreisdurchmesser, z. B. $\overline{e''g''}$ und $\overline{f''h''}$, so entsprechen denselben als Projektionen die Ellipsendurchmesser $\overline{e_1 g_1}$ und $\overline{f_1 h_1}$. Da nun die Tangenten in den Kreispunkten e'' und g'', ebenso in f'' und h'' zu einander und zum Durchmesser $\overline{f''h''}$ bezw. $\overline{e''g''}$ parallel sind, so werden auch, siehe Erkl. 63, die Tangenten in den Punkten e_1 und g_1, ebenso f_1 und h_1 zu einander, sowie zu dem Durchmesser $\overline{f_1 h_1}$, bezw. $\overline{e_1 g_1}$ parallel sein, d. h. den Durchmessern $\overline{e_1 g_1}$ und $\overline{f_1 h_1}$ kommt die Eigenschaft zu, dass die Tangenten in den End-

punkten des einen Durchmessers parallel zum andern Durchmesser sind. Zwei solche Durchmesser heissen **zwei conjugierte Durchmesser** der Ellipse, siehe Erkl. 145.

Aus vorstehender Erklärung folgt der Satz:

„Zwei auf einander senkrechte Durchmesser eines Kreises K projizieren sich stets als zwei conjugierte Durchmesser der Ellipse K_1. In einer Ellipse gibt es **unzählig** viele Paare conjugierter Durchmesser."

Erkl. 145. Das Wort „conjugiert" stammt aus dem Lateinischen (conjugatio, Zusammenfügung) und heisst so viel wie zusammengehörig.

Erkl. 146. Zieht man, siehe Figur 96, durch einen beliebig auf K gewählten Punkt f eine Kreissehne $\overline{fe}$ parallel zum Durchmesser $\overline{cd}$ und denkt sich die Projektion $\overline{f_1 e_1}$ von $\overline{fe}$ gezeichnet, so finden, wenn k bezw. k_1 den Mittelpunkt von $\overline{fe}$ bezw. $\overline{f_1 e_1}$ bezeichnet, wie aus der Figur ersichtlich ist, folgende Verhältnisgleichheiten statt: Es ist:

$$\frac{\overline{ef}}{\overline{e_1 f_1}} = \frac{\overline{kf}}{\overline{k_1 f_1}} = \frac{\overline{md}}{\overline{m_1 d_1}} = \frac{r \times \cos W_1}{r}$$

oder in Rücksicht auf die Beziehungen 18) u. 19):

$$20) \ldots\ldots \frac{\overline{kf}}{\overline{k_1 f_1}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

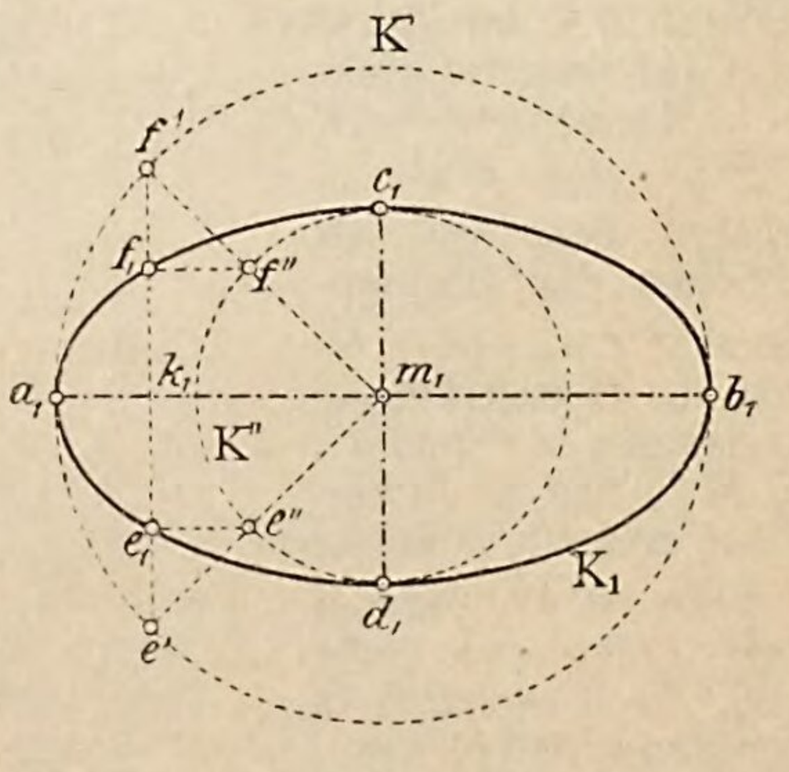
d. h. die halbe Kreissehne $\overline{ef}$ verhält sich zur halben Ellipsensehne $\overline{e_1 f_1}$, wie die **halbe grosse** Achse zur **halben kleinen** Achse der Ellipse K_1.

Erkl. 147. Denkt man sich, siehe Fig. 96, den Kreis K parallel zu sich selbst verschoben, bis sein Mittelpunkt m mit m_1 zusammenfällt, so fällt auch der Kreisdurchmesser $\overline{ab}$ mit der grossen Achse $\overline{a_1 b_1}$ der Ellipse K_1 zusammen; wird ferner die Kreisebene in die **Pr. Eb.** umgelegt, so geht der Kreis K der Figur 96 über in den über $\overline{a_1 b_1}$, siehe Figur 98, als Durchmesser beschriebenen Kreis K'. Der Sehne $\overline{ef}$ der Figur 96 entspricht die zu $a_1 b_1$ senkrechte Sehne $\overline{e'f'}$ der Figur 98 und man erhält die den Punkten e und f entsprechenden Ellipsenpunkte e_1 und f_1 durch Teilung der Strecken $\overline{k_1 e'}$ und $\overline{k_1 f'}$ im Verhältnis $\frac{\alpha}{\beta}$.

Beschreibt man daher um m_1 mit einem Halbmesser gleich β den Kreis K'', so trifft derselbe die Verbindungslinien $e'm_1$ und $f'm_1$ in den Punkten e'' und f'' und die zu $a_1 b_1$ durch e'' bezw. f'' gezogenen Parallelen liefern auf $e'f'$ die Ellipsenpunkte e_1 und f_1, denn es finden ja die Beziehungen statt:

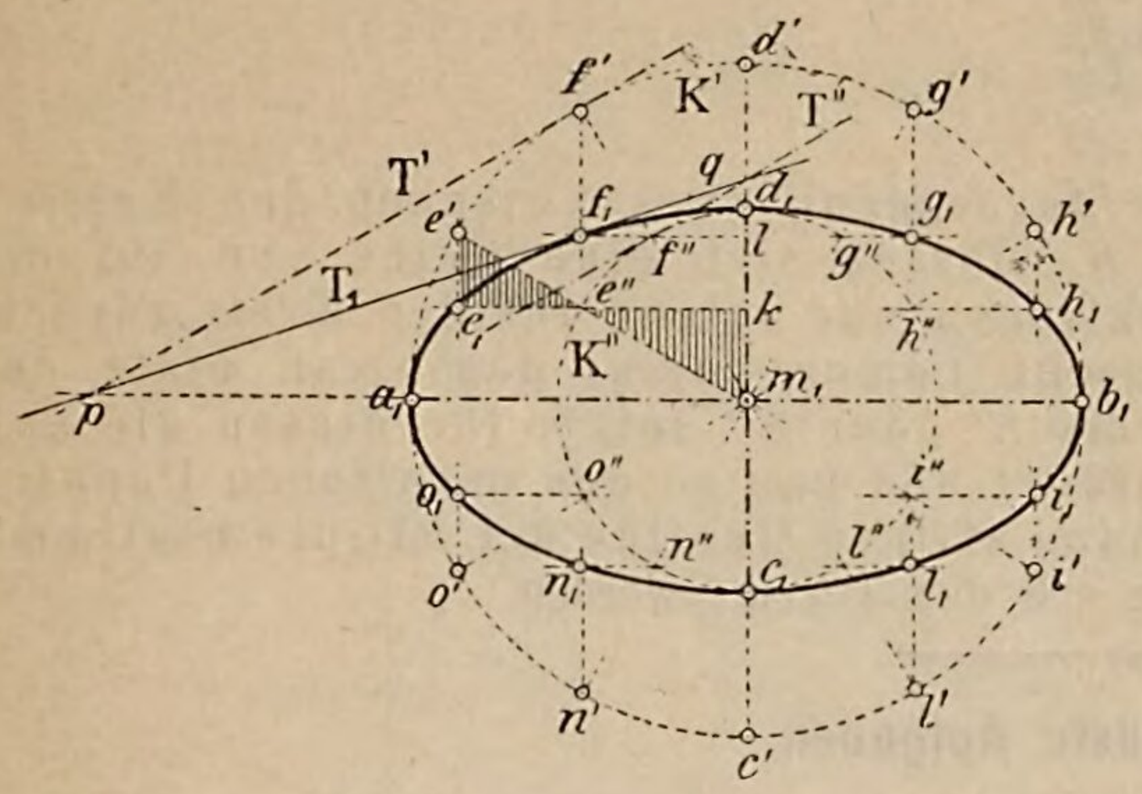
$$\frac{\overline{e'k_1}}{\overline{e_1 k_1}} = \frac{\overline{f'k_1}}{\overline{f_1 k_1}} = \frac{\overline{m_1 e'}}{\overline{m_1 e''}} = \frac{\overline{m_1 f'}}{\overline{m_1 f''}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Figur 98.



Frage 49. Welche Konstruktion der Ellipse gründet sich auf das in der Erkl. 147 Angeführte?

Figur 99.



Erkl. 148. Die Kreise K' und K'', siehe Figur 99, sind beide affin zur Ellipse K_1, wobei die grosse, bezw. kleine Achse die Affinitätsachse und die dazu Senkrechte die Affinitätsrichtung darstellt.

Erkl. 149. Dass der Kreis K'' affin zur Ellipse K_1 ist, kann man wie folgt beweisen:

Zufolge der Aehnlichkeit der Dreiecke $e' e_1 e''$ und $m_1 k e''$, siehe Figur 99, besteht die Verhältnisgleichheit:

$$\frac{\overline{e_1 e''}}{\overline{e'' k}} = \frac{\overline{e' e''}}{\overline{m_1 e''}}$$

aus welcher Gleichheit, nach einem Satze der Proportionslehre die weitere Gleichheit folgt:

$$\frac{\overline{e_1 e''} + \overline{e'' k}}{e'' k} = \frac{\overline{e' e''} + \overline{m_1 e''}}{\overline{m_1 e''}}$$

oder:

$$21) \ldots\ldots \frac{\overline{e_1 k}}{\overline{e'' k}} = \frac{m_1 e'}{\overline{m_1 e''}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Eine analoge Beziehung könnte auf die gleiche Weise für jeden Ellipsenpunkt nachgewiesen werden. Für den Ellipsenpunkt f_1 lautet diese Beziehung:

$$22) \ldots\ldots \frac{\overline{f_1 l}}{\overline{f'' l}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Aus den Gleichungen 21) und 22) folgt aber die weitere:

$$23) \ldots\ldots \frac{\overline{e_1 k}}{\overline{e'' k}} = \frac{\overline{f_1 l}}{\overline{f'' l}}$$

welche Gleichung besagt, dass die Verbindungslinien $e_1 f_1$ und $e'' f''$ sich in einem Punkte der Achse $c_1 d_1$ schneiden, womit in Rücksicht auf die Lage der Punkte e'' und e_1 bezw. f'' und f_1 und mit Bezug auf die Erkl. 93 und 94 die Affinität zwischen K'' und K_1 bedingt ist.

Antwort. Sind von einer Ellipse die beiden Hauptachsen bekannt, so ergibt sich folgende einfache Konstruktion der Ellipse unmittelbar: Beschreibe über den gegebenen Achsen, siehe Figur 99, als Durchmesser die Kreise K' und K'', nehme auf K' eine Reihe von Punkten e', f', g' etc. beliebig an (zweckmässig ist es, den Kreis K' in eine Anzahl gleicher Teile, vielleicht 12, zu teilen) und ziehe durch e', f' etc. die Kreishalbmesser, welche den Kreis K'' in den Punkten e'', f'', g'' etc. treffen. Zieht man endlich durch die auf je einem Halbmesser gelegenen Kreispunkte Parallele zu den Achsen und zwar durch die Punkte des Kreises K' Parallele zur kleinen, durch jene des Kreises K'' Parallele zur grossen Achse, so treffen sich je zwei zugehörige Parallele in Ellipsenpunkten.

Erkl. 150. Denkt man sich in einem der Ellipsenpunkte, etwa in f_1, siehe Figur 99, eine Tangente T_1 gezogen, so entspricht derselben in dem Kreise K' die Tangente T' in f', im Kreise K'' die Tangente T'' in f'' und es schneidet die Tangente T_1 die Tangenten T' und T'' in den Punkten p und q auf den Ellipsenachsen $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$.

Anmerkung 6. Zufolge des affinen Zusammenhanges zwischen den Kreisen K' und K'' und der Ellipse K_1, lassen sich eine Reihe von auf die Ellipse bezüglichen Konstruktionen auf solche für den Kreis zurückführen. Das Verfahren besteht immer darin, dass man statt der Ellipse den zu ihr affinen Kreis K' oder K'' setzt, für diesen die entsprechende Konstruktion ausführt und nun zu den erhaltenen Punkten oder Geraden die entsprechenden affinen Gebilde der Ellipse bestimmt. In einigen der folgenden Aufgaben soll dies gezeigt werden.

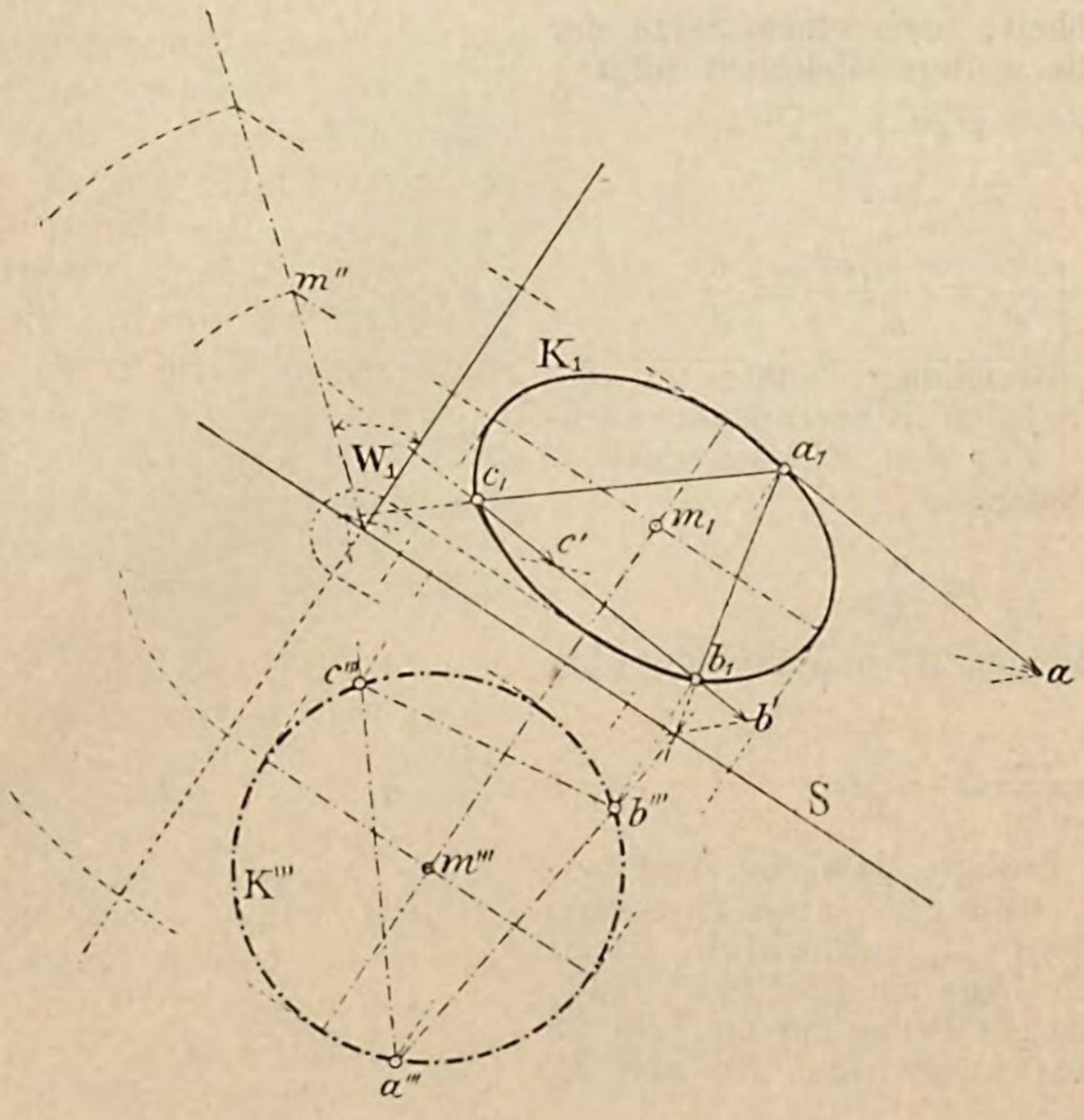
---

c) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 62. Drei Punkte a, b, c sind durch ihre Projektionen a_1, b_1, c_1 und ihre Abstände $\overline{a_1 a'}$, $\overline{b_1 b'}$, $\overline{c_1 c'}$ von der **Pr. Eb.** gegeben. Man soll die Projektion des durch die drei Punkte gehenden Kreises zeichnen.

Auflösung. Bestimme, siehe Figur 100, wie in Aufgabe 11 die Spur S, sowie den Winkel W_1 der Ebene abc. Lege letztere samt den Punkten a, b, c in die **Pr. Eb.** um und beschreibe den durch a''', b''', c''' gehenden Kreis K'''. Mittels K''' konstruiere K_1 unter Berücksichtigung des in der Antwort auf die Frage 47 sowie in Erkl. 136 Gesagten.

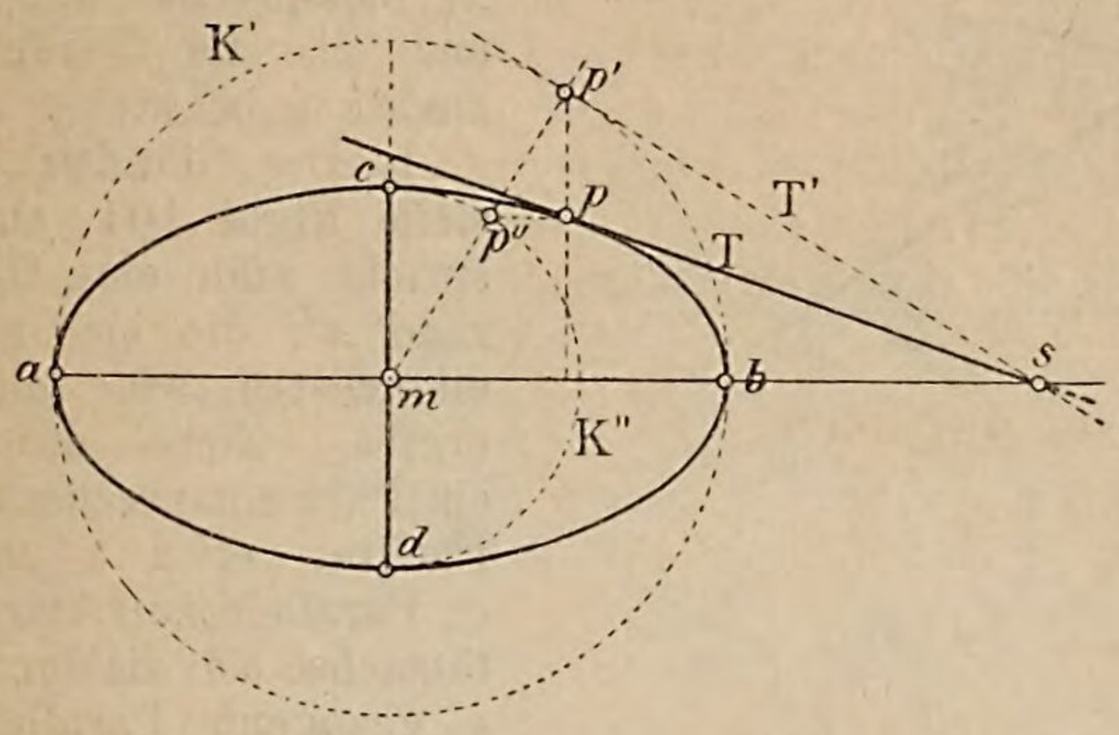
Figur 100.



Aufgabe 63. Von einer Ellipse ist gegeben die grosse Achse $\overline{ab}$ der Grösse und Lage nach, sowie ein Punkt p. Es ist:

a. die Grösse der zweiten Achse,
b. die Ellipse selbst und
c. eine Tangente an diese im Punkte p zu konstruieren.

Figur 101.



Auflösung a. Beschreibe, siehe Fig. 101, über $\overline{ab}$ als Durchmesser den Kreis K' und bestimme auf ihm den dem Punkte p entsprechenden Punkt p'. Zieht man nun mp' und durch p die Parallele pp'' zu ab bis zum Schnitt mit mp', so ist die Strecke $\overline{mp''}$ gleich der Länge der halben kleinen Achse der Ellipse, siehe Erkl. 147 und Antwort auf die Frage 49. Es ist somit $\overline{mc} = \overline{md} = \overline{mp''}$ zu machen.

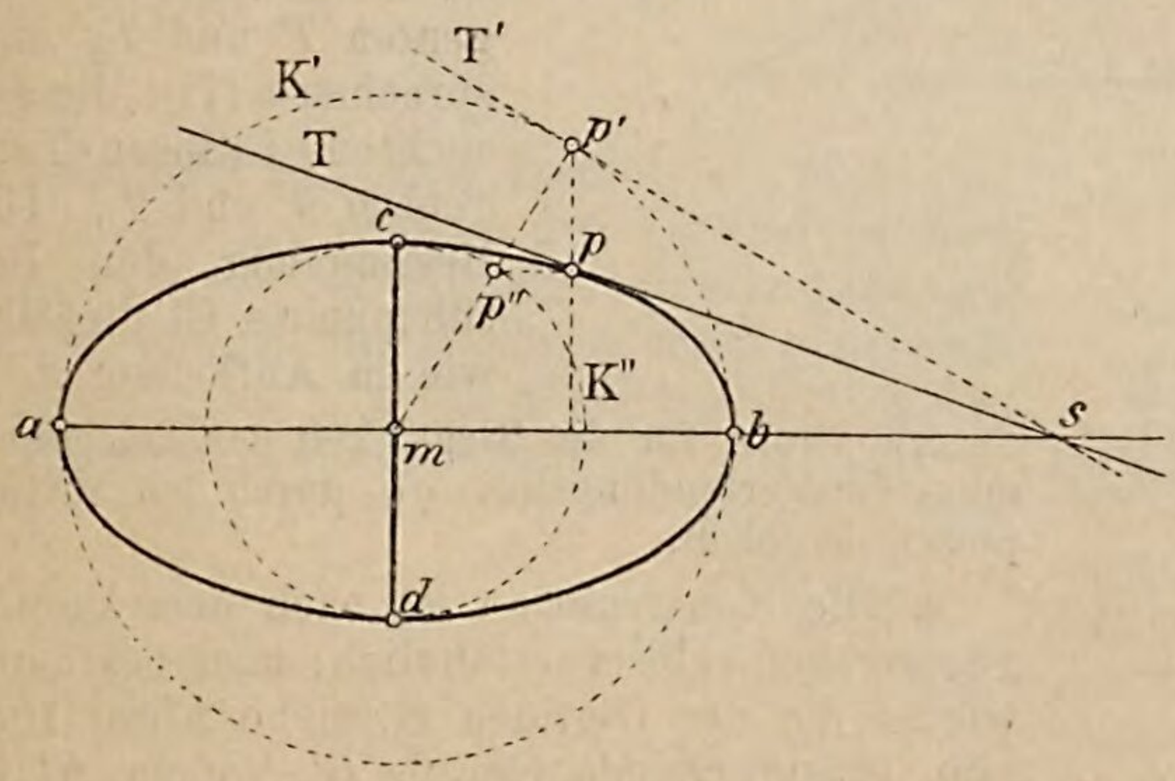
b. Die Konstruktion weiterer Ellipsenpunkte geschieht nach dem in der Antwort auf die Frage 49 angegebenen Verfahren.

c. Ziehe in p' die Kreistangente T'; ihr entspricht die Ellipsentangente T, welche durch den Schnittpunkt s von T' mit der verlängerten ab hindurchgeht, siehe Erkl. 93.

Aufgabe 64. Von einer Ellipse ist gegeben die grosse Achse $\overline{ab}$ der Grösse und Lage nach, sowie eine Tangente T. Man soll:

a. den Berührpunkt der Tangente T,
b. die Ellipse selbst konstruieren.

Figur 102.



Auflösung a. Ziehe wieder, siehe Fig. 102, den Kreis K' wie in Aufgabe 63 und ziehe durch den Schnittpunkt s der gegebenen Tangente T mit der verlängerten ab die Tangente T' an K'; ihrem Berührpunkt p' entspricht auf T der Berührpunkte p der gegebenen Tangente mit der Ellipse. Die weitere Konstruktion ist wie in Aufgabe 63.

b. Die Konstruktion der einzelnen Ellipsenpunkte geschieht nach dem in der Antwort auf die Frage 49 angegebenen Verfahren.

Aufgabe 65. Von einer Ellipse sind gegeben die beiden Achsen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ der Grösse und Lage nach. Man soll:

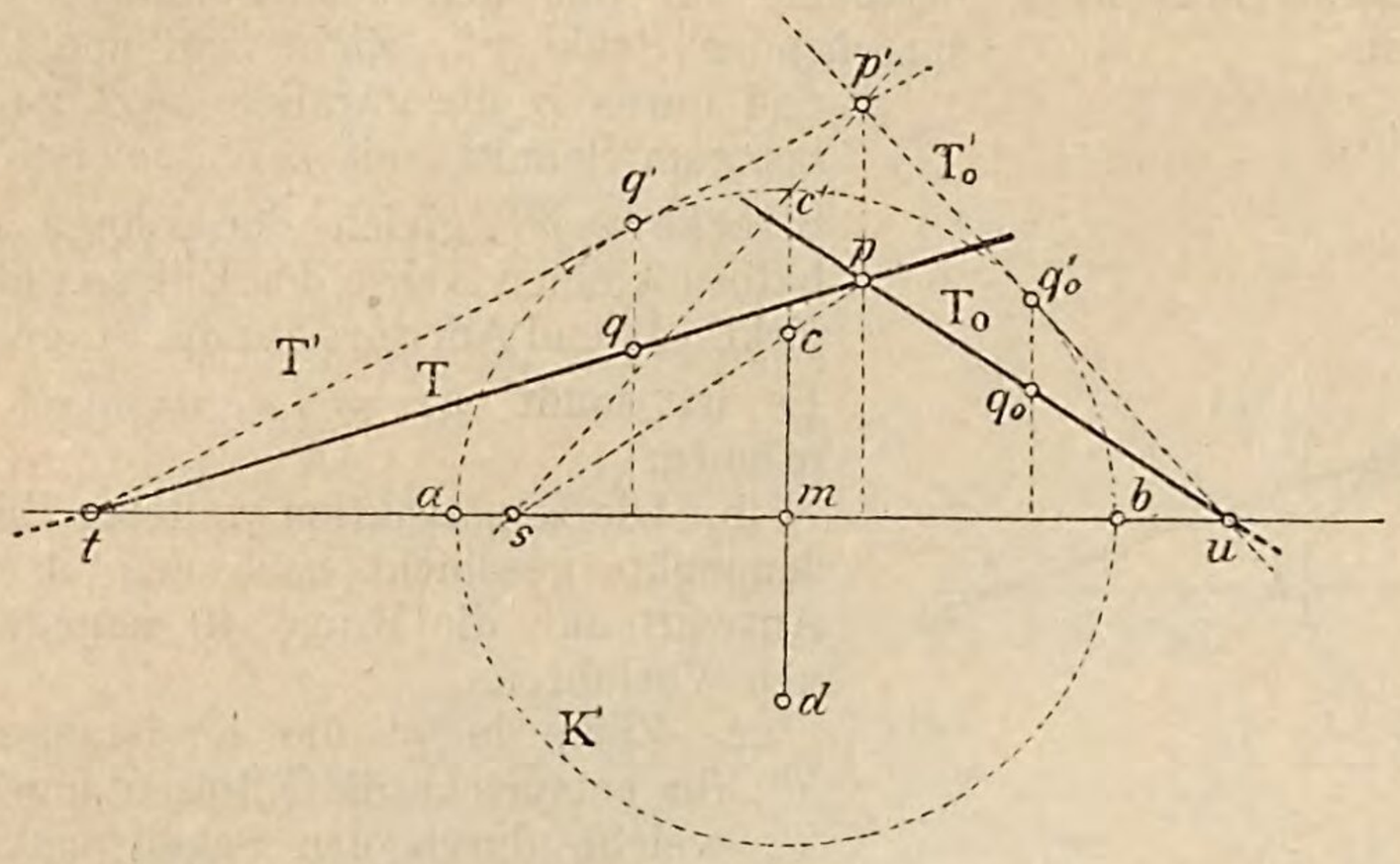
a. von einem gegebenen Punkte p aus eine Tangente an die Ellipse konstruieren,
b. parallel zu einer gegebenen Geraden A eine Tangente an die Ellipse konstruieren,

Auflösung a. Zeichne, siehe Figur 103, wieder den Kreis K', so entspricht dem Punkte c der Ellipse der Punkt c' des Kreises K'. Zieht man daher die Verbindungslinie pc und durch ihren Schnitt s mit der verlängerten

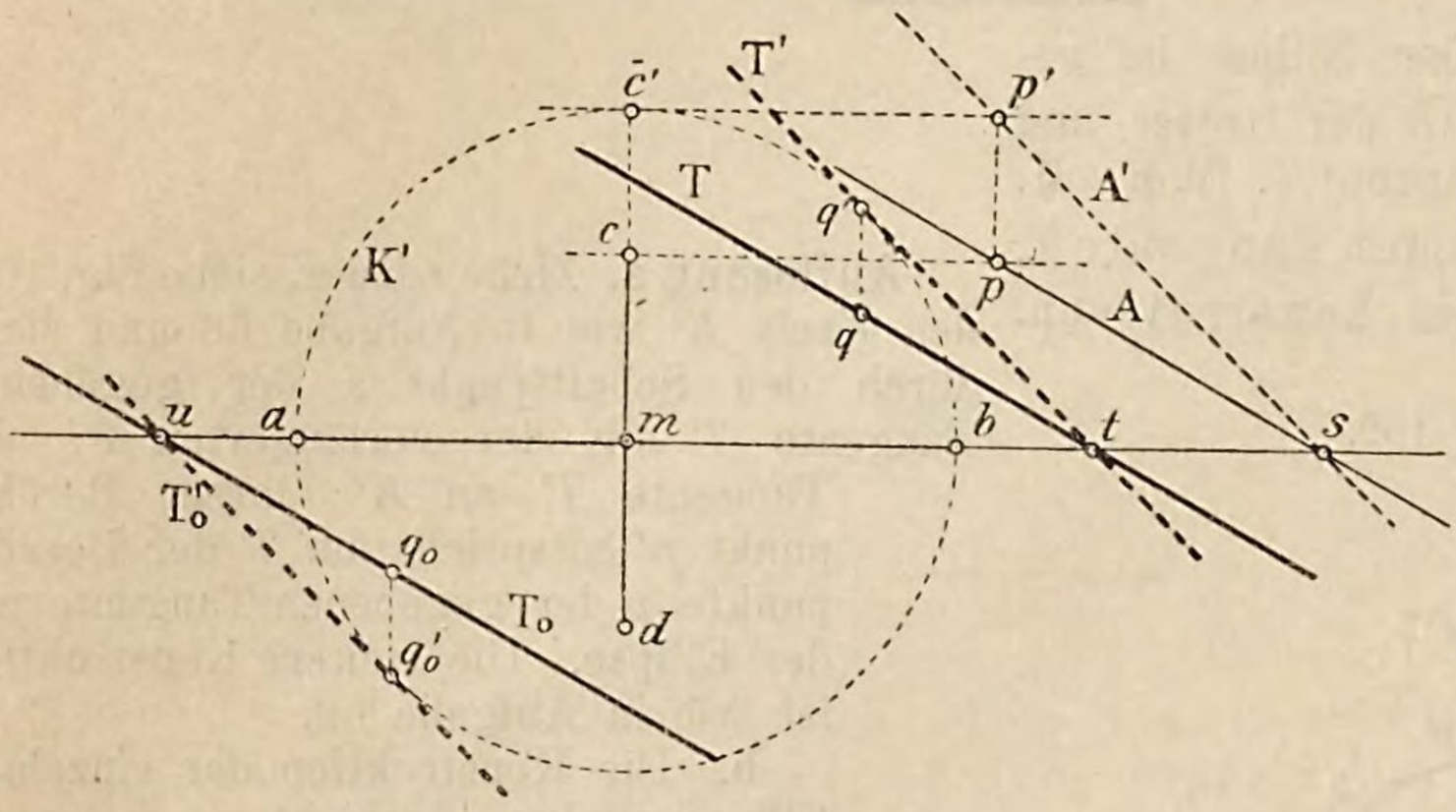
c. den Schnittpunkt einer Geraden B mit der Ellipse bestimmen.

In allen drei Fällen a. b. c. soll die Ellipse selbst nicht gezeichnet werden.

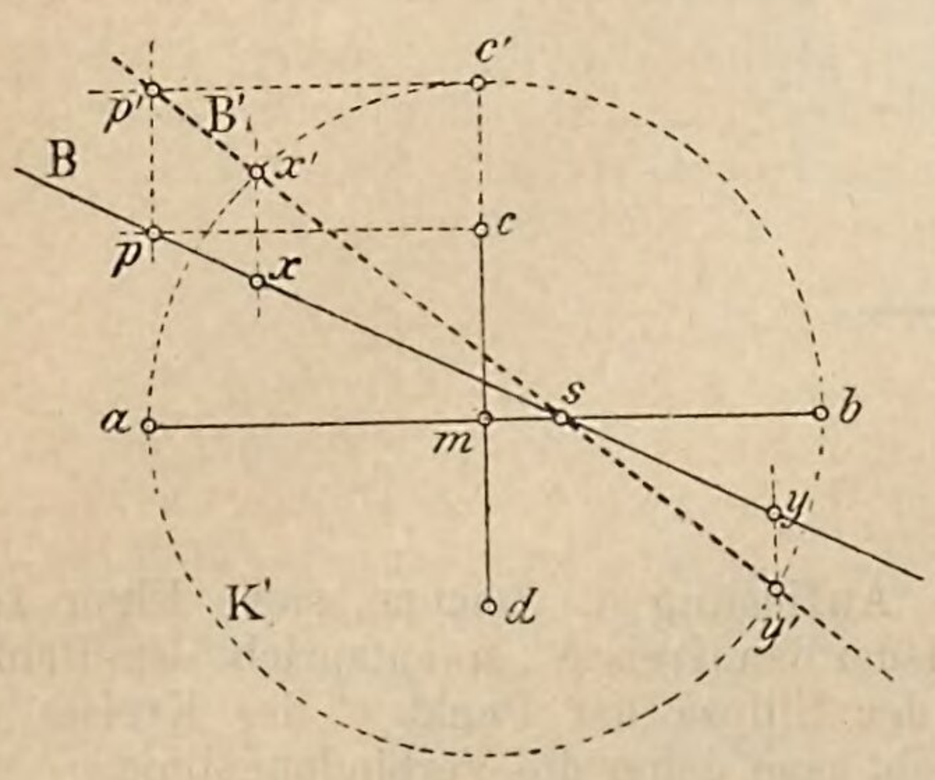
Figur 103.



Figur 104.



Figur 105.



ab die Gerade sc', so liegt auf ihr der dem Punkte p affin entsprechende Punkt p'. Die von p' an den Kreis gezogenen Tangenten T' und T_0' treffen die Affinitätsachse ab in den Punkten t und u; daher sind die gesuchten Ellipsentangenten die Verbindungslinien $pt = T$ und $pu = T_0$.

Den Berührpunkten q' und q_0' von T' bezw. T_0' entsprechen auf T und T_0 die Berührpunkte q bezw. q_0.

b. Der Geraden A, siehe Figur 104, entspricht affin eine Gerade A', die sich am einfachsten wie folgt ergibt. Ziehe durch ein Paar entsprechende Punkte, etwa c und c', Parallele zur Affinitätsachse ab; die durch c gezogene Parallele trifft die Gerade A in einem Punkte p, dem affin auf der durch c' gezogenen Parallelen der Punkt p' der Geraden A' entspricht. Diese ist somit die Linie $p's$.

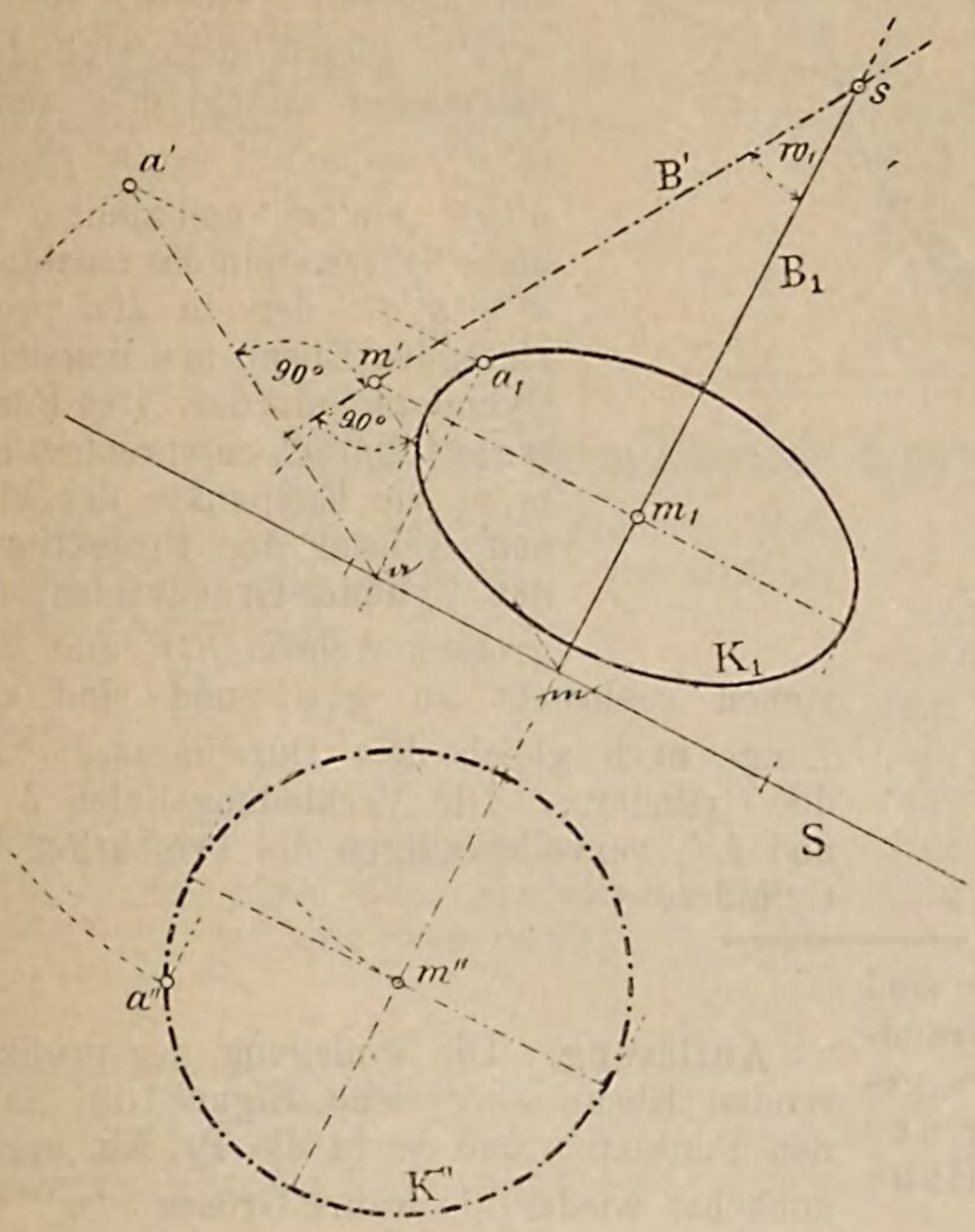
Den parallel zu A' an K' gezogenen Tangenten T' und T_0' entsprechen affin die gesuchten Ellipsen-Tangenten T und T_0. Die Bestimmung der Berührpunkte ist dieselbe wie in Auflösung a.

Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung muss die Verbindungslinie qq_0 durch den Mittelpunkt m gehen.

c. Die Konstruktion ist nach dem Vorangegangenen selbstverständlich; man bestimmt wieder die der Geraden B, siehe Figur 105, affin entsprechende Gerade B', welche K' in den Punkten x' und y' schneidet; ihnen entsprechen die gesuchten Schnittpunkte x und y.

Aufgabe 66. Man soll die Projektion eines Kreises zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt a geht, dessen Ebene auf einer Geraden B senkrecht steht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden B liegt.

Figur 106.



Auflösung. Lege, siehe Erkl. 85, durch den Punkt a, siehe Figur 106, eine Ebene senkrecht zur Geraden B und bestimme deren Spur S, sowie den Schnittpunkt m der Ebene Sa mit der Geraden B, siehe Frage und Antwort 31.

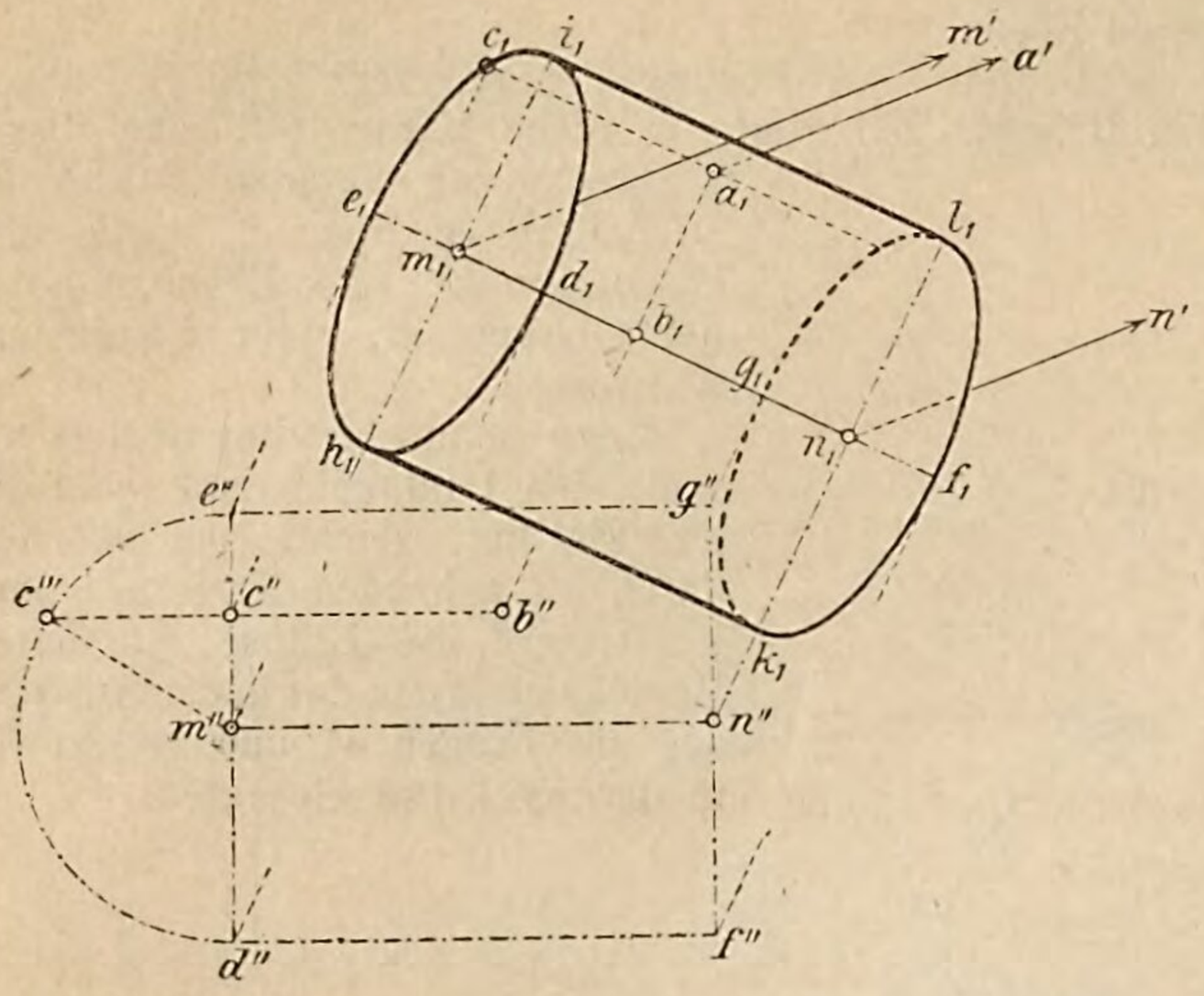
Lege nunmehr die Ebene Sa samt den Punkten a und m in die **Pr. Eb.** um, zeichne um m'' den durch a'' gehenden Kreis K'' und konstruiere die Ellipse K_1, unter Berücksichtigung des in der Antwort auf die Fragen 47 und 49, sowie in der Erkl. 136 Gesagten.

Aufgabe 67. Zwei Punkte m und n sind als die Mittelpunkte der Grundflächen eines senkrechten Kreiscylinders gegeben, dessen Mantel durch einen gegebenen Punkt a geht. Es ist die Projektion des Cylinders zu zeichnen.

Auflösung. Die Umlegung der projizierenden Ebene mn, siehe Figur 107, samt den Punkten m und n in die **Pr. Eb.** ergibt zunächst in $\overline{m''n''}$ die wahre Länge der Cylinderachse. Die Schnittlinien der projizierenden Ebene mn mit den beiden Grundflächen des Cylinders stehen in der Umlegung senkrecht auf $m''n''$.

Um nun den Halbmesser des Cylinders zu erhalten, fälle man von dem gegebenen Punkte b eine Senkrechte ab auf die projizierende Ebene mn; ihre Projektion ist a_1b_1. Da die Linie ab im Raume parallel zur **Pr. Eb** läuft, so ist der Abstand des Punktes b gleich jenem des Punktes a, d. h. gleich der Strecke $\overline{a_1a'}$. Die Umlegung von b kommt daher nach b'', so dass $\overline{b_1b''} = \overline{a_1a'}$ ist.

Figur 107.

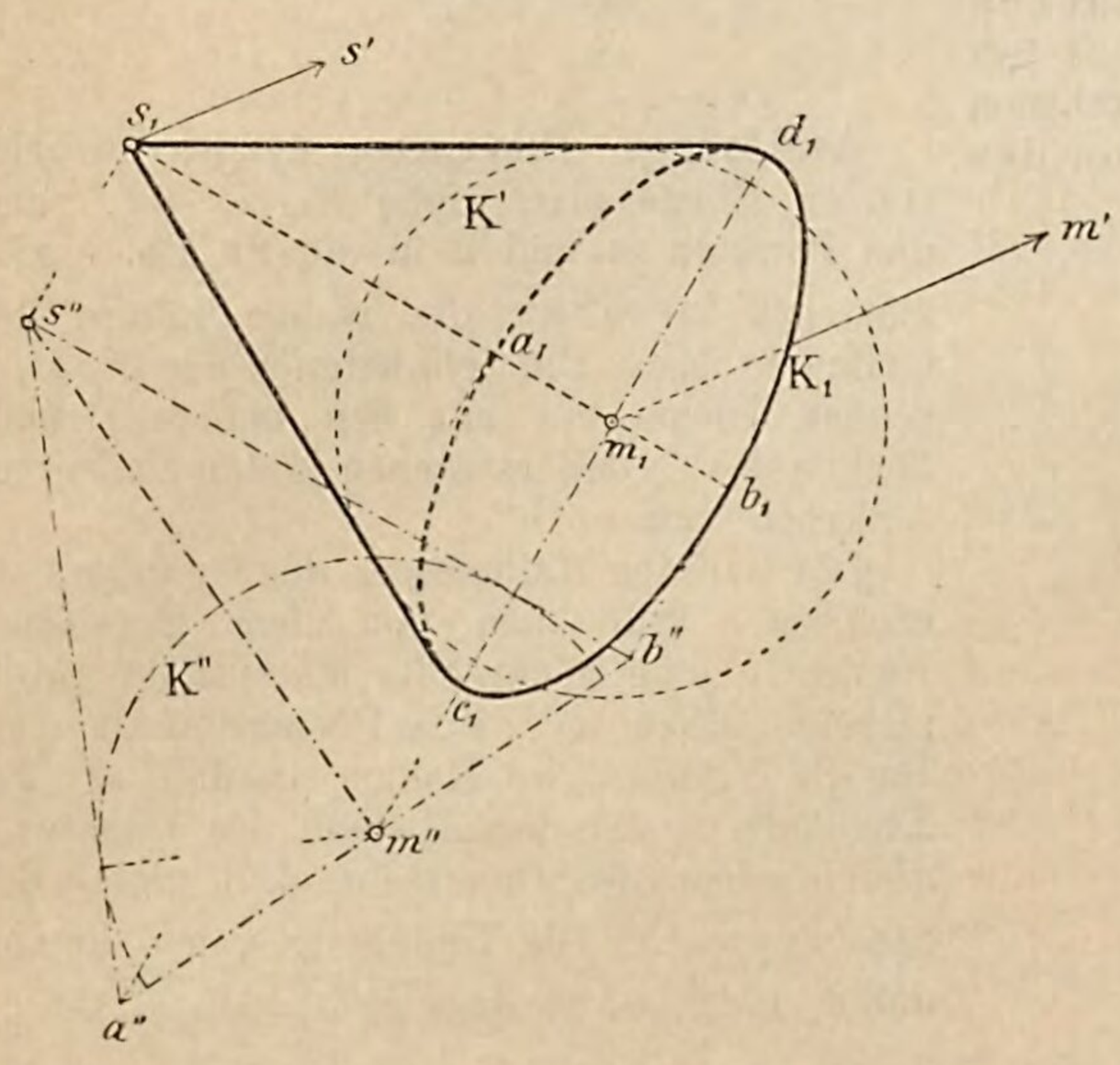


Zieht man nun $b''c''$ parallel zu $m''n''$ bis zum Schnitt mit der durch m'' zu $m''n''$ gezogenen Senkrechten und konstruiert das rechtwinklige Dreieck $m''c'''c''$ mit $m''c''$ als der einen und $\overline{c''c'''} = \overline{a_1b_1}$ als der anderen Kathete, so ist $\overline{m''c'''}$ gleich dem Cylinderhalbmesser. Macht man daher $\overline{m''d''} = \overline{m''e''} = \overline{n''f'''} = \overline{n''g''} = \overline{m''c'''}$ und zieht $d''f''$ und $e''g''$, so stellt das Rechteck $d''e''g''f''$ den in der projizierenden Ebene mn liegenden Cylinderschnitt dar. Den Punkten $d''e''f''g''$ entsprechen auf m_1n_1 die Endpunkte der kleinen Achsen der Projektionen der Cylinder-Grundkreise; die grossen Achsen $\overline{h_1i_1}$ und $\overline{k_1l_1}$ stehen senkrecht zu m_1n_1 und sind der Länge nach gleich dem Durchmesser $\overline{e''d''}$ des Cylinders. Die Verbindungslinien h_1k_1 und i_1l_1 vervollständigen die Projektion des Cylinders.

Aufgabe 68. Zwei Punkte s und m sind als Spitze bezw. Mittelpunkt der Grundfläche eines senkrechten Kreiskegels gegeben, bei welchem der Durchmesser des Grundkreises so gross als die Höhe des Kegels sein soll.

Es ist die Projektion des Kegels zu zeichnen.

Figur 108.



Auflösung. Die Umlegung der projizierenden Ebene sm, siehe Figur 108, samt den Punkten s und m in die **Pr. Eb.** ergibt zunächst wieder die wahre Grösse $\overline{s''m''}$ der Kegelachse.

Zeichnet man nun das gleichschenklige Dreieck $s''a''b''$, dessen Grundlinie $\overline{a''b''}$ gleich der Höhe $\overline{s''m''}$ ist, so stellt dasselbe die Umlegung des in der projizierenden Ebene sm liegenden Schnittes mit dem Kegel dar.

Der Kegelgrundkreis projiziert sich daher als die Ellipse K_1, deren grosse Achse senkrecht zu s_1m_1 steht und gleich $\overline{a''b''}$ ist, während die Endpunkte a_1 und b_1 der kleinen Achse auf s_1m_1 und in den Senkrechten durch a'' und b'' zu s_1m_1 liegen. Die von s_1 an die Ellipse K_1 gezogenen Tangenten vervollständigen die Projektion des Kegels.

Die Tangenten vom Punkt s_1 an die Ellipse K_1 können nach dem in der Auflösung c der Aufgabe 65 angegebenen Verfahren konstruiert werden, oder man kann auch wie folgt verfahren:

Erkl. 151. Denkt man sich durch den Mittelpunkt einer Kugel den zur **Pr. Eb.** parallelen Kreis K gezeichnet, so wird dessen Projektion wieder ein Kreis K' sein kongruent dem Kreise K.

Der Kreis K' heisst aber die Projektion der Kugel deshalb, weil die Projektionen von allen übrigen auf der Kugel gelegenen Kreisen von dem Kreise K' eingeschlossen werden.

Denkt man sich um den Punkt m als Mittelpunkt eine den Kegel berührende Kugel beschrieben, so werden sämtliche Mantellinien des Kegels diese Kugel berühren; daher wird auch die Projektion der Kugel von den die Projektion des Kegels begrenzenden Mantellinien berührt werden.

Die projizierende Ebene sm schneidet die Kugel nach einem Kreise, dessen Umlegung K'' die Mantellinien $s''a''$ und $s''b''$ berührt und der m'' als Mittelpunkt hat. Die Projektion der Kugel ist, wie leicht einzusehen, siehe Erkl. 151, ein Kreis K' mit m_1 als Mittelpunkt und einem Halbmesser gleich jenem der Kugel, d. h. gleich jenem des Kreises K''.

Die Tangenten von s an K' sind somit gleichzeitig Tangenten an die Ellipse K_1.

---

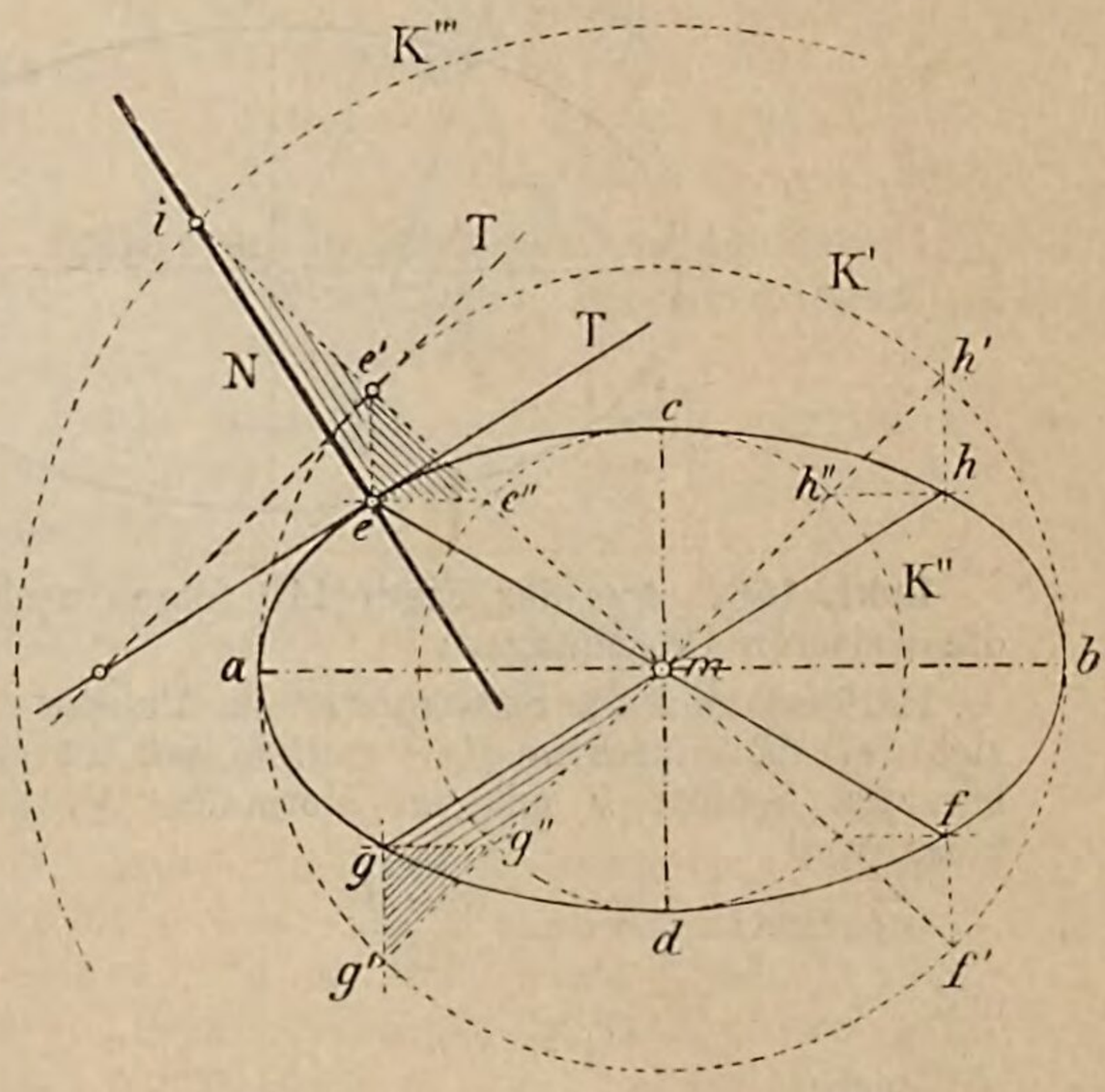
d) Ueber einige weitere Eigenschaften der Ellipse.

Frage 50. Wie bestimmt man in einem Ellipsenpunkte die Normale zur Ellipse? (Siehe Erkl. 152.)

Antwort. In der Erkl. 152 ist zugleich eine Konstruktion einer Ellipsennormalen bei gegebenem Fusspunkte, siehe Erkl. 153, enthalten. Man zeichnet nämlich in dem gegebenen Punkte, z. B. e, siehe Figur 109, die Tangente T und senkrecht zu T die Normale N.

Erkl. 152. Unter einer Normalen zur Ellipse versteht man die im betreffenden Punkte zur Ellipsen-Tangente gezogene Senkrechte.

Figur 109.



Erkl. 153. Der Punkt e, siehe Figur 109, in welchem die Normale die Ellipse durchschneidet, heisst der Fusspunkt der Normalen.

Erkl. 154. Es lässt sich aber auch eine direkte Normalenkonstruktion ohne Benützung der Tangente wie folgt ableiten:

Zeichnet man nämlich, siehe Fig. 109, in dem Kreise K' zwei auf einander senkrechte Durchmesser $\overline{e'f'}$ und $\overline{g'h'}$ und konstruiert auf die in der Antwort auf die Frage 49 angegebene Weise die den Punkten e', f', g', h' entsprechenden Ellipsenpunkte e, f, g, h, so sind die Verbindungslinien $\overline{ef}$ und $\overline{gh}$ zwei conjugierte Ellipsendurchmesser, siehe Erkl. 144, d. h. die Tangente T in e läuft parallel zum Durchmesser gh. Zeichnet man nun durch e die Normale N senkrecht zu T, so trifft dieselbe den verlängerten Kreisdurchmesser $\overline{e'f'}$ im Punkte i und man erhält folgende Beziehungen:

Zunächst sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke $e'ee''$ und $g''gg'$ kongruent, denn sie haben die Hypotenuse und die Winkel gleich, siehe Erkl. 155; hieraus folgt aber sofort die Kongruenz der Dreiecke $ee'i$ und $gg''m$ (sie haben eine Seite $\overline{ee'} = \overline{gg''}$ und die Winkel gleich) und damit die Gleichheit der Strecken $\overline{e'i} = \overline{g''m} = \beta$, d. h. der Punkt i liegt auf einem um m als Mittelpunkt mit einem

Halbmesser gleich $\alpha + \beta$ beschriebenen Kreise K'''.

Aus dem eben Gesagten ergibt sich aber folgende einfache Normalenkonstruktion, siehe Frage und Antwort 51.

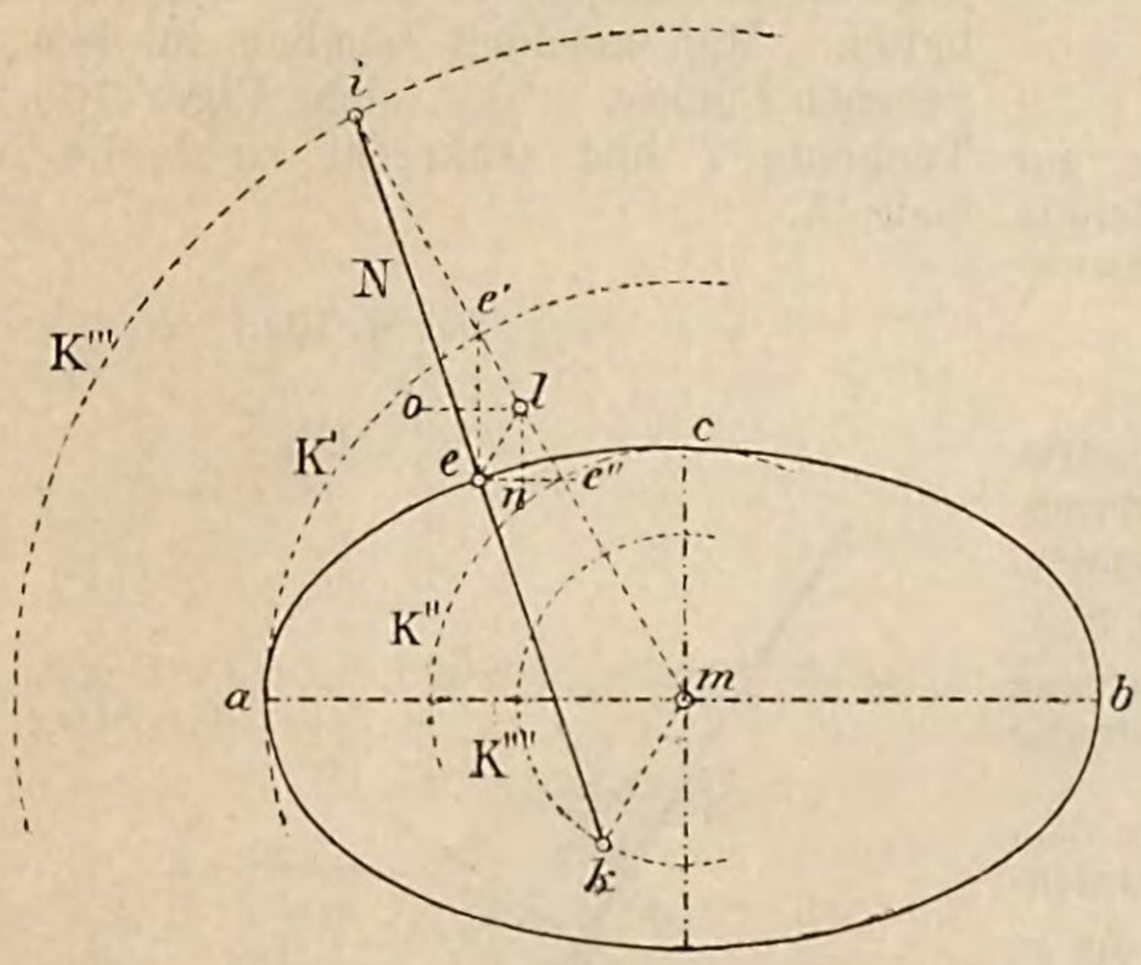
Erkl. 155. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und die Winkel gleich haben."

Frage 51. Welche direkte Normalenkonstruktion folgt aus dem in Erkl. 154 Gesagten?

Antwort. Zeichne um m als Mittelpunkt, siehe Figur 110, die Kreise K', K'' und K''', mit den Halbmessern α, β und $\alpha + \beta$, ziehe durch den gegebenen Ellipsenpunkt e die Parallelen zur kleinen und grossen Achse bis zu den Schnittpunkten e' und e'' mit K' und K''. Die Verbindungslinie $me'e''$ schneidet auf K''' einen Punkt i der Normalen N des Punktes e aus.

Figur 110.



Erkl. 156. Aus der Figur 110 folgen noch die weiteren Beziehungen:

Halbiert man die Strecke $\overline{e'e''}$ im Punkte l, zieht el und durch m die Parallele mk zu el bis zum Schnitt k mit der Normalen N, so muss, weil:

$$\overline{el} = \overline{e'l} = \overline{e''l} = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

und

$$\overline{e'i} = \overline{e''m}$$

ist, auch:

$$\overline{li} = \overline{lm}$$

sein, daher ist auch:

$$\overline{ei} = \overline{ek}$$

und

$$\overline{el} = \frac{\overline{km}}{2} \text{ (siehe Erkl. 157)}$$

oder:

$$\overline{km} = 2 \times \overline{el} = \alpha - \beta$$

d. h. gleich der Differenz der beiden Halbachsen der Ellipse. Der Punkt K liegt demnach auf einem um m als Mittelpunkt mit einem Halbmesser gleich $\alpha - \beta$ beschriebenen Kreise K''''.

Erkl. 157. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Verbindet man in einem Dreieck die Halbierpunkte zweier Seiten eines Dreiecks, so läuft die Verbindungslinie parallel zur dritten Seite und ist gleich der Hälfte der dritten Seite."

Erkl. 158. Zieht man in Figur 110 die Gerade ln senkrecht zu ee'', so halbiert dieselbe, da das Dreieck lee'' gleichschenklig ist, siehe Erkl. 159, den Winkel ele'' an der Spitze l des Dreiecks. Die durch l zu ln gezogene Senkrechte lo halbiert dagegen den Nebenwinkel ile des Winkels ele''. Nun sind aber die Hauptachsen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ der Ellipse parallel zu den Richtungen lo und ln, ausserdem ist auch die Linie km parallel zu el, woraus folgt, dass die Hauptachsen den Winkel der Geraden mi und mk halbieren.

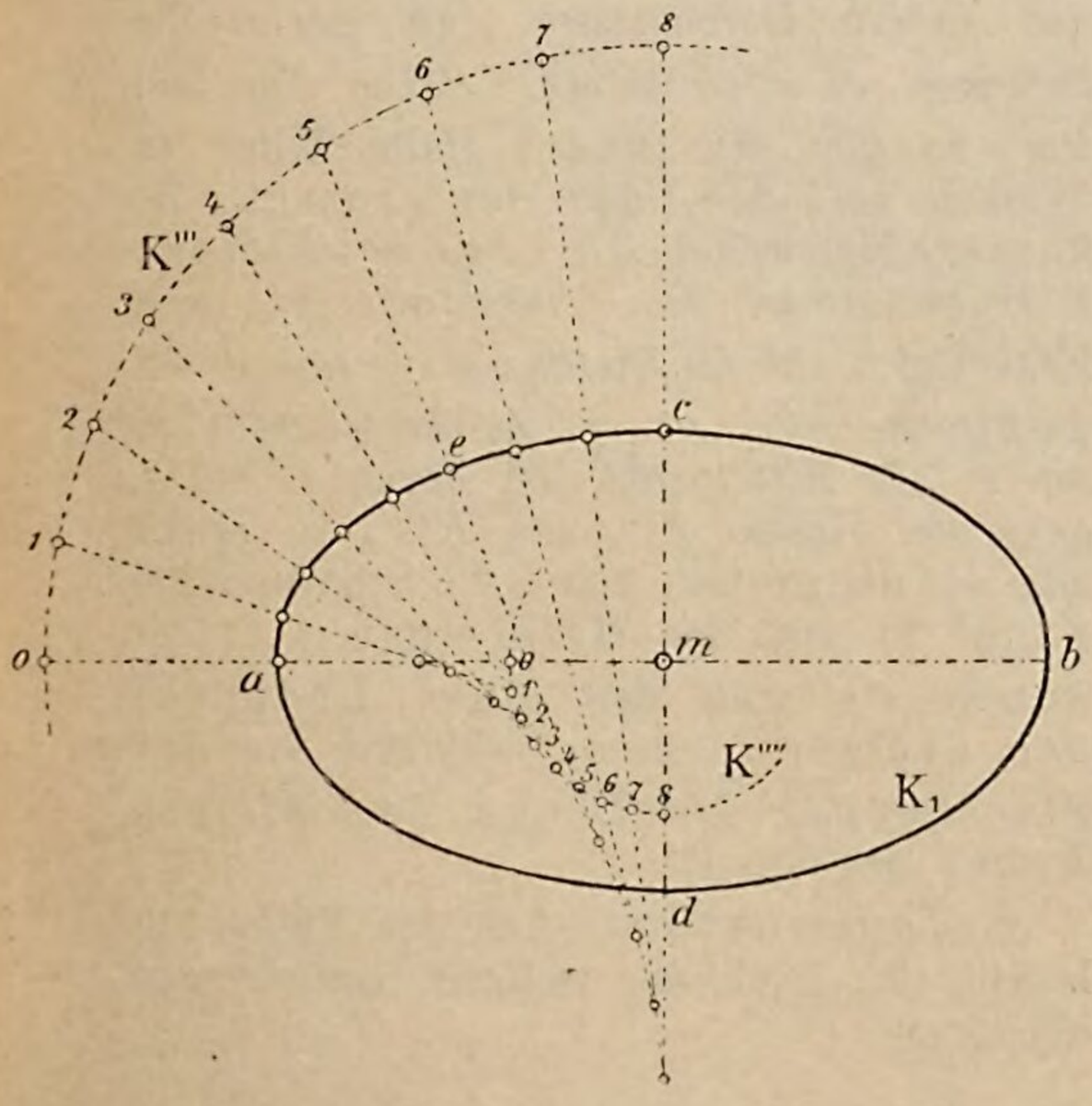
Erkl. 159. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Senkrechte halbiert die Grundlinie und den Winkel an der Spitze des Dreiecks."

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Frage 52. Welche Konstruktionen folgen aus den in den Erkl. 155, 156 und 158 enthaltenen Sätzen?

Figur 111.



Antwort. In Rücksicht auf die Erkl. 155 und 156 gewinnt man leicht folgende Ellipsenkonstruktion:

Denkt man sich eine Gerade normal zu einer Ellipse K_1, siehe Figur 110, von der Anfangslage ab in die Lage cd gebracht, so schneidet dieselbe die Kreise K''' und K'''' stets in Punkten i und k so, dass die Strecken $\overline{ei}$ und $\overline{ek}$ einander gleich und ausserdem je gleich sind jenem Halbmesser, welcher conjugiert ist, zu dem durch den Normalenfusspunkt gehenden Ellipsenhalbmesser. Da überdies die Achsen den Winkel der Verbindungslinien im und lk halbieren, so erhält man leicht eine Reihe von Ellipsennormalen, wenn man etwa von zweien auf einem durch m gehenden Strahle gelegenen Punkten der Kreise K''' und K'''' ausgeht, siehe Figur 111, letztere in eine beliebige Anzahl gleicher Teile teilt (etwa 32), die Numerierung dieser Teilpunkte in beiden Kreisen in entgegengesetztem Sinne vornimmt

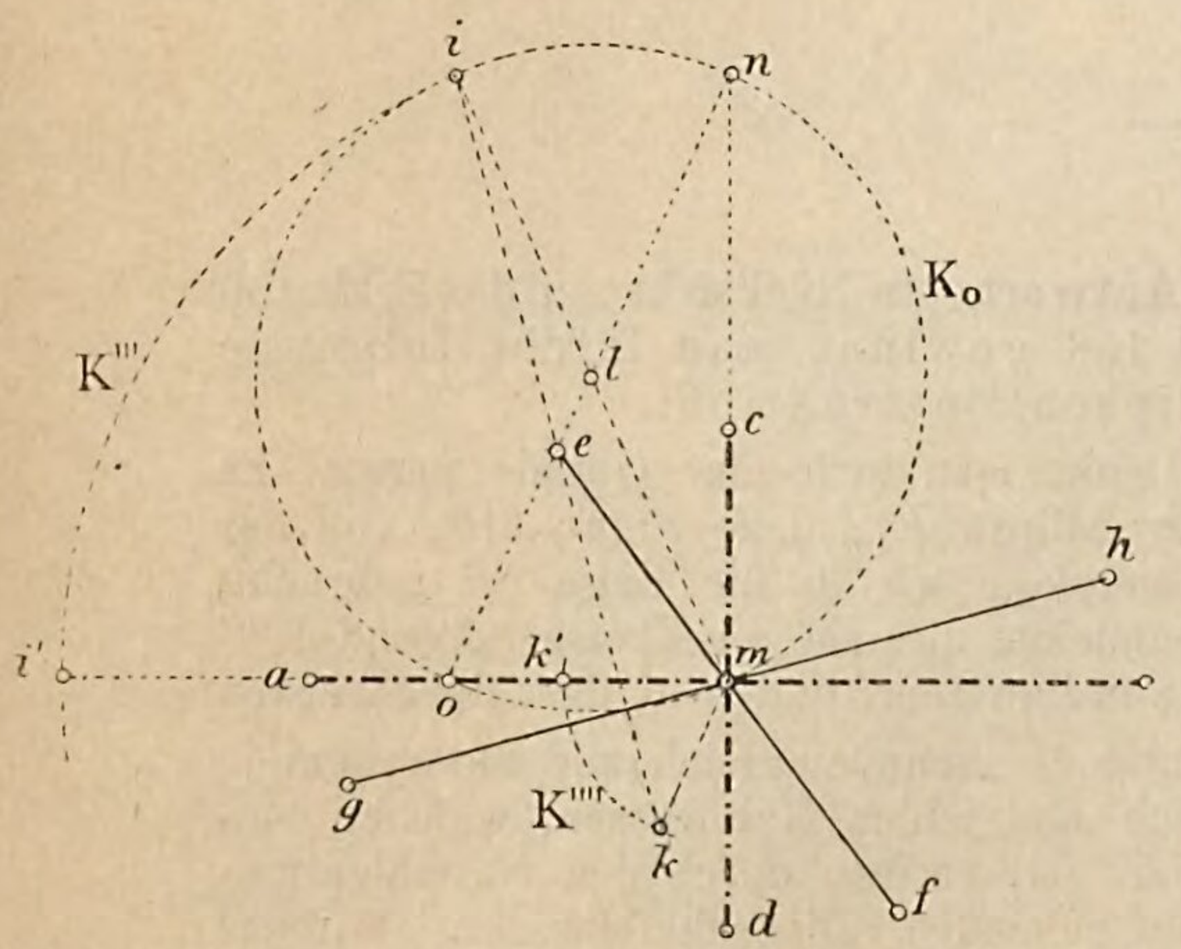
und je zwei gleich bezeichnete Punkte verbindet. Die Halbierpunkte dieser Verbindungslinien gehören der Ellipse an, zu welcher die genannten Verbindungslinien Normalen sind.

In der Figur ist die Konstruktion für einen Ellipsenquadranten durchgeführt und zwar wurde die Teilung von den Punkten *o* der Kreise K''' und K'''' aus vorgenommen.

Für den Fall, dass die Winkel zwischen den aufeinanderfolgenden Normalen sehr klein sind, welcher Fall bei einer Teilung der Kreise K''' und K'''' in 32 Teile in der That eintritt, kann man statt der zwischen zweien Nachbarnormalen liegenden Ellipsenbögen Kreisbögen wählen, deren Mittelpunkte je im Schnitt zweier Nachbarnormalen liegen. Man erhält auf diese Weise ein einfaches Verfahren, die Ellipse aus Kreisbögen zusammenzusetzen. In der Figur ist diese Konstruktion durchgeführt.

Frage 53. Wie lassen sich die Hauptachsen einer Ellipse konstruieren, wenn man zwei conjugierte Durchmesser derselben kennt?

Figur 112.



Antwort. Sehr häufig kommt der Zeichner in die Lage, von einer Ellipse zwei conjugierte Durchmesser unmittelbar bestimmen zu können, aus welchen sich dann in Rücksicht auf die Erkl. 158 die Hauptachsen sowohl der Grösse wie auch der Lage nach sehr einfach bestimmen lassen.

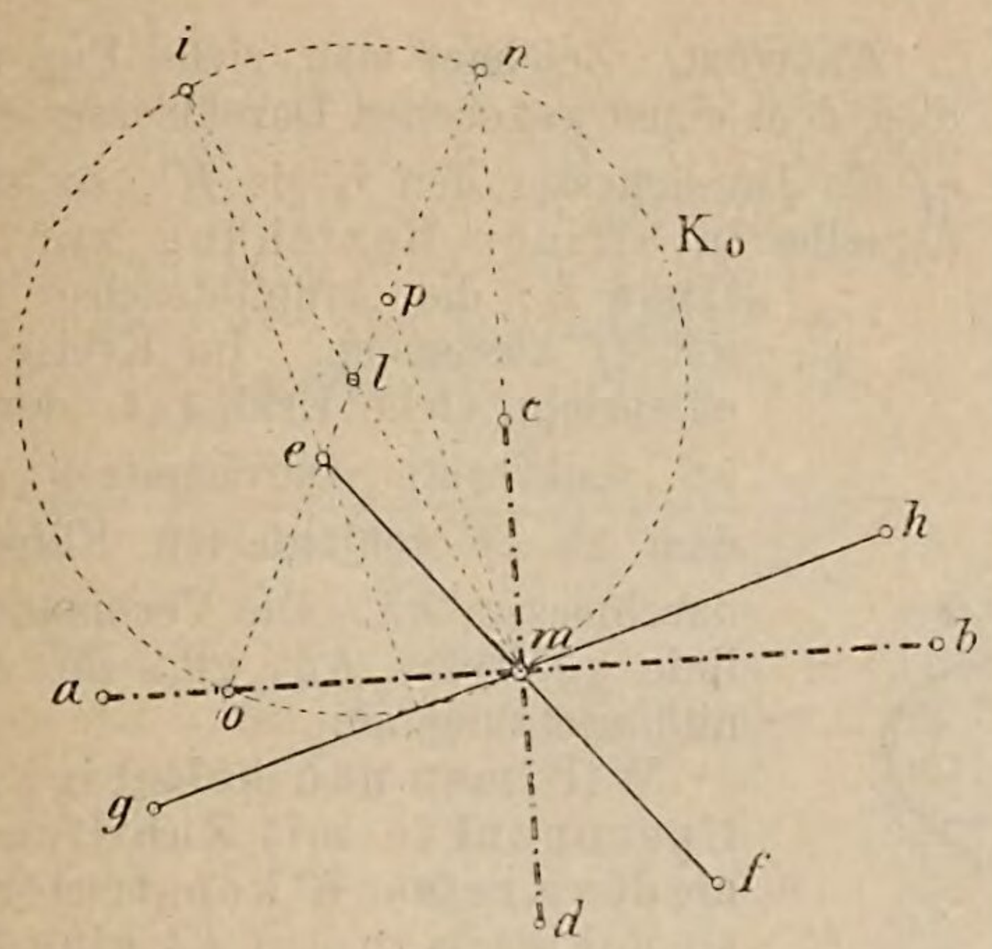
1. Konstruktion. Sind $\overline{ef}$ und $\overline{gh}$, siehe Figur 112, die beiden gegebenen Durchmesser, so fälle man von dem Endpunkte *e* des einen Durchmessers eine Senkrechte auf den andern Durchmesser und mache die Strecken $\overline{ei} = \overline{ek} = \overline{mg}$. Ziehe $\overline{im}$ und $\overline{km}$, so gibt die innere Halbierlinie des Winkels *imk* die Lage der grossen, die äussere Halbierlinie die Lage der kleinen Ellipsenachse an. Ausserdem ist nach Erkl. 154 u. 156 die Strecke $\overline{mi} = \alpha + \beta$ und die Strecke $\overline{mk} = \alpha - \beta$. Zeichnet man daher um *m* als Mittelpunkt die durch *i* und *k* gehenden Kreise K''' und K'''', so erhält man auf der grossen Achse die Schnittpunkte i' und k' und der Halbierpunkt *a* der Strecke $\overline{i'k'}$ gibt den einen Endpunkt der grossen Achse, während in der Strecke $\overline{i'k'}$ die Länge der kleinen Achse gegeben ist.

2. Konstruktion. Aus der Figur 112 lassen sich noch die weiteren Beziehungen ableiten:

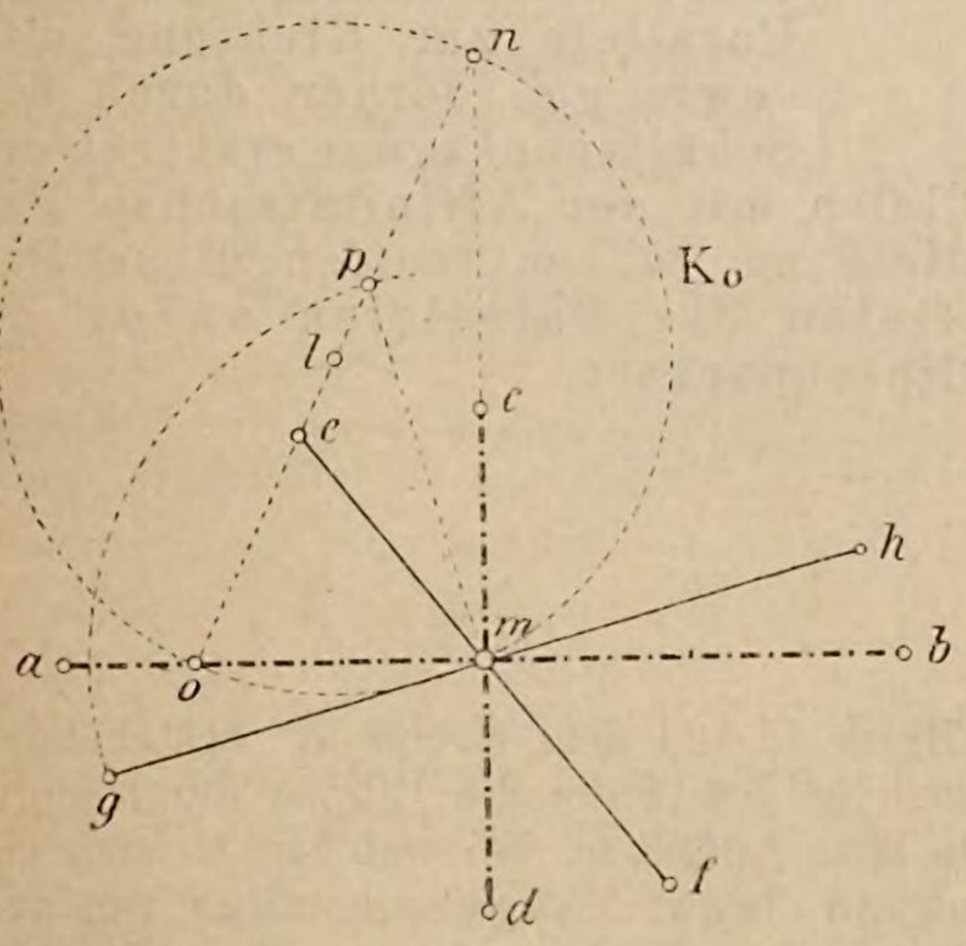
Erkl. 160. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der Winkel im Halbkreis ist ein Rechter.“

Figur 113.



Figur 114.



Halbiert man die Strecke $\overline{mi}$ im Punkte l und beschreibt um l als Mittelpunkt einen durch m gehenden Kreis K_0, so trifft derselbe die beiden Hauptachsen in zweien Punkten n und o, deren Verbindungslinie durch l geht, d. h. ein Durchmesser des Kreises K_0 ist, siehe Erkl. 160. Zufolge der Gleichheit der Strecken $\overline{lo}$ und $\overline{lm}$ sind auch die Winkel lmo und lom einander gleich und gleich dem Winkel kmo; die Linie on ist somit parallel zu km und fällt daher mit le zusammen. Folgende Konstruktion ist das Ergebnis der Betrachtung:

Fälle, die Durchmesser $\overline{ef}$ und $\overline{gh}$ als gegeben vorausgesetzt, von e, siehe Figur 113, die Senkrechte zu gh, mache $\overline{ei} = \overline{mg}$ und beschreibe über $\overline{mi}$ als Durchmesser den Kreis K_0, welcher die verlängerte Verbindungslinie le in zweien Punkten o und n trifft, durch welche die gesuchten Hauptachsen hindurchgehen, und zwar gibt mo **die Lage der grossen** und mn **die Lage der kleinen Hauptachse** an.

Da ferner:

$$\overline{le} = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

und

$$\overline{li} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

ist, so ist die Strecke:

$$\overline{en} = \overline{le} + \overline{li} = \alpha$$

und die Strecke:

$$\overline{eo} = \overline{lo} - \overline{le} = \overline{li} - \overline{le} = \beta$$

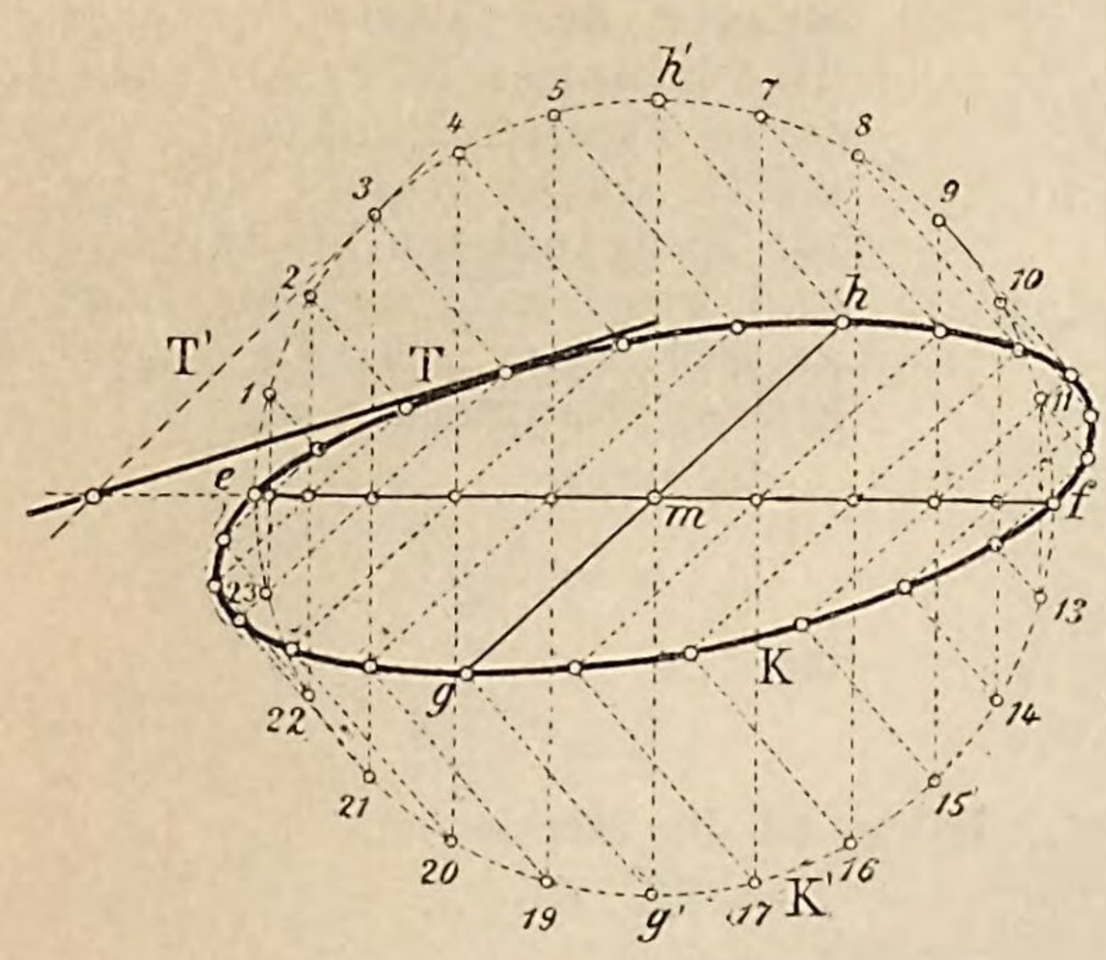
3. Konstruktion. Zieht man, siehe Figur 113, die Linie mp senkrecht zu mg bis zum Schnitt p mit on, so ist wegen der Kongruenz der Dreiecke ile und mlp (sie haben eine Seite $\overline{il} = \overline{lm}$ und die Winkel gleich), siehe Erkl. 155, die Strecke $\overline{mp} = \overline{ie} = \overline{mg}$, daher die folgende Konstruktion der Hauptachsen:

Sind wieder die Durchmesser $\overline{ef}$ und $\overline{gh}$, siehe Figur 114, als gegeben vorausgesetzt, so ziehe $\overline{mp}$ senkrecht und gleich $\overline{mg}$. Verbinde pe und halbiere letztere Strecke im Punkte l. Der um l als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $\overline{lm}$ beschriebene Kreis K_0 schneidet die verlängerte pe in Punkten o und n, durch welche die Haupt-

Erkl. 161. Da, wie im Vorstehenden gezeigt wurde, die Hauptachsen einer Ellipse sich stets ermitteln lassen, sobald zwei conjugierte Durchmesser derselben gegeben sind, so folgt hieraus, dass die Ellipse durch zwei conjugierte Durchmesser vollständig bestimmt erscheint und es frägt sich nun, ob man mit Umgehung der Hauptachsen die Ellipse punktweise aus zweien conjugiertenDurchmessernkonstruierenkann. Solche Konstruktionen gibt es in der That.

Frage 54. Wie konstruiert man aus zweien gegebenen conjugierten Durchmessern beliebige weitere Punkte der Ellipse?

Figur 115.



Erkl. 162. Will man in einem der Ellipsenpunkte die Tangente konstruieren, so lässt sich die Aufgabe auf die entsprechende für den Kreis zurückführen, d. h. man konstruiert, siehe Fig. 115, in dem dem Ellipsenpunkte entsprechenden Kreispunkte die Tangente T' an K' und verbindet deren Schnittpunkt mit der Affinitätsachse, mit dem gegebenen Berührungspunkt.

Antwort. Zeichnet man, siehe Fig. 115, über dem einen gegebenen Durchmesser etwa $\overline{ef}$ als Durchmesser den Kreis K', so steht derselbe in affiner Beziehung zur Ellipse K; die Affinitätsachse fällt mit ef zusammen. Im Kreise K' entspricht, siehe Erkl. 144, der zu ef senkrechte Durchmesser $\overline{g'h'}$ dem zu $\overline{ef}$ conjugierten Ellipsendurchmesser $\overline{gh}$. Die Verbindungslinie gg' bezw. hh' gibt die Affinitätsrichtung an.

Will man nun beliebige Ellipsenpunkte mit Zuhilfenahme des Kreises K' konstruieren, so nehme man auf K' eine Anzahl von Punkten beliebig an (zweckmässig teilt man den Kreis in eine Anzahl, 12 oder 24 gleicher Teile), zieht durch dieselben Parallele zur Richtung $g'h'$ sowie gg', ferner durch die Schnittpunkte der ersteren Parallelen mit der Affinitätsachse Parallele zu gh, so treffen diese Parallelen die Parallelen zu gg' in Ellipsenpunkten.

Anmerkung 7. Auf Grund des zwischen der Ellipse K und dem Kreise K' bestehenden affinen Zusammenhangs lassen sich nun auch, in dem Falle die Ellipse durch conjugierte Durchmesser gegeben ist, alle jene Aufgaben, bei welchen es sich um die Konstruktion von einzelnen Punkten, bezw. Tangenten oder um die Bestimmung des Schnittes einer Geraden mit der Ellipse handelt, auf solche für den Kreis zurückführen. Das Konstruktionsverfahren besteht dabei immer darin, dass man die der Aufgabe entsprechende Konstruktion am Kreise K' vornimmt und mittels der Affinität das für den Kreis erhaltene Resultat auf die Ellipse überträgt.

---

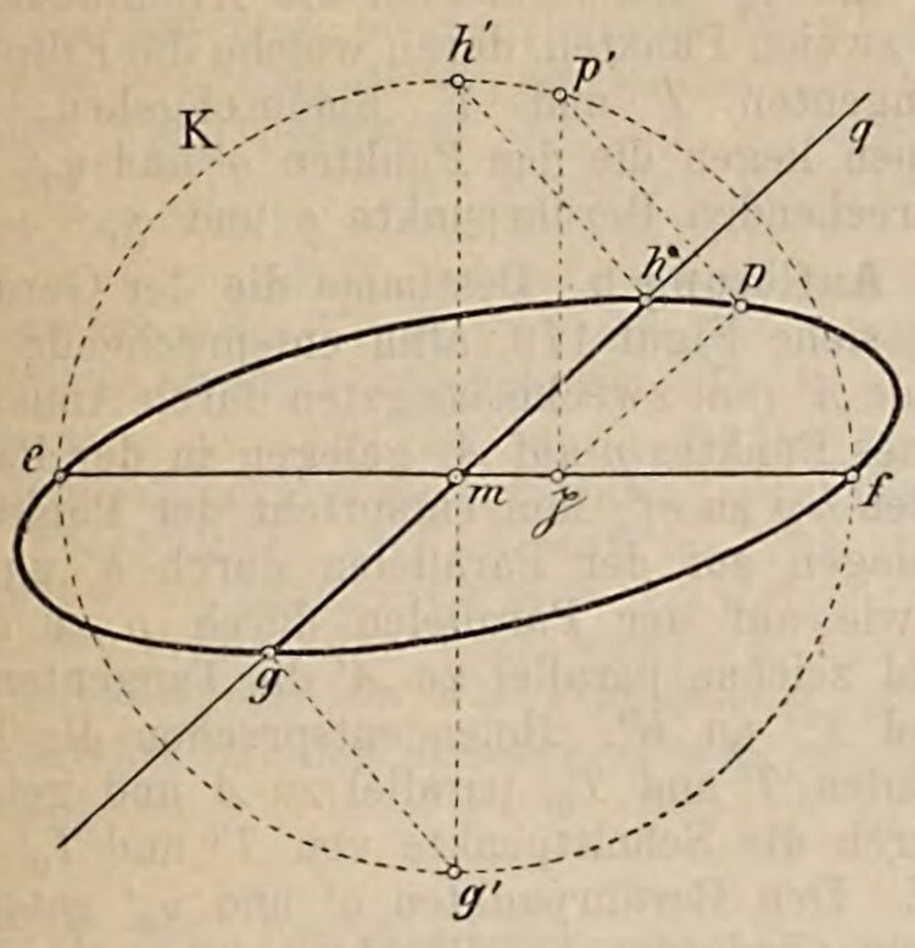
e) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 69. Von einer Ellipse kennt man einen Durchmesser $\overline{ef}$, die Richtung mq des conjugierten, sowie

a) einen Punkt p,
b) eine Tangente T.

Man soll die Länge des zum gegebenen Durchmesser conjugierten Durchmessers sowie die Ellipse selbst punktweise konstruieren.

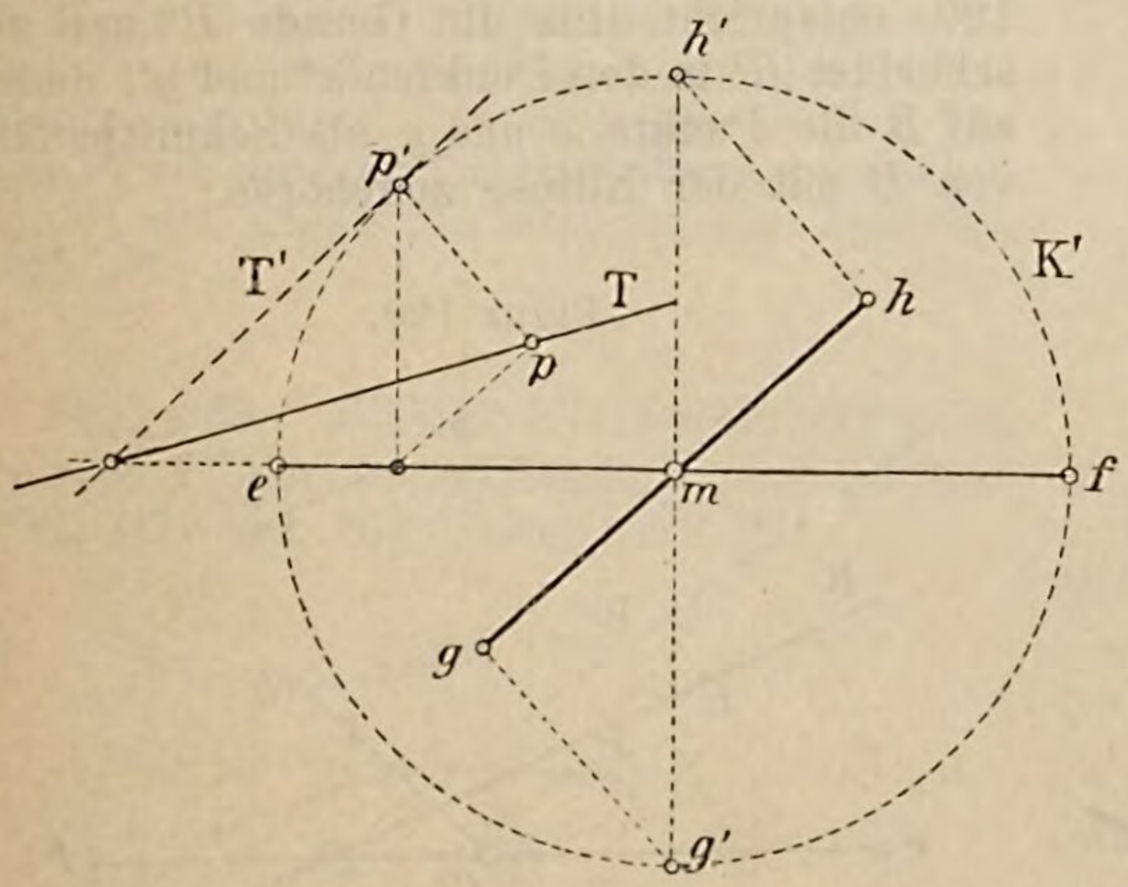
Figur 116.



Auflösung a. Zeichne, siehe Figur 116, über $\overline{ef}$ als Durchmesser den Kreis K' und ziehe $p\mathfrak{p}$ parallel mq und $\overline{\mathfrak{p}p'}$ senkrecht $\overline{ef}$, so ist p' der dem Punkte p entsprechende Kreispunkt und pp' die Affinitätsrichtung. Mittels derselben bestimmen sich nunmehr auch die den Endpunkten g' und h' des zu ef senkrechten Kreisdurchmessers entsprechenden Punkte g und h. Die Konstruktion weiterer Ellipsenpunkte geschieht nach dem in der Antwort auf die Frage 54 geschilderten Verfahren.

Auflösung b. Zeichne wieder den Kreis K', siehe Fig. 117, wie in Auflösung a. und ziehe von dem Schnittpunkte von T mit der verlängerten ef die Tangente T' an K'; ihrem Berührpunkte p' entspricht der Punkt p auf T. Die weitere Konstruktion ist wie in Auflösung a.

Figur 117.



Aufgabe 70. Von einer Ellipse kennt man zwei conjugierte Durchmesser $\overline{ef}$ und $\overline{gh}$ der Grösse und Lage nach. Man soll:

a) von einem gegebenen Punkte p die möglichen Tangenten an die

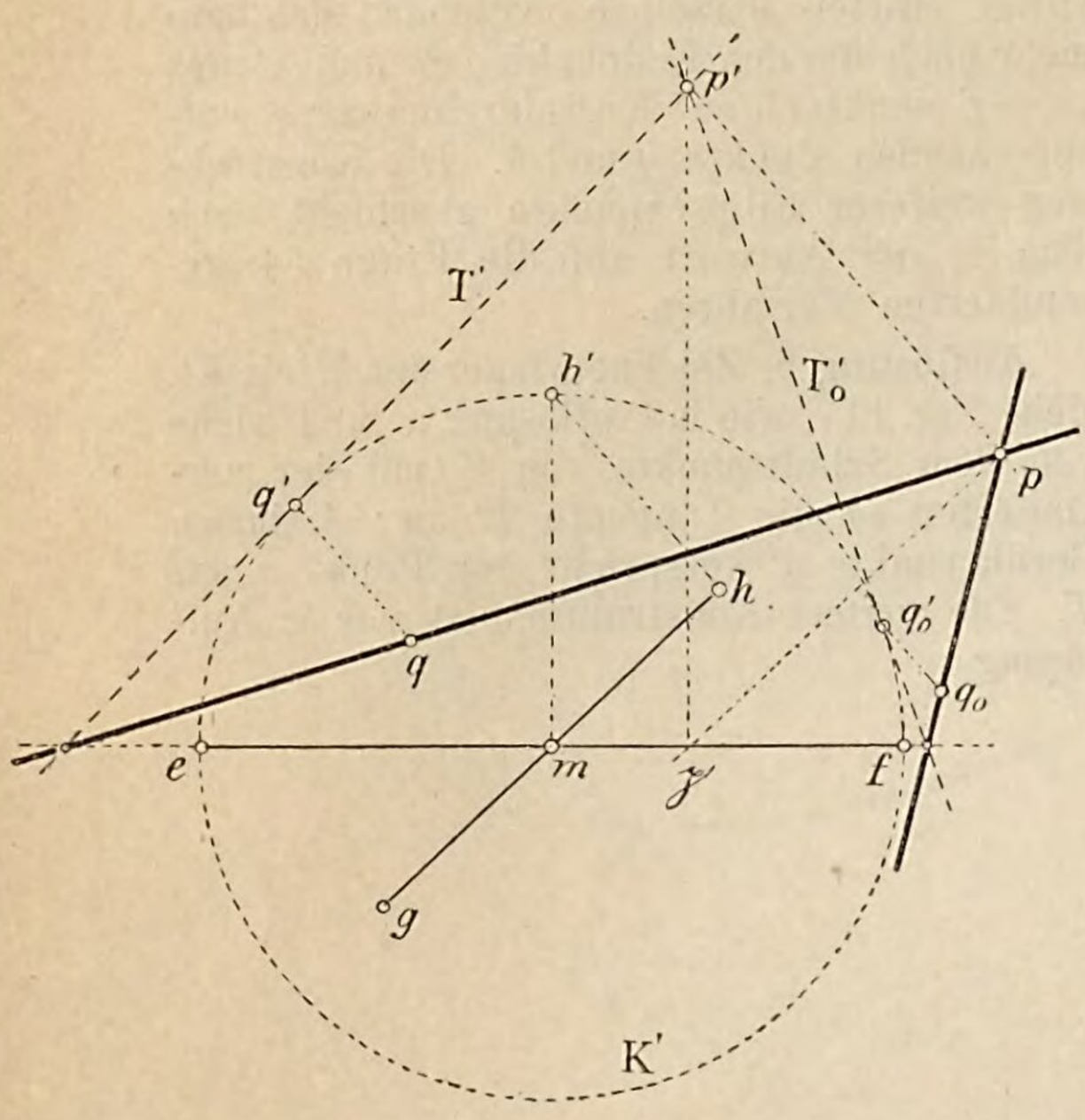
Ellipse ziehen und ihre Berührpunkte bestimmen,

b) parallel einer gegebenen Geraden die möglichen Tangenten an die Ellipse zeichnen und deren Berührpunkte bestimmen,

c) die Durchschnittspunkte einer Geraden B mit der Ellipse konstruieren.

In allen drei Fällen a), b), c) soll die Ellipse selbst nicht gezeichnet werden.

Figur 118.

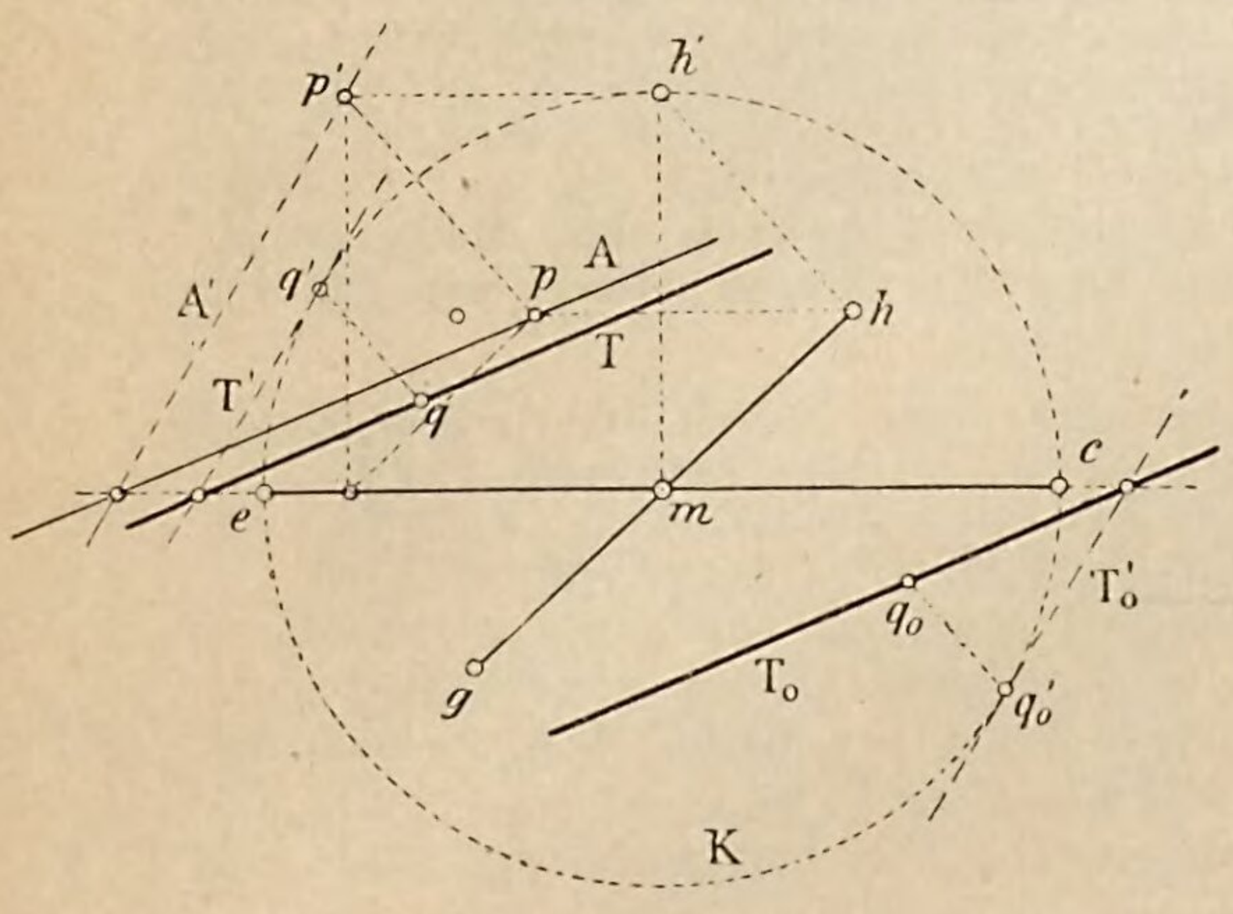


Auflösung a. Zeichne den Kreis K', siehe Figur 118, sowie den zu ef senkrechten Kreishalbmesser $\overline{mh'}$, so ist in hh' die Affinitätsrichtung gegeben. Bestimme den dem Punkte p entsprechenden Punkt p' mittels der Parallelen $\mathfrak{p}p$ und pp' zu gh und hh', und $\mathfrak{p}p'$ zu mh'. Die Tangenten T' und T_0' von p' an K' liefern auf K' die Berührpunkte q' und q_0' und schneiden die Affinitätsachse in zweien Punkten, durch welche die Ellipsentangenten T und T_0 hindurchgehen; auf ihnen liegen die den Punkten q' und q_0' entsprechenden Berührpunkte q und q_0.

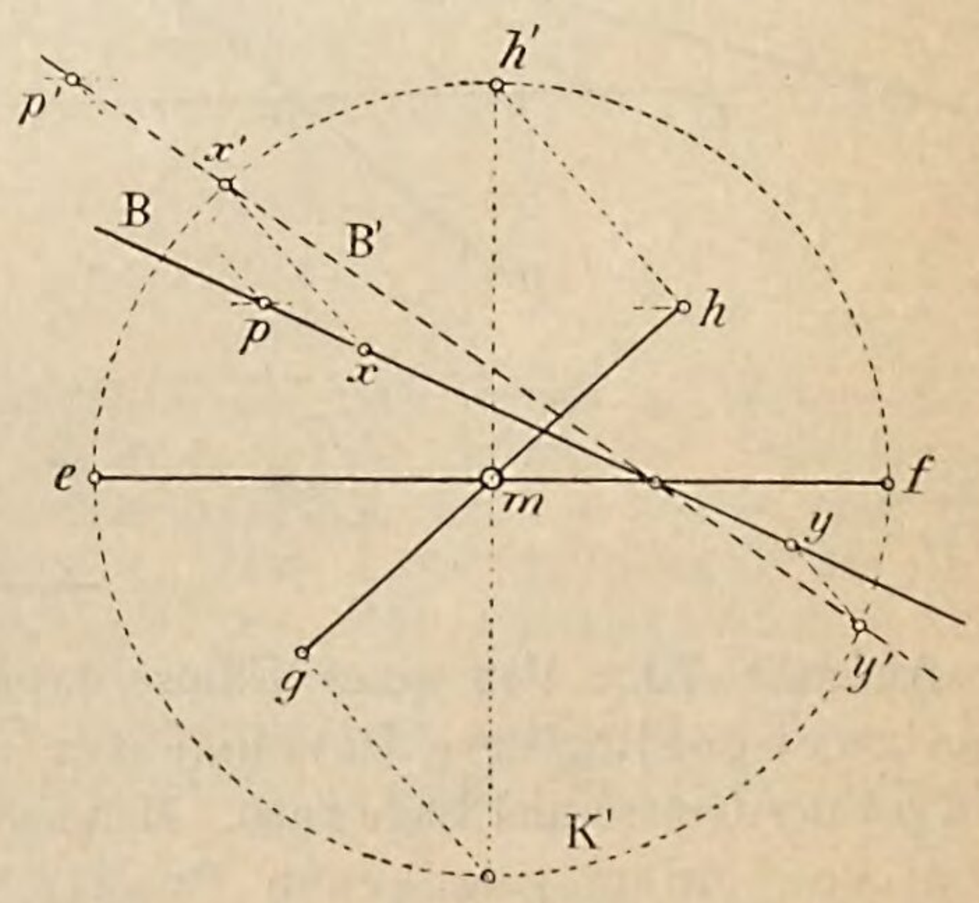
Auflösung b. Bestimme die der Geraden A, siehe Figur 119, affin entsprechende Gerade A' (am zweckmässigsten durch Annahme eines Punktes p auf A, gelegen in der Parallelen hp zu ef; ihm entspricht der Punkt p', gelegen auf der Parallelen durch h' zu ef, sowie auf der Parallelen durch p zu hh') und zeichne parallel zu A' die Tangenten T' und T_0' an K'. Ihnen entsprechen die Tangenten T und T_0, parallel zu A und gehend durch die Schnittpunkte von T' und T_0' mit ef. Den Berührpunkten q' und q_0' entsprechen wiederum die Berührpunkte q und q_0 auf T und T_0.

Auflösung c. Der Geraden B, siehe Figur 120, entspricht affin die Gerade B' und sie schneidet K' in den Punkten x' und y', denen auf B die Punkte x und y als Schnittpunkte von B mit der Ellipse zugehören.

Figur 119.



Figur 120.

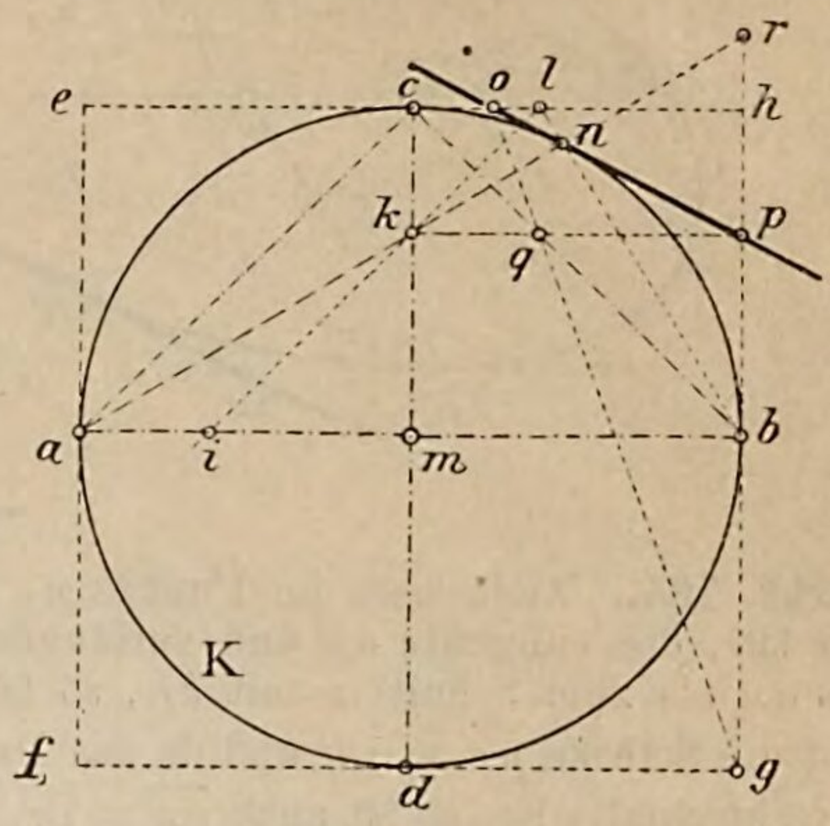


f) Ueber einige weitere Konstruktionen der Ellipse.

Erkl. 163. Zeichnet man in dem Kreise K, siehe Figur 121, zwei auf einander senkrechte Durchmesser $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, sowie das in deren Endpunkten berührende Quadrat $efgh$, so gewinnt man leicht folgende Beziehungen:

Zieht man die Linie ikl parallel zu ac und hierauf die Verbindungslinien ak und bl, so schneiden sich dieselben in einem Punkte n des Kreises K, denn wegen der Gleichheit von $\overline{im} = \overline{lh}$ und $\overline{am} = \overline{bh}$ sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke amk und bhl kongruent; weil nun die Katheten beider Dreiecke bezw. auf einander senkrecht stehen, so ist dies auch bezüglich der Hypotenusen der Fall, d. h. der Winkel bei n ist ein Rechter, folglich liegt der Punkt n auf dem Kreise K.

Figur 121.

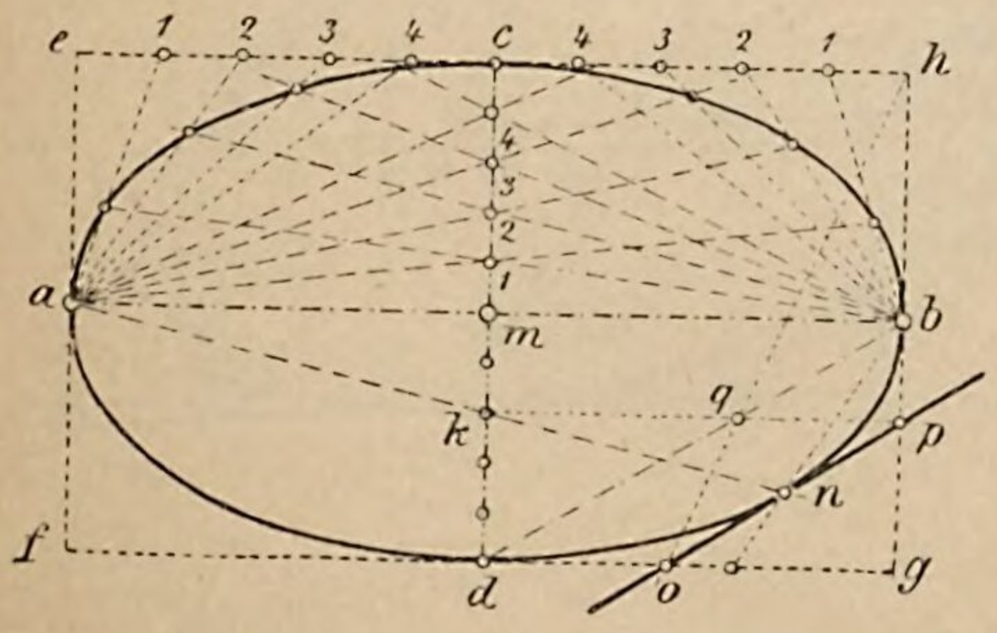


Aus obigem erhält man folgende punktweise Konstruktion des Kreises, sobald das ihm umschriebene Quadrat gegeben ist. Teile die Strecken $\overline{ch}$ und $\overline{cm}$, siehe Figur 121, in eine Anzahl gleicher Teile, verbinde die Teilpunkte auf ch mit b, jene auf cm mit a, so schneiden sich je zwei durch gleich bezeichnete Teilpunkte gehende Verbindungslinien in Kreispunkten. Analog verfahre mit den Strecken $\overline{ce}$ bezw. $\overline{dg}$, $\overline{fd}$ und $\overline{md}$.

Erkl. 164. Die eben angegebene Kreiskonstruktion lässt sich unmittelbar auf die Ellipse übertragen, denn denkt man sich die Figur 121 rechtwinklig auf eine Ebene projiziert, so geht der Kreis K in eine Ellipse, das ihm umschriebene Quadrat in ein Rechteck oder ein Parallelogramm über, je nachdem die **Pr. Eb.** parallel zu ein paar Quadratseiten angenommen wurde oder gegen die letzteren eine beliebige Lage hat.

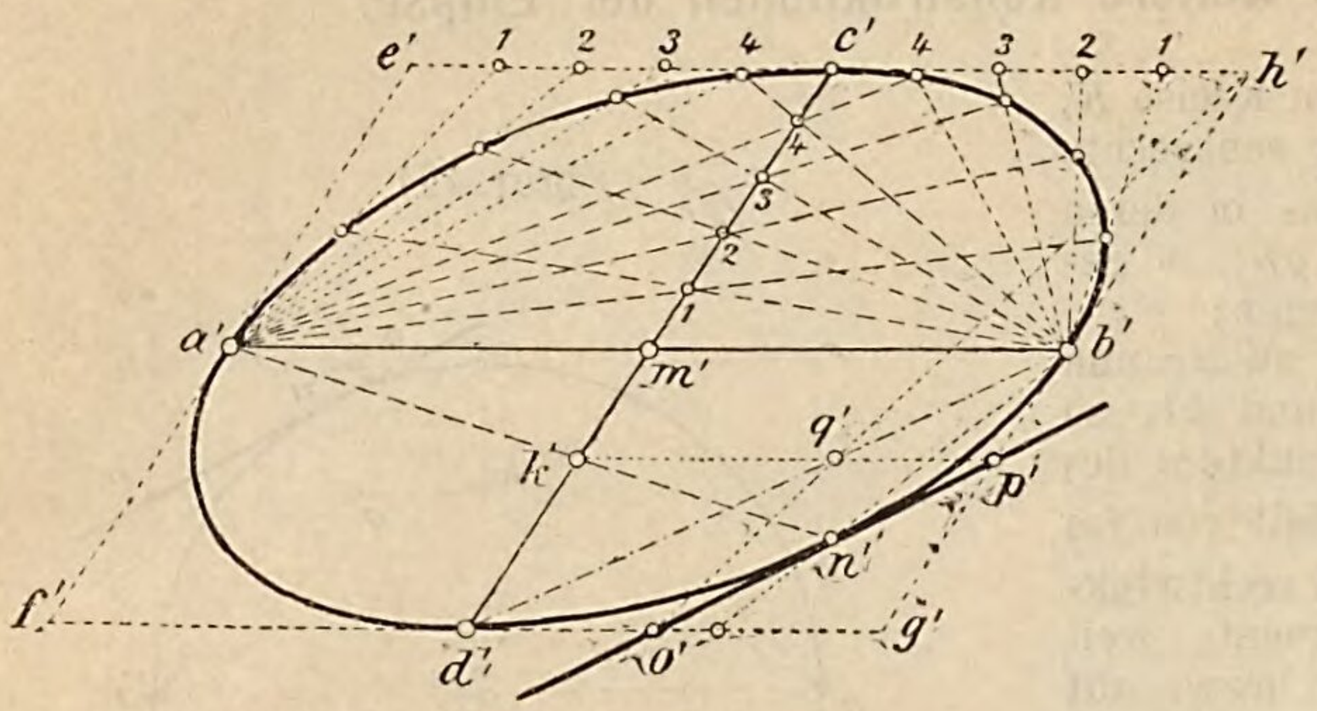
Frage 55. Welche Ellipsenkonstruktionen folgen in Anwendung des in den Erkl. 163 und 164 Gesagten?

Figur 122.



Antwort a. Ist die Ellipse gegeben durch ihre Hauptachsen, siehe Figur 122, so ziehe man das Rechteck $efgh$ und teile die Hälften der Rechtecksseiten $\overline{eh}$ und $\overline{fg}$ sowie die Strecken $\overline{cm}$ und $\overline{dm}$ in eine beliebige Anzahl gleicher Teile. Die Teilpunkte auf $\overline{ec}$ und $\overline{fd}$ verbunden mit a liefern auf den durch die entsprechenden Teilpunkte von $\overline{cm}$ und $\overline{dm}$ nach b gezogenen Strahlen Ellipsenpunkte. Desgleichen geben die Verbindungslinien der auf $\overline{ch}$ und $\overline{dg}$ gelegenen Teilpunkte mit b auf den durch die entsprechenden Teilpunkte von $\overline{cm}$ und $\overline{dm}$ nach a gezogenen Strahlen Ellipsenpunkte.

Figur 123.



Analog hätte man auch die Teilung der Rechtsseiten $\overline{ef}$ und $\overline{hg}$, sowie der Achse ab vornehmen und die obige Konstruktion mit Benützung der Punkte c und d durchführen können.

Antwort b. Ist die Ellipse durch zwei conjugierte Durchmesser $\overline{a'b'}$ und $\overline{c'd'}$, siehe Figur 123, gegeben, so zeichne man das Parallelogramm $e'f'g'h'$ und verfahre im übrigen analog wie in Antwort a.

Erkl. 165. Zieht man im Punkte n, siehe Figur 121, die Tangente op und verlängert die Linie an bis zum Schnitt r mit bh, so ist zunächst die Strecke $\overline{pn} = \overline{pb}$ und da das Dreieck bnr rechtwinklig ist, so ist auch $\overline{pn} = \overline{pr}$, folglich ist p Mittelpunkt von $\overline{br}$, daher läuft die Verbindungslinie kp parallel zu ab, siehe Erkl. 157. Die Linien kp und cb schneiden sich im Punkte q. Verbindet man nun die Punkte g und q, so muss die Linie gq durch den Schnittpunkt o der Tangente op mit ch hindurchgehen; denn nimmt man an, der Schnittpunkt von gq mit ch heisse vorerst o', so findet doch die Verhältnisgleichheit statt:

$$\frac{\overline{gp}}{\overline{gh}} = \frac{\overline{pq}}{\overline{ho'}} \text{ (siehe Erkl. 49)}$$

oder es ist:

$$24) \ldots\ \overline{ho'} = \frac{\overline{pq} \times \overline{gh}}{\overline{gp}}$$

Bezeichnet man nun den Kreishalbmesser mit r, die Strecke $\overline{qp} = \overline{bp}$ mit x, die Strecke $\overline{ho'}$ mit y', die Strecke $\overline{ho}$ mit y, so kann man obige Gleichheit 24 auch so schreiben:

$$25) \ldots\ ho' = y' = \frac{x \times 2 \times r}{r + x}$$

In dem rechtwinkligen Dreieck pho hat man aber nach dem pythagoräischen Lehrsatze die Beziehung:

$$\overline{oh^2} = \overline{op^2} - \overline{ph^2}$$

oder da:

$$\overline{op} = \overline{on} + \overline{np} = \overline{co} + \overline{bp} = (r - y) + x$$

und

$$ph = r - x$$

ist, auch:

$$26) \ldots\ y^2 = (r - y + x)^2 - (r - x)^2$$

welcher Ausdruck, wie in Erkl. 166 gezeigt ist, auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$27) \ldots\ y = \frac{x \times 2 \times r}{r + x}$$

Die Gleichungen 25) und 27) stimmen überein, es ist somit $y' = y$, d. h. der Punkt o'

fällt mit o zusammen, bezw. die Linie gq geht durch o.

Erkl. 166. Die Umwandlung des Ausdruckes in Nr. 26 in jenen in Nr. 27 geschieht wie folgt:

Löst man in der Gleichung:

$$y^2 = (r - y + x)^2 - (r - x)^2$$

auf der rechten Seite die Klammernausdrücke auf, so erhält man:

$$y^2 = r^2 + y^2 + x^2 + 2 \times r \times x - 2 \times r \times y - 2 \times x \times y - r^2 + 2 \times r \times x - x^2$$

oder die sich aufhebenden Werte weggelassen:

$$2 \times y\,(r + x) = 4 \times r \times x$$

oder:

$$y = \frac{4 \times r \times x}{2 \times (r + x)}$$

$$= \frac{x \times 2 \times r}{r + x}$$

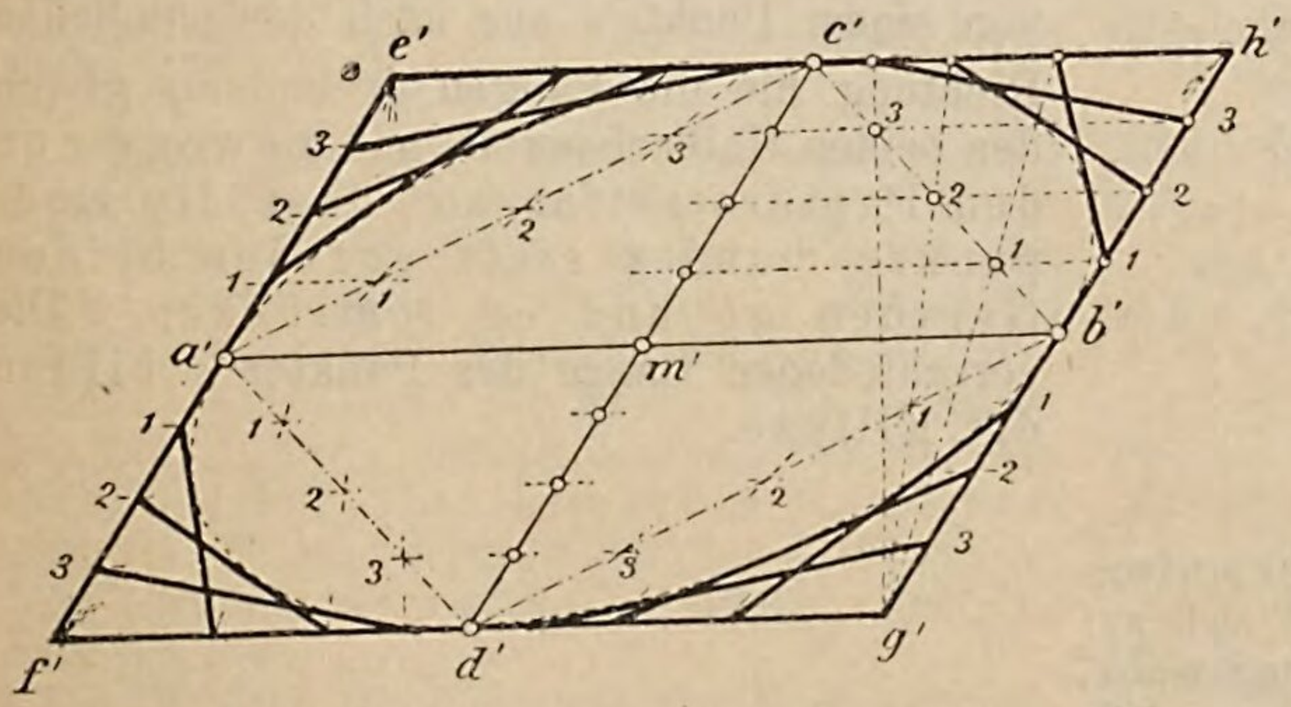
Frage 56. Welche Konstruktionen folgen in Anwendung des in Erkl. 165 Gesagten?

Antwort. Man kann nunmehr:

a) in einem beliebigen Punkte der Ellipse, wenn dieselbe durch ihre beiden Hauptachsen oder durch zwei conjugierte Durchmesser gegeben ist, ohne Benützung eines Hilfskreises die Tangente und damit auch die Normale konstruieren, denn man braucht ja nur, siehe Figur 122 und 123, um in dem Punkte $n\,(n')$ die Tangente zu erhalten, durch k (k') die Linien $kp\,(k'p')$ parallel zu $ab\,(a'b')$ durch $h\,(h')$ die Linien $hq\,(h'q')$ zu ziehen, so liefern dieselben auf gh $(g'h')$, ebenso auf $fg\,(f'g')$ die Punkte p und o (p' und o'), durch welche die Tangente in $n\,(n')$ hindurch geht.

b. Die Ellipse durch eine Reihe von Tangenten einhüllen, d. h. eine Reihe von Ellipsentangenten zeichnen, ohne deren Berührpunkte selbst zu kennen.

Figur 124.



Denn sind z. B., siehe Figur 124, zwei conjugierte Durchmesser $\overline{a'b'}$ und $\overline{c'd'}$ einer Ellipse gegeben, so zeichne man das umschriebene Parallelogramm $e'f'g'h'$ und ziehe in demselben die Verbindungslinien $\overline{a'c'}$, $\overline{b'c'}$, $\overline{b'd'}$, $\overline{d'a'}$. Teilt man nun diese Linien in eine beliebige Anzahl gleicher Teile (in der Figur wurden nur vier solcher Teile genommen) und verbindet die Teilpunkte auf $\overline{a'c'}$ mit f', jene auf $\overline{c'b'}$ mit g', jene auf $b'd'$ mit h', end-

lich jene auf $d'a'$ mit e', so treffen diese Linien die gegenüberliegenden Parallelogrammseiten $\overline{e'h'}$ und $\overline{f'g'}$ in Punkten der Ellipsentangenten. Die zugehörigen zweiten Punkte jener Tangenten sind die auf den Parallelogrammseiten $\overline{e'f'}$ und $\overline{h'g'}$ liegenden Teilpunkte und zwar entsprechen die Teilpunkte auf $\overline{a'e'}$ den Tangentenpunkten auf $\overline{e'c'}$, jene auf $\overline{a'f'}$ den Tangentenpunkten auf $\overline{f'd'}$ u. s. w., wie die Figur 124 dies zeigt.

g) Ueber einige weitere Eigenschaften der Ellipse.

Erkl. 167. Zieht man, siehe Figur 125, durch den Ellipsenpunkt e eine Parallele zu dem Halbmesser $\overline{me'}$, welche die Achsen in den Punkten f und g trifft, so ist die Strecke:

$$\overline{ef} = \overline{e''m} = \beta$$

und

$$\overline{eg} = \overline{e'm} = \alpha$$

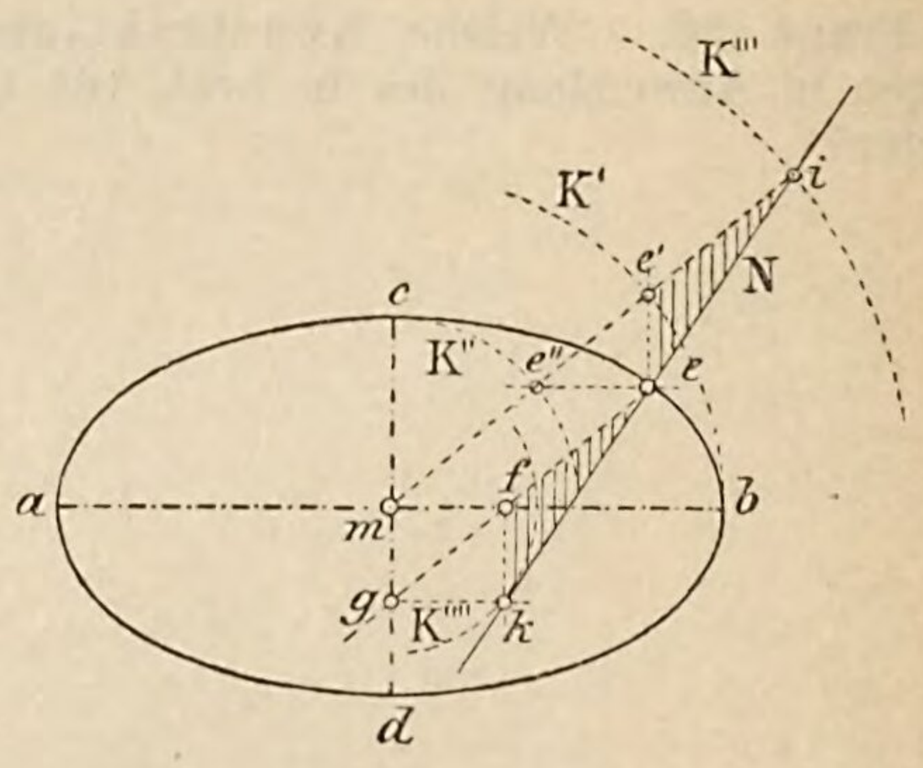
daher die Strecke:

$$\overline{gf} = \alpha - \beta$$

Aus dem oben Gesagten folgt der Satz:

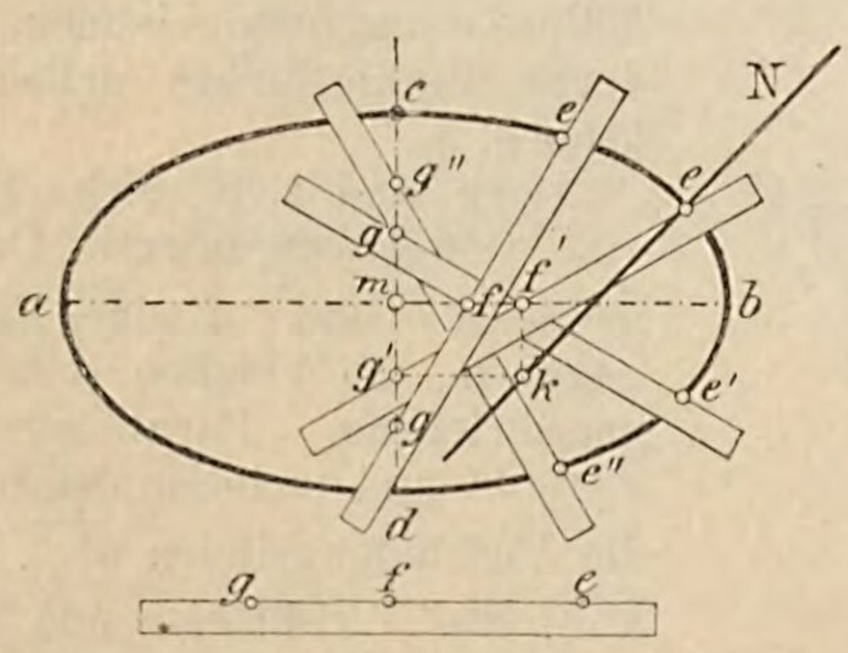
„Lässt man eine beliebige Strecke $\overline{gf}$ sich so bewegen, dass ihre Endpunkte f und g auf zweien festen auf einander senkrechten Geraden ab und cd fortrücken, so beschreibt jeder auf der Geraden fg angenommene Punkt e eine **Ellipse,** deren Achsen die beiden festen Geraden ab und cd darstellen. Die Längen der halben Achsen sind die Entfernungen des angenommenen Punktes e von den Endpunkten f und g.“

Figur 125.



Frage 57. Welche mechanische Erzeugungsweise einer Ellipse leitet sich aus dem eben genannten Satze ab?

Figur 126.



Antwort. Kennt man von einer Ellipse, siehe Figur 126, die beiden Achsen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ der Grösse und Lage nach, so trage man etwa auf dem Rande eines Papierstreifens von einem Punkte e aus nach der nämlichen Richtung hin die Längen $\overline{ef}$ und $\overline{eg}$ gleich den beiden Halbachsen ab und bewege nun den Papierstreifen so, dass die Endpunkte f und g stets auf den beiden Geraden ab und cd fortrücken. Die verschiedenen Lagen des Punktes e bilden die Ellipse.

Erkl. 168. Auch eine einfache Normalenkonstruktion für die Ellipse ergibt sich auf Grund der eben angegebenen Erzeugungsweise.

Konstruiert man nämlich, siehe Figur 125, wie früher angegeben, die Normale N des Punktes e und zieht durch f die Senkrechte fk

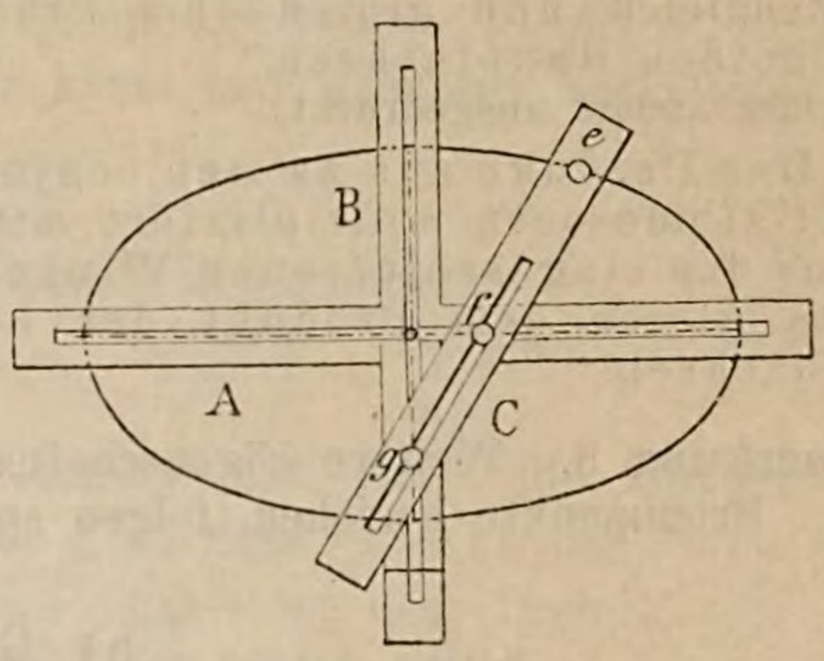
zu ab bis zum Schnitt mit N, so liegt k auf dem Kreise K'''', siehe Erkl. 156, denn die Dreiecke fke und $e'e'i$ sind kongruent (sie haben die Seite $\overline{ef} = \overline{e'i}$ sowie die Winkel bei f und e bezw. e' und i gleich), daher ist auch $\overline{ek} = \overline{ei}$, folglich liegt k auf dem Kreise K'''', d. h. die Strecke $\overline{mk}$ ist gleich der Strecke $\overline{gf} = \alpha - \beta$, siehe Erkl. 156; die vier Punkte m, f, k und g bilden somit die Ecken eines Reckteckes; demgemäss erhält man folgende direkte Normalenkonstruktion:

Für eine beliebige Lage des Strahles ge, siehe Figur 126, ziehe durch die Punkte f und g Parallele zu den Achsen, so schneiden sich diese in einem Punkte k der Normalen für den Ellipsenpunkt e.

Erkl. 169. Ein Apparat, mittels welchem man eine Ellipse auf die in der Antwort auf die Frage 57 beschriebene Weise erzeugen kann, heisst ein Ellipsenzirkel (Ellipsograph), siehe Figur 127. Er besteht aus zweien in fester Verbindung und auf einander senkrecht stehenden mit Nuten versehenen Leisten A und B. Eine dritte Leiste C, auf welcher sich zwei verstellbare Schrauben f und g befinden, bewegt sich so, dass die Bolzen der Schrauben unter sich gleichen Abstand behaltend, in den Nuten der Leisten A und B fortrücken. Das mit einem Schreibstift versehene Ende e der Leiste C beschreibt die Ellipse.

Soll der Apparat zum Zeichnen einer Ellipse verwendet werden, so bringt man die Leisten A und B über die Achsen der zu zeichnenden Ellipse, macht die Entfernungen $\overline{eg}$ und $\overline{ef}$ gleich der grossen bezw. kleinen Halbachse, zieht die Schrauben f und g fest an und führt die oben beschriebene Bewegung aus.

Figur 127.



***Frage 58.** Wie kann man die Grösse der von einer Ellipse eingeschlossenen Fläche, aufgefasst als Projektion einer Kreisfläche, ermitteln?

Erkl. 170. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem π-fachen (3,14-fachen) Produkt der beiden Halbachsen."

***Erkl. 171.** Umschreibt man einem Kreise K ein Quadrat, so ist dessen Inhalt F gleich $4 \times r^2$ und dieser Inhalt ändert sich mit der Lage des Quadrates nicht. Die Projektion des Quadrates ist aber entweder ein der Ellipse K umschriebenes Rechteck, dessen Seiten zu den Achsen parallel laufen, oder aber ein der Ellipse K_1 umschriebenes Parallelogramm, dessen Seiten zu zweien conjugierten Durchmessern parallel laufen. Sein Inhalt sei F_1.

Zwischen F und F_1 besteht nun die Beziehung:

$$F_1 = F \times \cos W_1$$

$$31) \ldots = 4 \times r^2 \times \cos W_1 = \text{constant.}$$

Antwort. Ist, siehe Figur 96, eine Ellipse K_1 die Projektion eines Kreises K, so besteht, siehe die Antwort auf die Frage 38, zwischen dem Flächeninhalte F des Kreises K und jenem F_1 der Ellipse K_1 der Zusammenhang:

$$28) \ldots F_1 = F \times \cos W_1$$

dabei bezeichnet W_1 den Winkel zwischen Kreis- und Ellipsenebene.

Nun ist aber bekanntlich der Flächeninhalt eines Kreises vom Halbmesser r:

$$28a) \ldots F = r^2 \times \pi$$

wobei π die Ludolphische Zahl $= 3{,}14159\cdots$, abgekürzt $= 3{,}14$ bezeichnet (siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie).

In Rücksicht auf Gleichung 28a) geht Gleichung 28) über in:

$$F_1 = r^2 \times \pi \times \cos W_1$$

$$29) \ldots = r \times r \times \cos W_1 \times \pi$$

Bezeichnen α und β die Halbachsen, a und b zwei conjugierte, unter dem Winkel w zu einander geneigte Halbmesser der Ellipse, so ist entweder:

$$F_1 = 4 \times \alpha \times \beta = 4 \times r^2 \times \cos W_1$$

oder:

$$F_1 = 4 \times a \times b \times \sin w = 4 \times r^2 \times \cos W_1$$

d. h. es findet die Gleichheit statt:

32) . . . $\alpha \times \beta = a \times b \times \sin w$

Erkl. 172. In der Erkl. 171 sind folgende Sätze enthalten:

„Die Inhalte aller einer Ellipse umbeschriebenen Parallelogramme sind **flächengleich** und gleich dem Produkte der beiden Hauptachsen."

Oder anders ausgedrückt:

„Das Produkt aus zweien conjugierten Halbmessern multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels ist stets gleich dem Produkt der beiden Halbachsen."

Sind nun die Halbachsen der Ellipse K_1 mit α und β bezeichnet, so ist bekanntlich $\alpha = r$ und $\beta = r \times \cos W_1$, daher kann man die Gleichung 29) auch so schreiben:

30) . . . $F_1 = \alpha \times \beta \times \pi = 3{,}14 \times \alpha \times \beta$

Erkl. 173. In ähnlicher Weise liesse sich auch zeigen, dass die Inhalte aller einer Ellipse einbeschriebenen Parallelogramme flächengleich und gleich dem doppelten Produkte der beiden Halbachsen sind.

Anmerkung 8. Weitere Eigenschaften der Ellipse, namentlich jene, welche sich auf die Brennpunkte beziehen, folgen später.

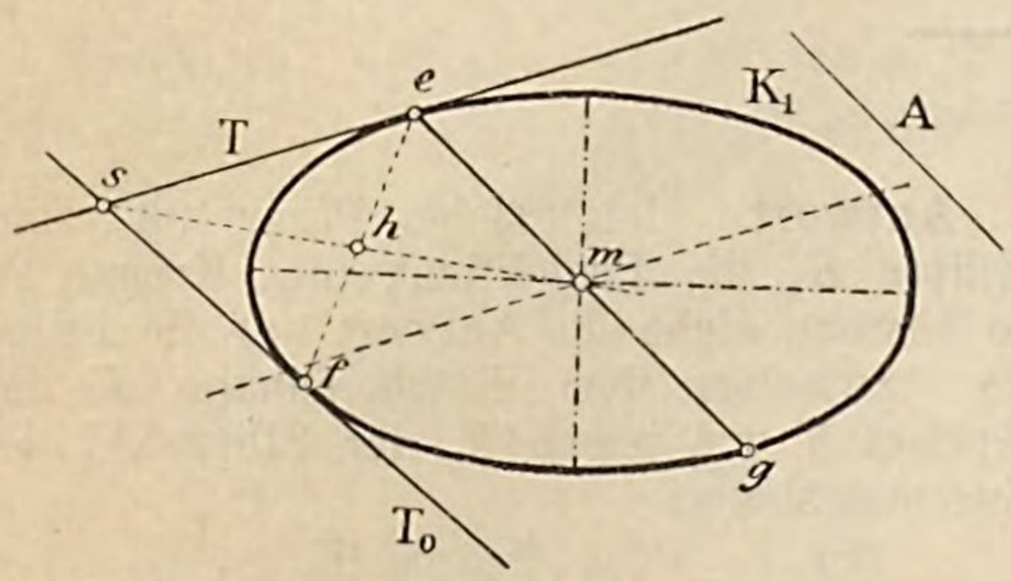
---

h) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 71. Von einer Ellipse K_1, siehe Figur 128, kennt man zwei Tangenten T und T_0 mit ihren Berührpunkten e und f, sowie die Richtung A des durch den einen Berührpunkt e gehenden Durchmessers $\overline{eg}$.

Man soll die Ellipse zeichnen.

Figur 128.



Auflösung. Verbindet man den Schnittpunkt s beider Tangenten T und T_0, siehe Figur 128, mit dem Halbierpunkte h der Berührsehne $\overline{ef}$, so geht diese Verbindungslinie durch den Mittelpunkt m der Ellipse, siehe Erkl. 174. Die durch den Berührpunkt e zur gegebenen Richtung A gezogene Parallele trifft daher die Verbindungslinie hs in dem Ellipsenmittelpunkte m. Zieht man nun durch m eine Parallele zur Tangente T, so stellt dieselbe die Lage des zum Durchmesser $\overline{eg}$ conjugierten Durchmessers dar, dessen Länge nun wie in Aufgabe 69 gezeigt wurde, konstruiert werden kann. Die weitere Konstruktion bleibt wie in Antwort auf die Frage 54.

Erkl. 174. Dass die Verbindungslinie sh durch den Mittelpunkt m gehen muss, ist leicht einzusehen. Denn zieht man in einem Kreise durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eine Gerade nach dem Mittelpunkt der Berührsehne, so geht diese Verbindungslinie nach dem Kreismittelpunkte. Wird nun das ganze Liniensystem rechtwinklig auf eine Ebene projiziert, so gibt die Projektion des Halbierpunktes der Kreissehne den Halbierpunkt der Ellipsensehne, siehe Erkl. 51, und seine Verbindungslinie mit dem Tangentenschnittpunkt geht durch den Ellipsenmittelpunkt.

Aufgabe 72. Von einer Ellipse K_1, siehe Figur 129, kennt man einen Durchmesser $\overline{ef}$ und die Tangenten T und T_0 in seinen Endpunkten e und f; die Achsenlängen sollen sich wie $m:n$ verhalten.

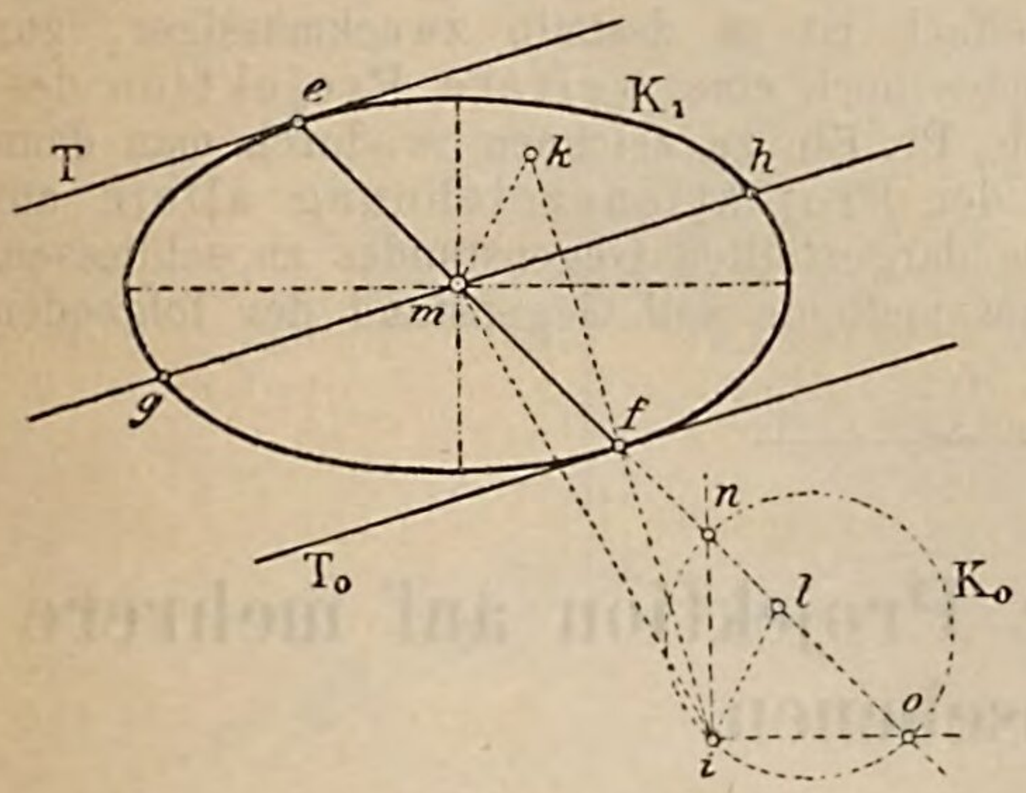
Man soll:

a) die Achsen ihrer Grösse und Richtung nach,

b) die Ellipse selbst

konstruieren.

Figur 129.



Erkl. 175. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

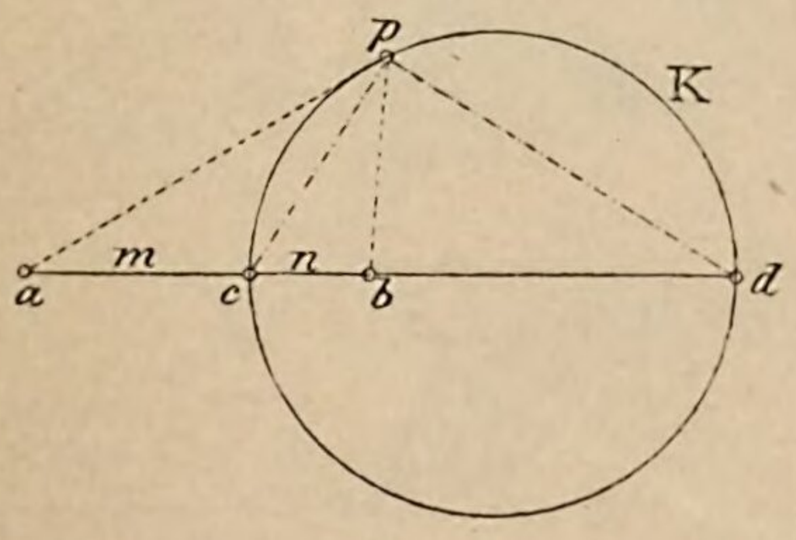
„Teilt man eine Strecke $\overline{ab}$, siehe Figur 130, in den Punkten c und d in einem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$, so ist der geometr. Ort für alle Punkte, welche von den beiden Punkten a und b ein gegebenes Abstandsverhältnis $\frac{m}{n}$ besitzen, der über der Strecke $\overline{cd}$ als Durchmesser beschriebene Kreis K. Ist p ein Punkt dieses Kreises, so ist also:

$$\frac{\overline{pa}}{pb} = \frac{m}{n}$$

Zugleich halbieren die Verbindungslinien pc und pd, die Winkel der Geraden pa und pb.“

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Figur 130.



Auflösung a. Ist $\overline{ef}$, siehe Figur 129, der gegebene Durchmesser, so ist der zu ihm conjugierte Durchmesser $\overline{gh}$ parallel zu T bezw. T_0. Wäre nun $\overline{mg}$ der Länge nach bekannt und hätte man von f die Senkrechte auf mg gefällt und die Strecken $\overline{fi} = \overline{fk} = \overline{mg}$ gemacht, so wäre, siehe Erkl. 154 und 156, $\overline{mi} = \alpha + \beta$ und $\overline{mk} = \alpha - \beta$.

Nun kennt man aber das Verhältnis:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$$

daher auch das Verhältnis:

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{m + n}{m - n}$$

Verlängert man daher die Strecke $\overline{mf}$ bis nach l, so dass $\overline{fl} = \overline{mf}$ ist, so ist auch $\overline{li} = \overline{mk}$, daher in dem Dreieck mil das Verhältnis der beiden Seiten:

$$\frac{\overline{mi}}{il} = \frac{m + n}{m - n}$$

sowie die Seite $\overline{ml} = \overline{ef}$ gegeben, und ausserdem die durch f zu T gezogene Senkrechte als Ort für die dritte Spitze bekannt. Hat man aber dieses Dreieck konstruiert, so ergeben sich die Achsenlagen als die Parallelen zu den Halbierlinien des Winkels mil.

Man erhält folgende

Konstruktion: Ist $\overline{ef}$, siehe Figur 129, der gegebene Durchmesser und sind T und T_0 die gegebenen Tangenten, so verlängere man ef über f hinaus nach l, so das $\overline{ml} = \overline{ef}$ ist, teile die Strecke ml in den Punkten n und o in dem Verhältnis:

$$\frac{m + n}{m - n}$$

und beschreibe über $\overline{no}$ als Durchmesser den Kreis K_0, siehe Erkl. 175, welcher von der Senkrechten durch f zu T in dem Punkte i getroffen wird. Die Verbindungslinien io und in liefern die Achsenrichtungen und die Strecken $\overline{il}$ und $\overline{im}$ geben die Längen $\alpha - \beta$ bezw. $\alpha + \beta$, aus welchen sich die Strecken α und β wie früher ermitteln lassen.

Auflösung b. Nachdem die Achsen der Ellipse der Grösse und Lage nach konstruiert sind, bleibt die Bestimmung einzelner Ellipsenpunkte die gleiche, wie früher.

Anmerkung 9. Bisher wurde gezeigt, wie man die rechtwinkligen Projektionen der Raumgrössen: Punkt, Linie und Fläche (insbesondere die Ebene) auf eine **Pr. Eb.** darstellen, und wie man die wahre gegenseitige Lage dieser Raumgrössen aus der Projektionszeichnung ermitteln und etwaige an ihnen vorzunehmende Konstruktionen durch solche in der Projektionszeichnung auszuführende ersetzen kann, sobald gewisse in Betracht kommende Bestimmungsstücke gegeben sind. In der That wird auch von dieser Darstellungsmethode in der Technik ausgedehnter Gebrauch gemacht, siehe Erkl. 24. Ihr haftet jedoch der Mangel an, dass häufig die auszuführenden Konstruktionen nicht immer den gewünschten Grad von Einfachheit erreichen, sowie dass zur Bestimmung einer Raumgrösse ausser ihrer Projektion noch die Abstände gewisser auf ihr befindlicher Punkte von der **Pr. Eb.**, entweder in Form von Strecken oder aber durch Masszahlen gegeben sein müssen. Vielfach ist es deshalb zweckmässiger, zur Bestimmung der Gestalt eines Gegenstandes noch eine weitere Projektion desselben auf eine entsprechend zu wählende **Pr. Eb.** zu zeichnen, wodurch man dann in den Stand gesetzt ist, lediglich aus der Projektionszeichnung allein auf die Gestalt und räumliche Lage des dargestellten Gegenstandes zu schliessen.

Die Durchführung dieser Projektionsmethode soll Gegenstand der folgenden Betrachtungen sein.

3) Ueber die rechtwinklige Projektion auf mehrere Projektionsebenen.

A) Ueber die rechtwinklige Projektion auf mehrere Projektionsebenen im allgemeinen.

Frage 59. Wie wählt man im allgemeinen die Projektionsebenen, siehe Erkl. 176, zur Darstellung einer Raumgrösse?

Antwort. An und für sich ist es gleichgültig, welche Lagen die in Betracht kommenden **Pr. Ebn.**, siehe Erkl. 176, zu einander einnehmen. In der Regel aber gibt man einer der **Pr. Ebn.** eine horizontale Lage und wählt die übrigen **Pr. Ebn.** senkrecht zu ihr.

Erkl. 176. In der Folge soll das Wort „Projektionsebenen“ stets abgekürzt und zwar **Pr. Ebn.** geschrieben werden.

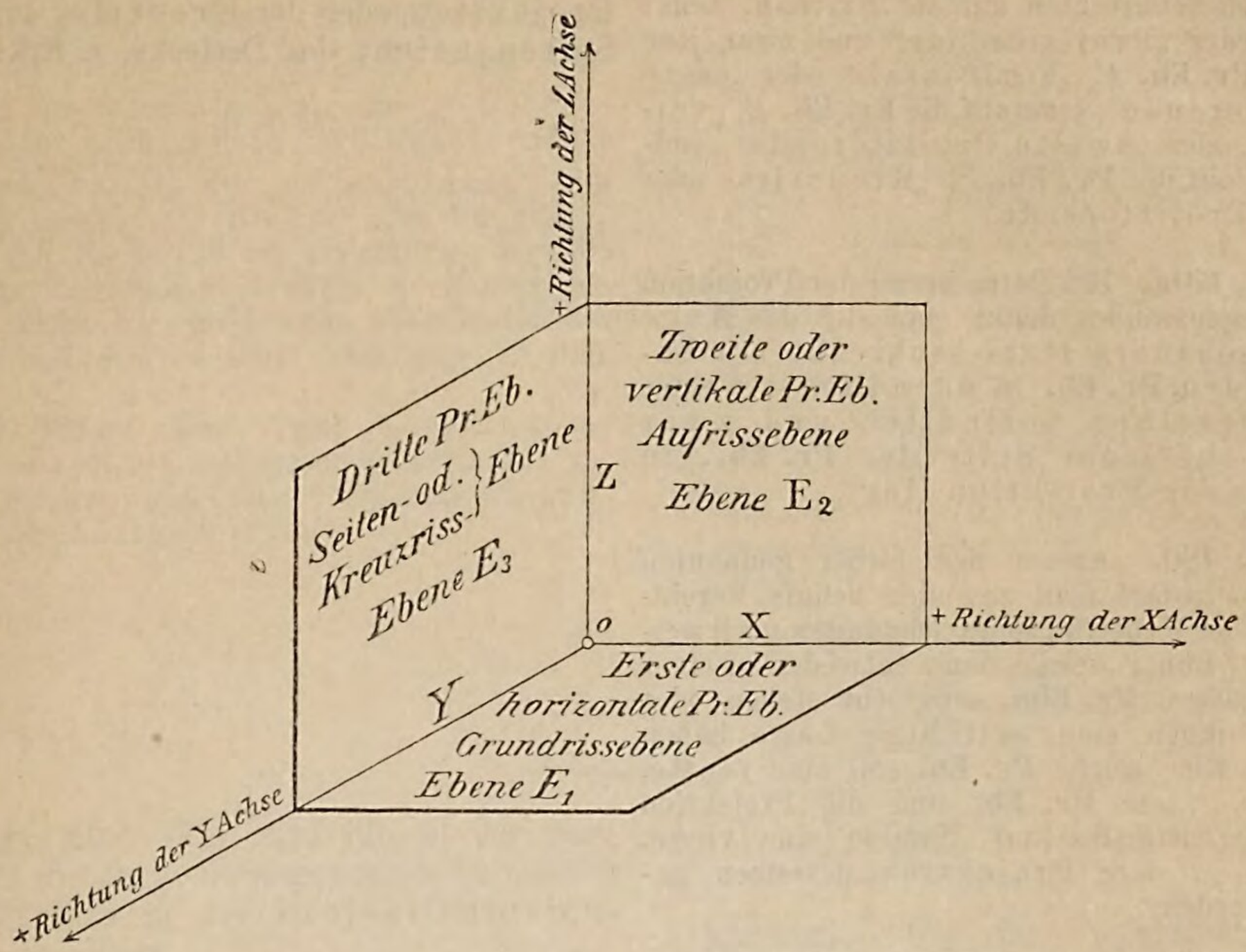
Erkl. 176a. Gewöhnlich nimmt man, siehe Figur 131, nur zwei **Pr. Ebn.** an, nämlich eine erste oder horizontale **Pr. Eb.** E_1, auch Grundrissebene genannt, und eine zweite oder vertikale **Pr. Eb.** E_2, auch Aufrissebene genannt.

Manchmal gebraucht man aber auch noch eine dritte **Pr. Eb.** E_3 senkrecht zu E_1 und E_2, d. h. senkrecht zur Schnittlinie X der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 und nennt diese dritte **Pr. Eb.** die Seitenebene oder die Kreuzrissebene, siehe Figur 131.

Erkl. 177. Die Schnittlinien der drei **Pr. Ebn.**, siehe Figur 131, E_1, E_2 und E_3 heissen Projektionsachsen und zwar nennt man die Schnittlinie von

E_1 u. E_2 die Projektionsachse X oder auch X-Achse
E_1 „ E_3 „ „ „ Y „ „ Y „
E_2 „ E_3 „ „ „ Z „ „ Z „

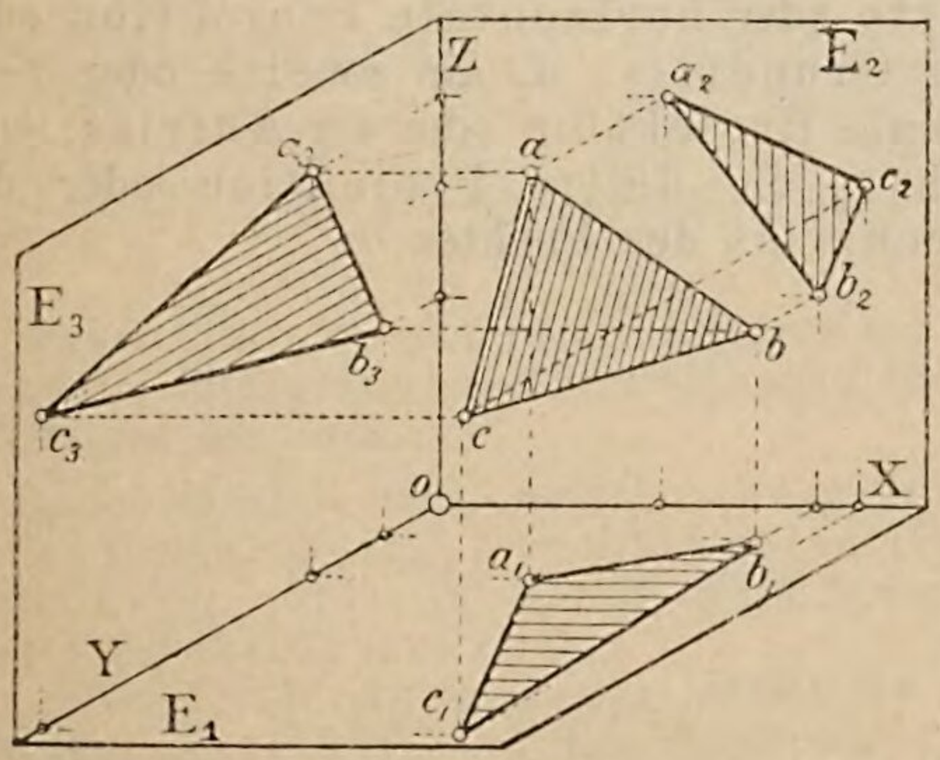
Figur 131.



Erkl. 178. Die drei **Pr. Ebn.** schneiden sich in einem Punkte *o* und in diesem Punkte wird jede der Projektionsachsen in zwei Hälften zerlegt, von welchen die eine positiv, die andere negativ genannt werden soll. Welche Hälfte man als positiv bezeichnet, ist an und für sich gleichgültig; üblich ist es, die Bezeichnung wie in der Figur 131 geschehen, vorzunehmen.

Frage 60. Wie bestimmt man im allgemeinen die Projektion einer Raumgrösse auf die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 und wie nennt man die Projektionen auf dieselben?

Figur 132.



Antwort. Man denke sich durch sämtliche Punkte der Raumgrösse, z. B. des Dreiecks *abc*, siehe Figur 132, Senkrechte auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 gefällt und deren Fusspunkte mit einander in derselben Reihenfolge wie die Punkte der Raumgrösse selbst verbunden, so erhält man in jeder **Pr. Eb.** eine Projektion der Raumgrösse. Die Projektion der Raumgrösse, z. B. des Dreiecks *abc*, auf die erste oder horizontale **Pr. Eb.**, heisst die erste oder horizontale Projektion oder auch der Grundriss bezw. die obere Ansicht des Dreiecks, siehe Erkl. 179a. Die Projektion auf die zweite oder vertikale **Pr. Eb.** heisst die zweite oder vertikale Projektion, oder endlich der Aufriss bezw. die vordere Ansicht, siehe Erkl. 179, des Dreiecks. Die Projektion end-

Erkl. 179. Die in nebenstehender Antwort genannten Senkrechten auf die **Pr. Ebn.** nennt man wieder „Projizierende“ und zwar jene auf die **Pr. Eb.** E_1 „horizontal-“ oder „erste Projizierende“, jene auf die **Pr. Eb.** E_2 „vertikal-“ oder „zweite Projizierende“, endlich jene auf die **Pr. Eb.** E_3 „Kreuzriss- oder dritte Projizierende.“

Erkl. 179a. Bei Betrachtung der Projektion eines Gegenstandes denkt man sich das Auge des Beschauers stets senkrecht zur betreffenden **Pr. Eb.** in unendlicher Ferne von derselben befindlich und zwar immer auf jener Seite der **Pr. Eb.**, in welcher die Projektion liegt.

Erkl. 180. Ausser den bisher genannten **Pr. Ebn.** bedarf man zuweilen behufs Vereinfachung der Konstruktionszeichnungen noch weiterer **Pr. Ebn.**, welche dann entweder zu einer der bisherigen **Pr. Ebn.** senkrecht stehen oder aber zu ihnen eine beliebige Lage haben können. Eine solche **Pr. Eb.** soll eine vierte, fünfte, ... $n$te **Pr. Eb.** und die Projektion eines Gegenstandes auf dieselbe eine vierte, fünfte, ... $n$te Projektion desselben genannt werden.

Erkl. 181. Die Bezeichnung der Punkte, Linien etc. bleibt die gleiche wie bisher, nur wird die Ziffer 1, 2, 3, ... n der Projektion rechts unten beigefügt, je nachdem dieselbe in der 1sten, 2ten, 3ten oder ... $n$ten **Pr. Eb.** liegt.

B) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Punktes.

Frage 61. Wie bestimmt man die rechtwinkligen Projektionen eines Punktes a auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3, s. Figur 132.

Erkl. 182. Denkt man sich durch die Punkte a_1, a_2, a_3, siehe Figur 133, Parallele zu den drei Linien X, Y, Z gezogen, so stellen diese die Projektionen der Projizierenden durch a auf die **Pr. Ebn.** dar, und sie schneiden die Achsen X, Y und Z in den Punkten a_x, a_y, a_z, welche im Verein mit den Punkten o, a, a_1, a_2 und a_3 die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipedons bilden.

Die Längen aa_1, a_2a_x und a_3a_y sind daher einander gleich und gleich dem Abstande des Punktes a von der **Pr. Eb.** E_1; ebenso geben die Längen $\overline{aa_2}$, $\overline{a_1a_x}$, $\overline{a_3a_z}$ den Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** E_2, endlich die Längen $\overline{aa_3}$, $\overline{a_1a_y}$, $\overline{a_2a_z}$ den Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** E_3 an.

Erkl. 183. Man kann die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 auch mit dem gemeinsamen Namen „Coordinatenebenen“ bezeichnen und die lich auf die dritte **Pr. Eb.** heisst die dritte Projektion oder der Kreuzriss bezw. die Seitenansicht des Dreiecks, s. Erkl. 179a.

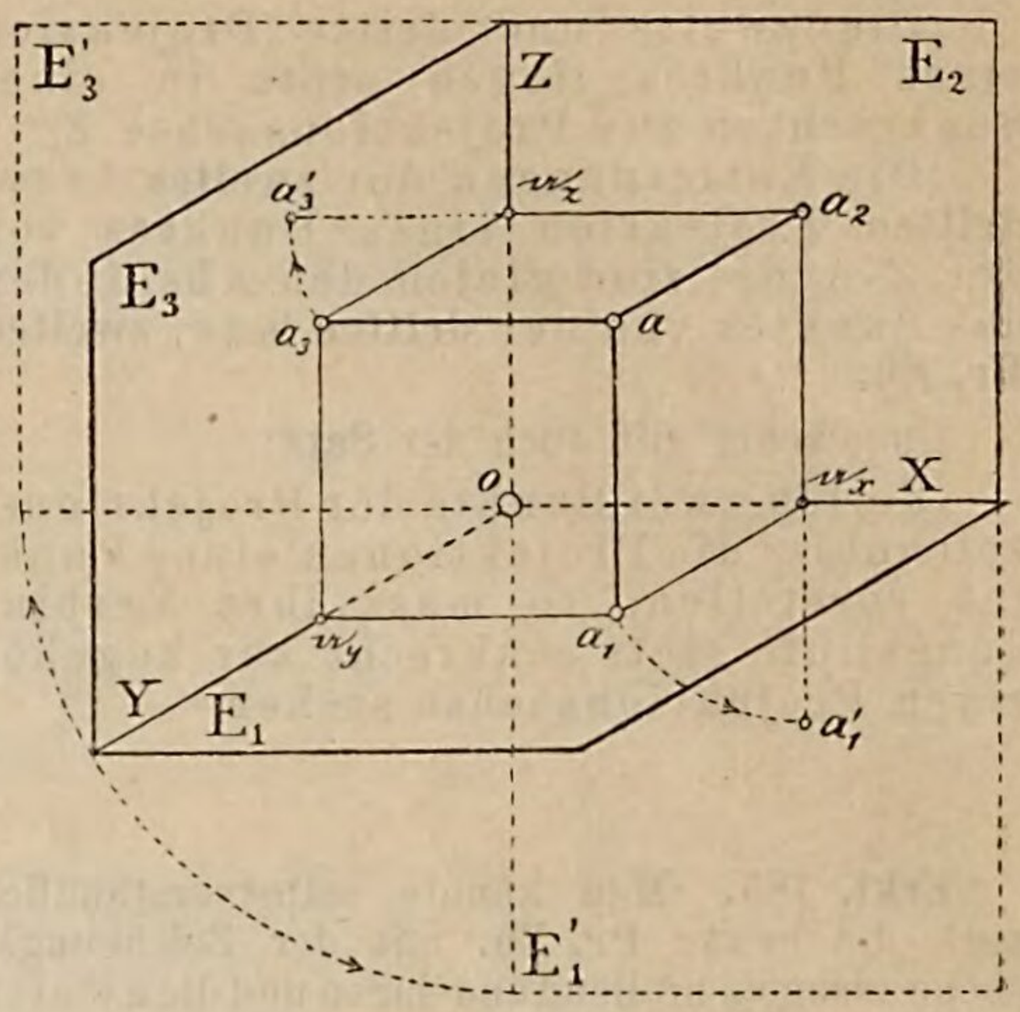
Antwort. Man denke sich von dem Punkte a, siehe Figur 133, Projizierende auf die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 gezogen, so geben deren Durchschnittspunkte a_1, a_2 und a_3 mit E_1, E_2 und E_3 die gesuchten Projektionen des Punktes a und zwar ist a_1 die erste oder horizontale Projektion oder der Grundriss, a_2 die zweite oder vertikale Projektion oder der Aufriss, endlich a_3 die dritte Projektion oder der Kreuzriss des Punktes a.

Längen $\overline{oa_x}$, $\overline{oa_y}$, $\overline{oa_z}$ die Coordinaten des Punktes a nennen. Dabei bezeichnet man die Strecke $\overline{oa_x}$ als die „x-Coordinate“ oder „Abscisse“, die Strecke $\overline{oa_y}$ als die „y-Coordinate“ oder auch „erste Ordinate“, endlich die Strecke $\overline{oa_z}$ als die „z-Coordinate“ oder auch die „zweite Ordinate“ des Punktes a.

Aus der Figur 133 ist ersichtlich, dass die räumliche Lage eines Punktes vollständig bestimmt erscheint, sobald seine Coordinaten der Länge und dem „Sinne“ nach gegeben sind.

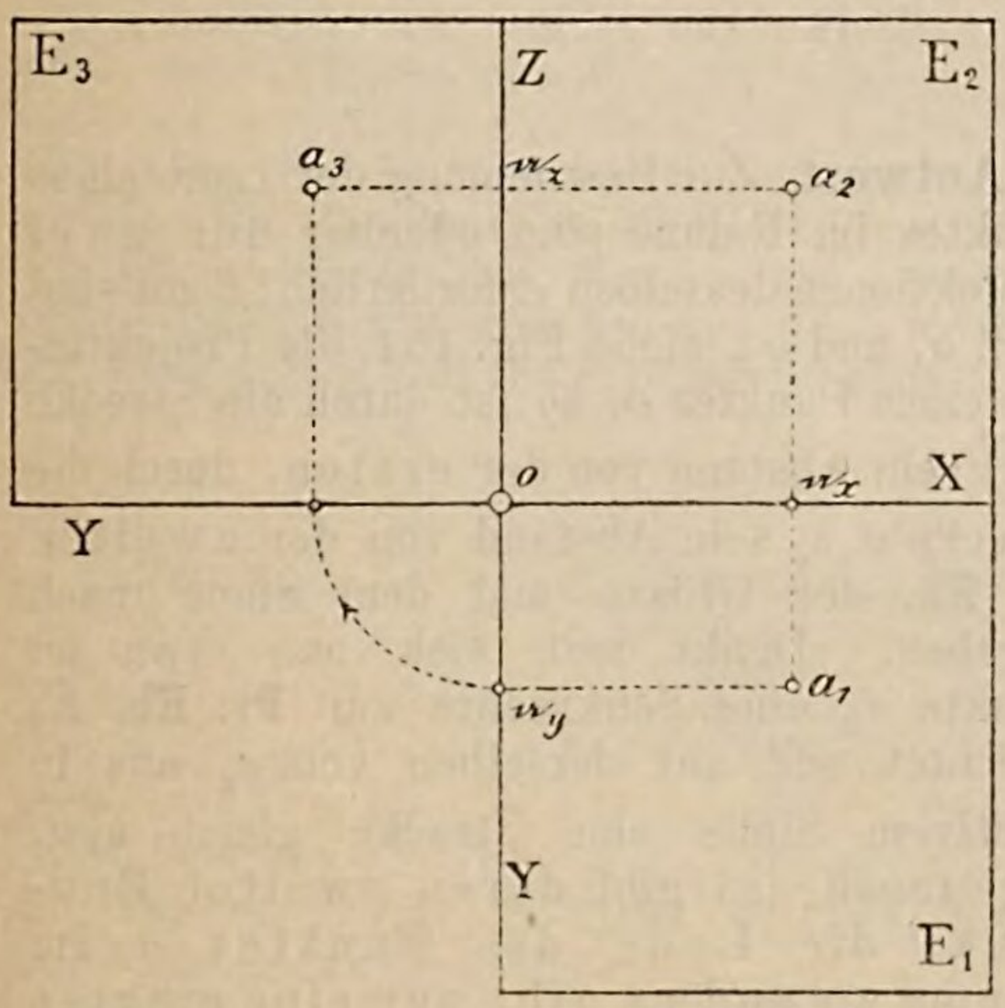
Erkl. 183 a. Das Wort „Coordinaten“ stammt aus dem Lateinischen (coordinare, zusammengehören) und heisst so viel als wie „zusammengehörige Linien“.

Figur 133.



Frage 62. Wie wird die in der Antwort auf die Frage 61 angedeutete Projektion eines Punktes in der Projektionszeichnung ausgeführt.

Figur 134.



Erkl. 184. Aus der in der Antwort auf die Frage 62 durchgeführten Projektion eines Punktes folgen die Sätze:

„Die erste und zweite Projektion eines Punktes liegen in der Projektionszeichnung stets in einer Senkrechten zur Projektionsachse X.“

„Die Entfernungen der **ersten** bezw. **zweiten** Projektion eines Punktes von der X-Achse sind gleich den Abständen

Antwort. Um die Projektionen eines Punktes a, siehe Figur 134, auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2, E_3 in der Projektionszeichnung zu erhalten, denke man sich die zweite oder vertikale **Pr. Eb.** mit der Zeichnungsebene zusammenfallend angenommen und die beiden anderen Ebenen E_1 und E_3 um ihre Schnittlinien X und Z mit E_2 in die Zeichnungsebene umgelegt, Figur 133 veranschaulicht diesen Vorgang. Bei dieser Umlegung bleiben die Linien $\overline{a_1 a_x}$ und $\overline{a_3 a_z}$ stets senkrecht zu X bezw. Z und kommen daher, sobald die Ebenen E_1 und E_3 in die Ebene E_2, d. h. nach E_1' und E_3' gebracht sind, in die Verlängerung von $\overline{a_2 a_x}$ bezw. $\overline{a_2 a_z}$ zu liegen, so dass man die Projektionszeichnung, siehe Figur 134, erhält.

In denselben sind alle 3 Ebenen E_1, E_2, E_3 in die Zeichnungsebene niedergelegt und es bezeichnen die Längen $\overline{a_2 a_x}$, $\overline{a_1 a_x}$ und $\overline{a_2 a_z}$ die Abstände des Punktes a von den **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3.

des Punktes von der **zweiten** bezw. **ersten Pr. Eb.**“

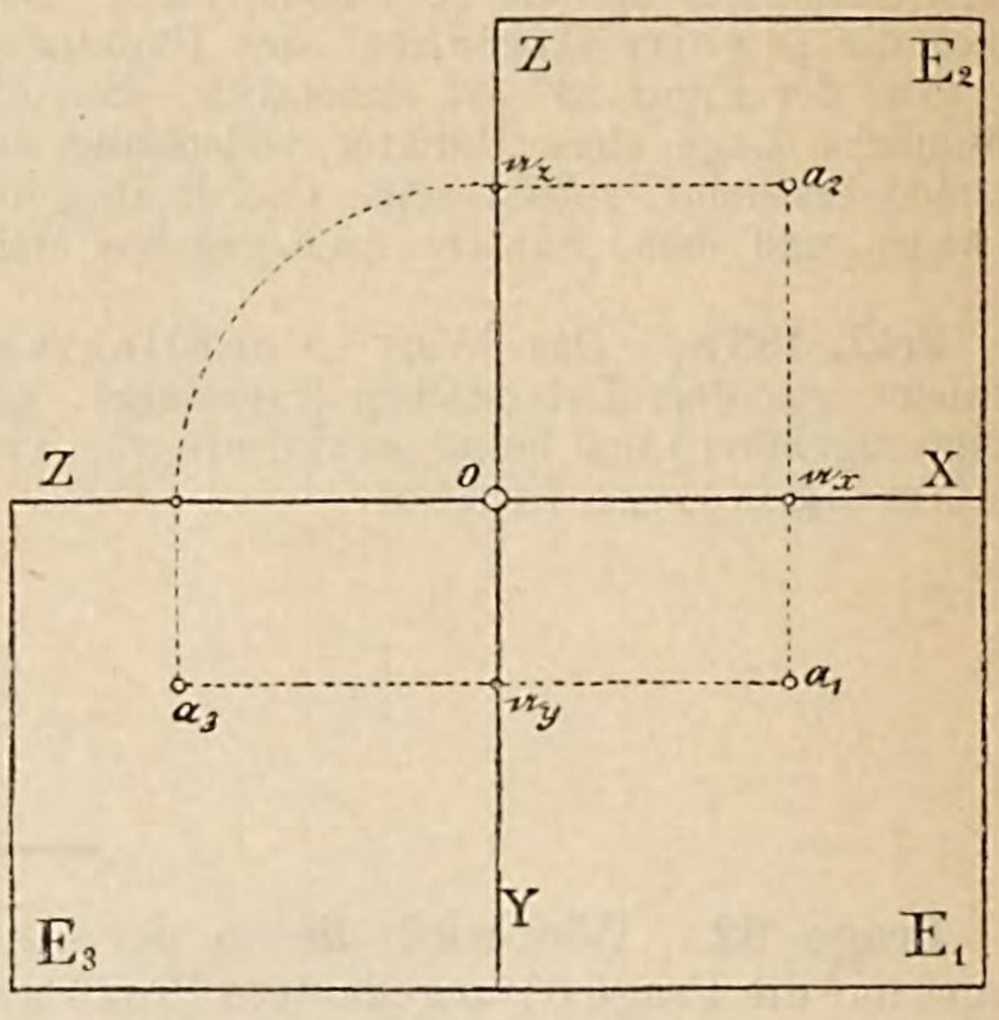
„Die zweite und dritte Projektion eines Punktes liegen stets in einer Senkrechten zur Projektionsachse *Z*.“

„Die Entfernungen der **zweiten** bezw. **dritten** Projektion eines Punktes von der *Z*-Achse sind gleich den Abständen des Punktes von der **dritten** bezw. **zweiten Pr. Eb.**“

Umgekehrt gilt auch der Satz:

„Sollen zwei Punkte der Projektionszeichnung die Projektionen eines Punktes vorstellen, so muss ihre Verbindungslinie stets senkrecht zur zugehörigen Projektionsachse stehen.“

Figur 135.



Erkl. 185. Man könnte selbstverständlich auch die erste **Pr. Eb.** mit der Zeichnungsebene zusammenfallend annehmen und die zweite und dritte um die Achsen *X* bezw. *Y* in die Zeichnungsebene umlegen. Man erhielte dann für die Projektionen eines Punktes die Projektionszeichnung, siehe Figur 135. Welche Art der Umlegung man vornimmt ist entweder in das Belieben des Zeichners gestellt, oder hängt von den gegebenen Umständen, unter welchen die Zeichnung ausgeführt werden soll, ab.

Frage 63. Wie viele Projektionen eines Punktes sind zur Bestimmung seiner Lage im Raume notwendig?

Antwort. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume sind offenbar nur zwei Projektionen desselben erforderlich; denn sind z. B. a_1 und a_2, siehe Fig. 134, die Projektionen eines Punktes a, so ist durch die Strecke $\overline{a_2 a_x}$ sein Abstand von der ersten, durch die Strecke $\overline{a_1 a_x}$ sein Abstand von der zweiten **Pr. Eb.** der Grösse und dem Sinne nach gegeben. Denkt man sich nun etwa im Punkte a_2 eine Senkrechte zur **Pr. Eb.** E_2 errichtet und auf derselben von a_2 aus in positivem Sinne eine Strecke gleich $\overline{a_x a_1}$ abgetragen, so gibt deren zweiter Endpunkt die Lage des Punktes a im Raume an und es gibt nur eine einzige solche Lage.

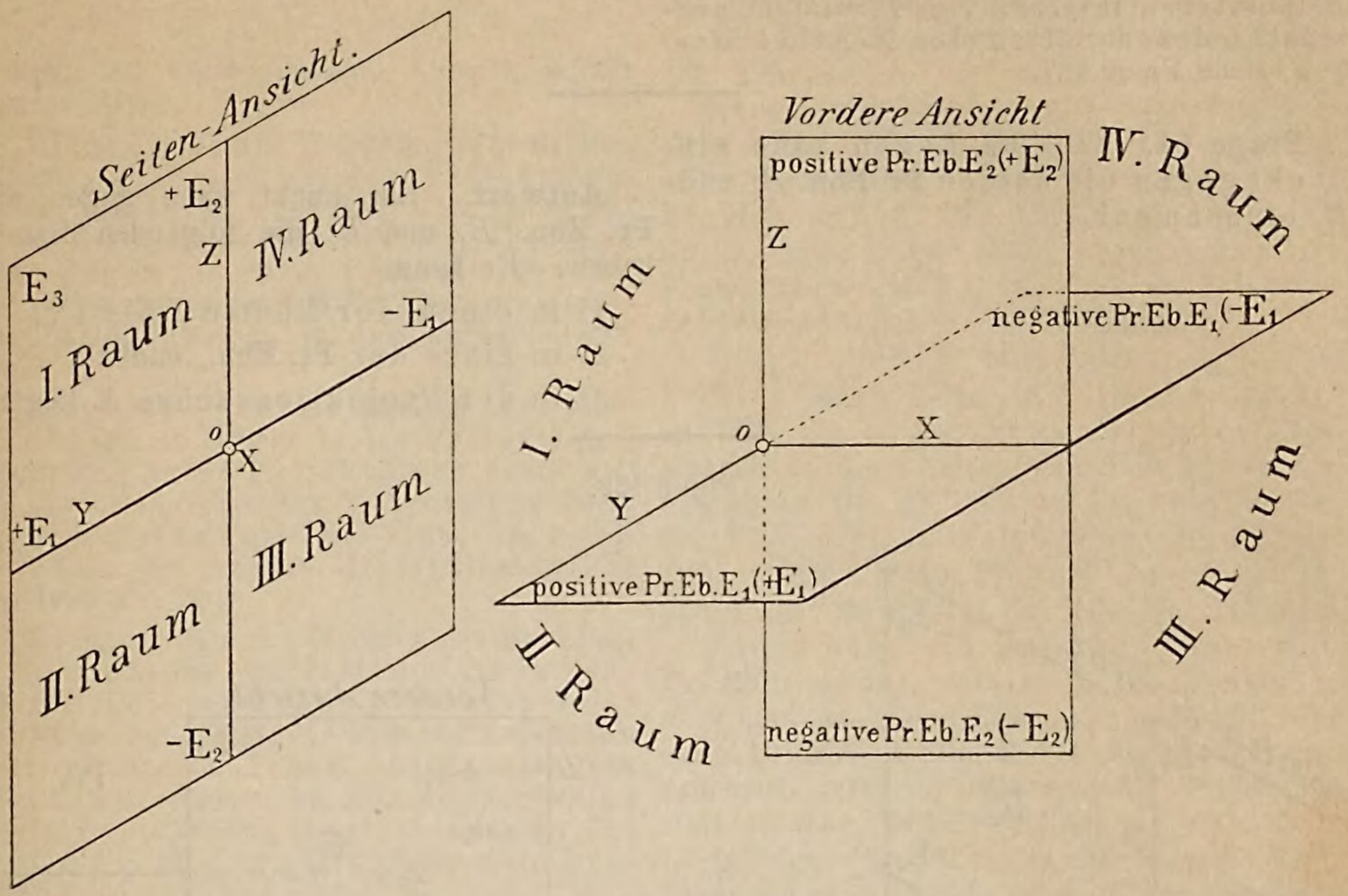
Erkl. 186. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Die Lage eines Punktes im Raume ist durch seine rechtwinkligen Projektionen auf zwei zu einander senkrecht stehenden **Pr. Ebn.** vollständig bestimmt.“

Erkl. 186a. Je zwei der **Pr. Ebn.** E_1, E_2, E_3 sollen ein Projektionssystem heissen und zwar bilden die Ebenen E_1 und E_2, E_1 und E_3, endlich E_2 und E_3 die Systeme I—II, I—III und II—III beziehungsweise.

Erkl. 187. Die Strecken $\overline{o a_x}$, $\overline{o a_y}$ und $\overline{o a_z}$, siehe Figur 134, sind nach Erkl. 183 die Coordinaten des Punktes a und zwar ist $\overline{o a_x}$ die Abscisse, die Strecke $a_1 a_x$ bezw. $o_2 a_x$ die erste und zweite Ordinate. Der Punkt o, dessen Lage auf der *X*-Achse beliebig gewählt werden kann, soll für die Folge der „Coordinatenanfangspunkt“ oder der Ursprung heissen.

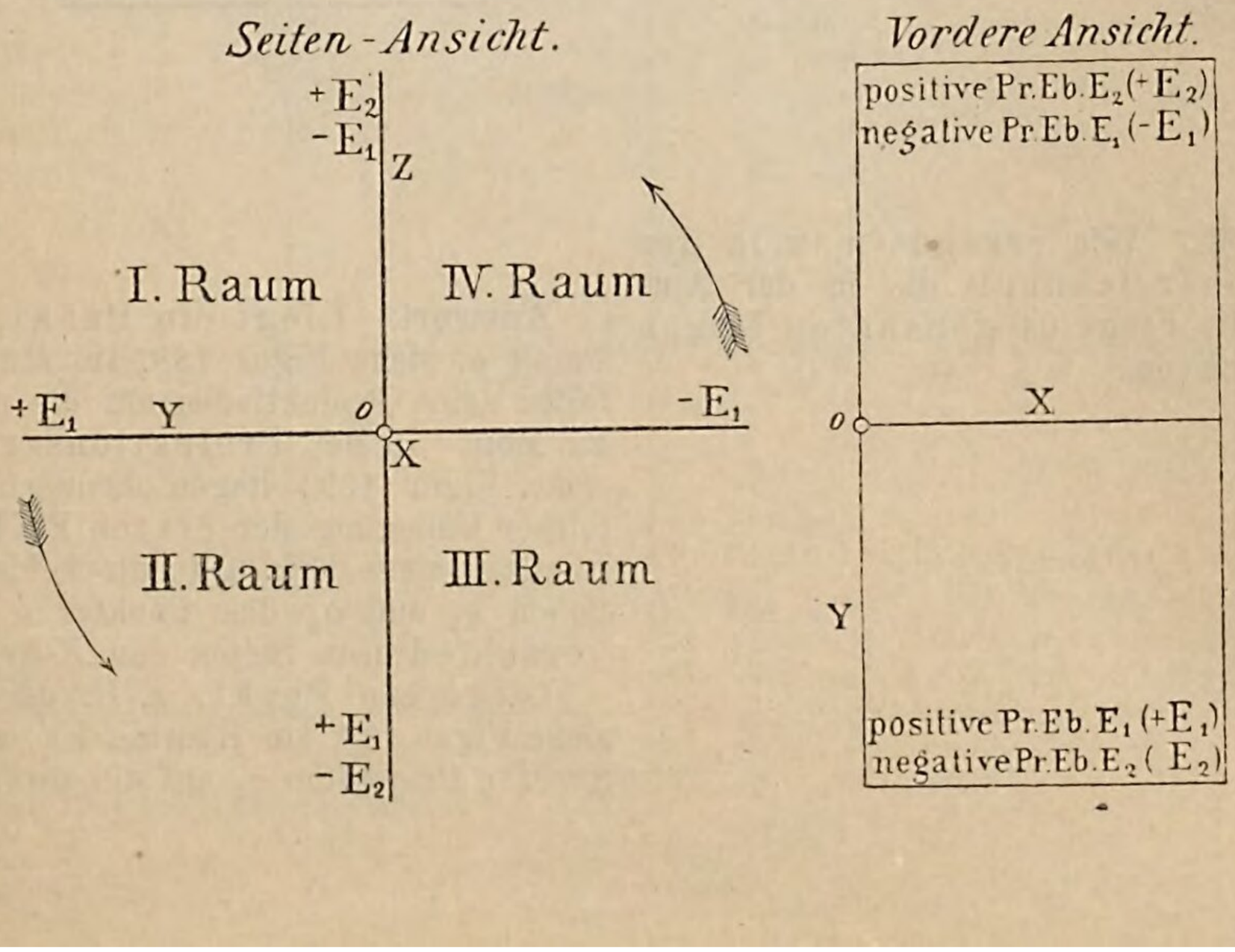
Figur 136.



Erkl. 188. Die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, siehe Figur 136, werden durch die X-Achse je in zwei Hälften geteilt, von welchen man eine als positive **Pr. Eb.**, die andere als negative **Pr. Eb.** bezeichnet. Als positive zweite **Pr. Eb.** gilt stets der über der ersten **Pr. Eb.** gelegene Teil von E_2, als positive erste **Pr. Eb.** gilt stets der vor der zweiten **Pr. Eb.** gelegene Teil von E_1, siehe auch Erkl. 178.

Erkl. 189. Die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, jede als unbegrenzt vorausgesetzt, teilen, siehe Figur 136, den Raum in vier Teile, I, II, III, IV, und zwar begrenzen die positiven Teile der **Pr. Ebn.** den ersten, die negativen Teile den dritten Raum; je eine positive und negative Hälfte der **Pr. Ebn.** begrenzen die Räume zwei und vier.

Figur 137.



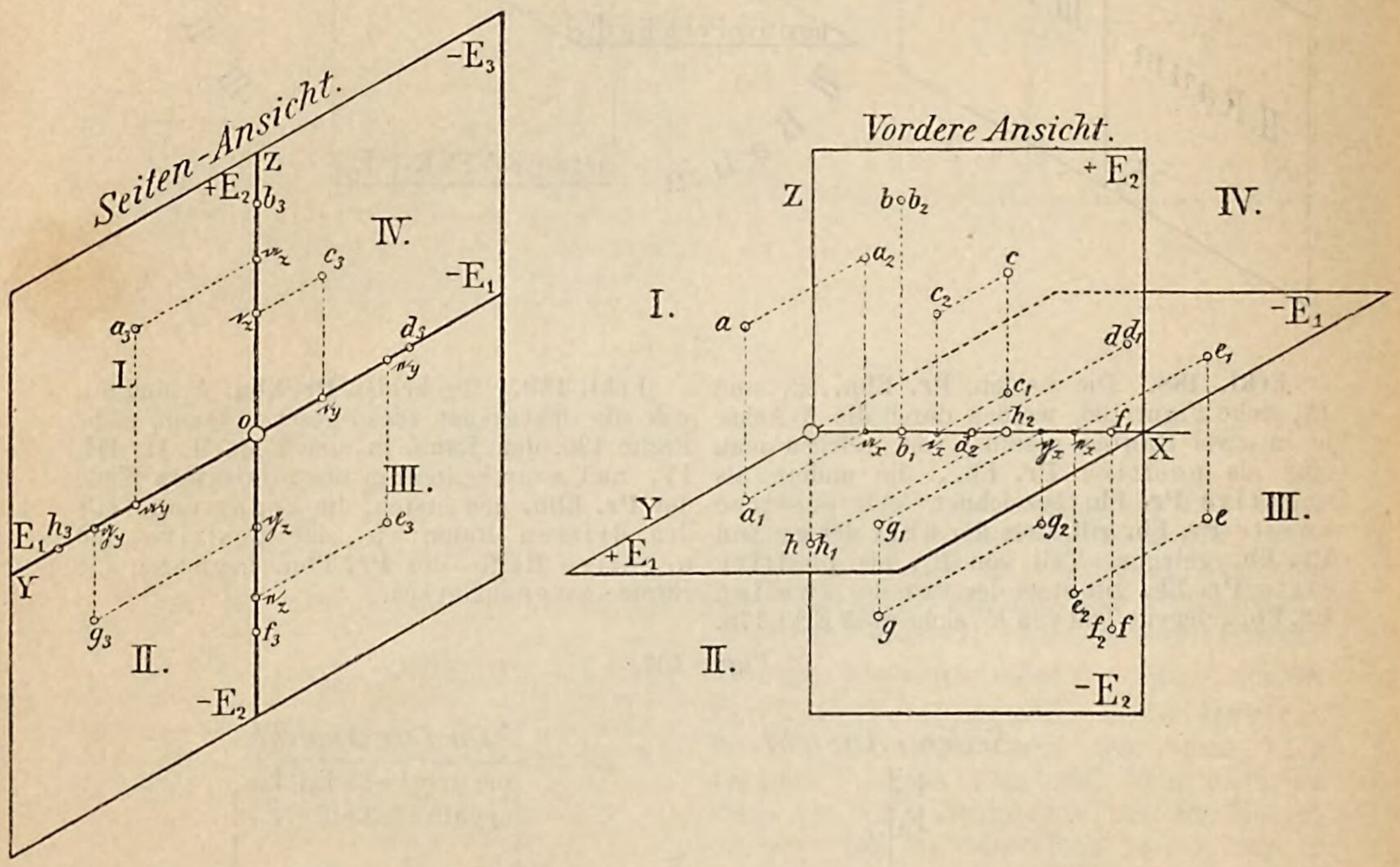
Erkl. 190. Die Umlegung der ersten **Pr. Eb.** in die zweite wird stets so vorgenommen, dass die positiven Hälften von E_1 und E_2 auf verschiedenen Seiten der X-Achse liegen, siehe Figur 137.

Frage 64. Welche Lagen kann ein Punkt gegen die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 einnehmen?

Antwort. Ein Punkt kann gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 die folgenden Lagen haben: Er kann:

1) in einem der Räume I bis IV,
2) in einer der **Pr. Ebn.**, endlich
3) in der Projektionsachse X liegen.

Figur 138.



Frage 65. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die in der Antwort auf die Frage 64 genannten Lagen eines Punktes?

Antwort. Liegt ein Punkt, z. B. der Punkt a, siehe Figur 138, im Raume I, so fallen seine Projektionen auf die positiven **Pr. Ebn.** In der Projektionszeichnung, siehe Figur 139, liegen demnach nach erfolgter Umlegung der ersten **Pr. Eb.**, in die zweite, siehe Erk. 190, die beiden Projektionen a_1 und a_2 des Punktes a stets auf verschiedenen Seiten der X-Achse.

Liegt ein Punkt, z. B. der Punkt c, siehe Figur 138, im Raume IV, so fällt die zweite Projektion c_2 auf die positive, die

Erkl. 191. Nebenstehende Antwort enthält folgende Sätze:

„Liegt ein Punkt im **ersten** oder **dritten** Raume, so liegen in der Projektionszeichnung seine Projektionen stets auf verschiedenen Seiten der X-Achse und zwar liegen im ersten Falle die Projektionen in den **positiven Pr. Ebn.,** im zweiten Falle dagegen in den **negativen Pr. Ebn.**“

„Liegt ein Punkt im **zweiten** oder **vierten** Raume, so liegen in der Projektionszeichnung seine Projektionen stets auf der gleichen Seite der X-Achse und zwar liegt im ersten Falle die erste, im zweiten Falle die zweite Projektion in der **positiven Pr. Eb.**“

„Liegt ein Punkt **in einer der Pr. Ebn.,** so fällt die **eine** Projektion stets in denjenigen Teil der **Pr. Eb.,** in welcher der Punkt selbst liegt, die **andere** Projektion fällt in die X-Achse. Liegt also ein Punkt in der **ersten Pr. Eb.,** so fällt seine **zweite** Projektion, liegt er aber in der **zweiten Pr. Eb.,** so fällt seine **erste** Projektion in der X-Achse.“

erste Projektion c_1 auf die negative **Pr. Eb.**; in der Projektionszeichnung, siehe Figur 139, liegen demnach die Projektionen c_1 und c_2 des Punktes c auf der gleichen Seite der X Achse.

Liegt ein Punkt, z. B. der Punkt e, siehe Figur 138, im Raume III, so fallen seine Projektionen auf die negativen **Pr. Ebn.** und in der Projektionszeichnung, siehe Figur 139, liegen daher die Projektionen e_1 und e_2 von e wieder auf verschiedenen Seiten der X-Achse.

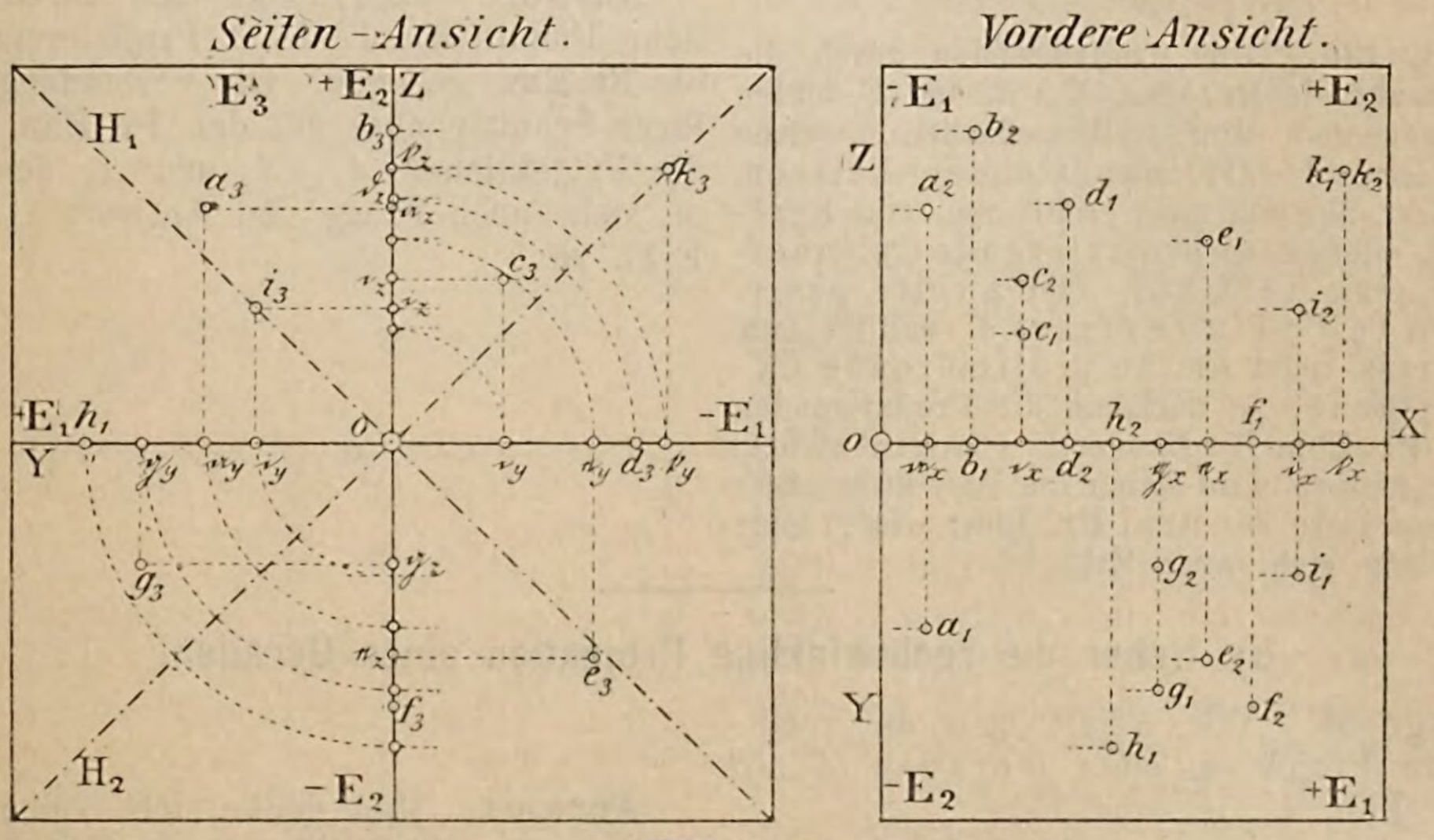
Liegt endlich ein Punkt, z. B. der Punkt g, siehe Figur 138, im Raume II, so fällt die erste Projektion g_1 auf die positive, die zweite Projektion g_2 auf die negative **Pr. Eb.** und es liegen daher in der Projekktionszeichnung, siehe Figur 139, wieder beide Projektionen g_1 und g_2 von g auf der gleichen Seite der X-Achse.

Liegt aber ein Punkt in einer der **Pr. Ebn.** selbst, wie z. B. die Punkte b, d, f und h, siehe Figur 138, so fällt die eine Projektion mit dem Punkte selbst zusammen, während die andere Projektion stets in der X-Achse liegt.

In der Projektionszeichnung liegt daher die eine Projektion stets in derjenigen **Pr. Eb.,** in welcher der Punkt selbst liegt, die andere Projektion fällt in die X-Achse.

Liegt schliesslich der Punkt in der Projektionsachse X, so fallen auch beide Projektionen in diese, wie z. B. beim Punkt o, siehe Figur 138 und 139.

Figur 139.



Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Frage 66. Welche besonderen Lagen gegen die **Pr. Ebn.** kann ein Punkt ausser den in der Antwort auf die Frage 65 genannten Lagen noch einnehmen?

Antwort. Ein Punkt kann insbesondere von den **Pr. Ebn.** gleich weit abstehen; dann liegt er in einer der Halbierebenen der Winkel der beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2. Solcher Halbierebenen gibt es aber zwei, nämlich eine Halbierebene H_1, sie halbiert den Winkel der positiven, bezw. negativen Hälften der **Pr. Ebn.**, und eine Halbierebene H_2, sie halbiert den Nebenwinkel des ebengenannten Winkels, siehe Figur 139.

Liegt ein Punkt in der Halbierebene H_1, so kann er überdies im I. oder III. Raume liegen; seine Projektionen sind somit stets auf verschiedenen Seiten der X-Achse gelegen und stehen von derselben, da die Abstände des Punktes von den **Pr. Ebn.** einander gleich sind, gleich weit von dieser ab, siehe Figur 139, Punkt i.

Liegt ein Punkt in der Halbierebene H_2, so liegt er überdies im II. oder IV. Raume, daher fallen seine Projektionen auf die gleiche Seite von X und da wieder die Abstände des Punktes von den beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 einander gleich sind, so decken sich die Projektionen des Punktes, d. h. sie fallen aufeinander, siehe Figur 139, Punkt k.

Erkl. 192. Aus der nebenstehenden Antwort folgen die Sätze:

„Liegt ein Punkt in der Halbierebene H_1, so liegen seine Projektionen auf verschiedenen Seiten der X-Achse und stehen von letzterer gleich weit ab."

„Liegt ein Punkt in der Halbierebene H_2, so decken sich seine Projektionen, d. h. sie fallen aufeinander."

Erkl. 193. Liegt in der Halbierebene H_2 überhaupt irgend eine Linie oder Figur, so werden die Projektionen aller Punkte der Linie oder Figur sich decken, d. h. die beiden Projektionen der Linie bezw. der Figur decken sich gleichfalls.

Erkl. 194. Wegen der in Erkl. 193 genannten Eigenschaft, dass die Projektionen eines in der Ebene H_1 liegenden Gebildes, sich decken, heisst diese Ebene auch die Coïncidenz- oder die Deckebene, siehe Erkl. 195.

Erkl. 195. Das Wort „Coïncidenz" stammt aus dem Lateinischen (incidere, zusammenfallen.)

C) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Linie.

a) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Linie im allgemeinen.

Frage 67. Wie erhält man die rechtwinklige Projektion einer Linie A auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3?

Antwort. Man denke sich durch sämtliche Punkte der Linie A Projizierende auf die **Pr. Ebn.** gezogen. Die Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte mit den **Pr. Ebn.** geben die Projektionen A_1, A_2 und A_3 der Linie A, siehe auch Frage und Antwort 11 sowie Erkl. 26.

Erkl. 196. Die Projizierenden durch die Linie A auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 bilden im allgemeinen drei Cylinderflächen, welche projizierende Cylinderflächen heissen, siehe Erkl. 25, und zwar erhält man eine horizontal- oder erste projizierende Cylinderfläche, eine vertikal- oder zweite projizierende Cylinderfläche, endlich eine Kreuzriss- oder dritte projizierende Cylinderfläche, je nachdem die Projizierenden zu den **Pr. Ebn.** E_1, E_2 oder E_3 senkrecht stehen. Im allgemeinen wird daher die Projektion einer Linie auf jede der drei **Pr. Ebn.** wieder eine Linie sein, siehe auch Erkl. 26.

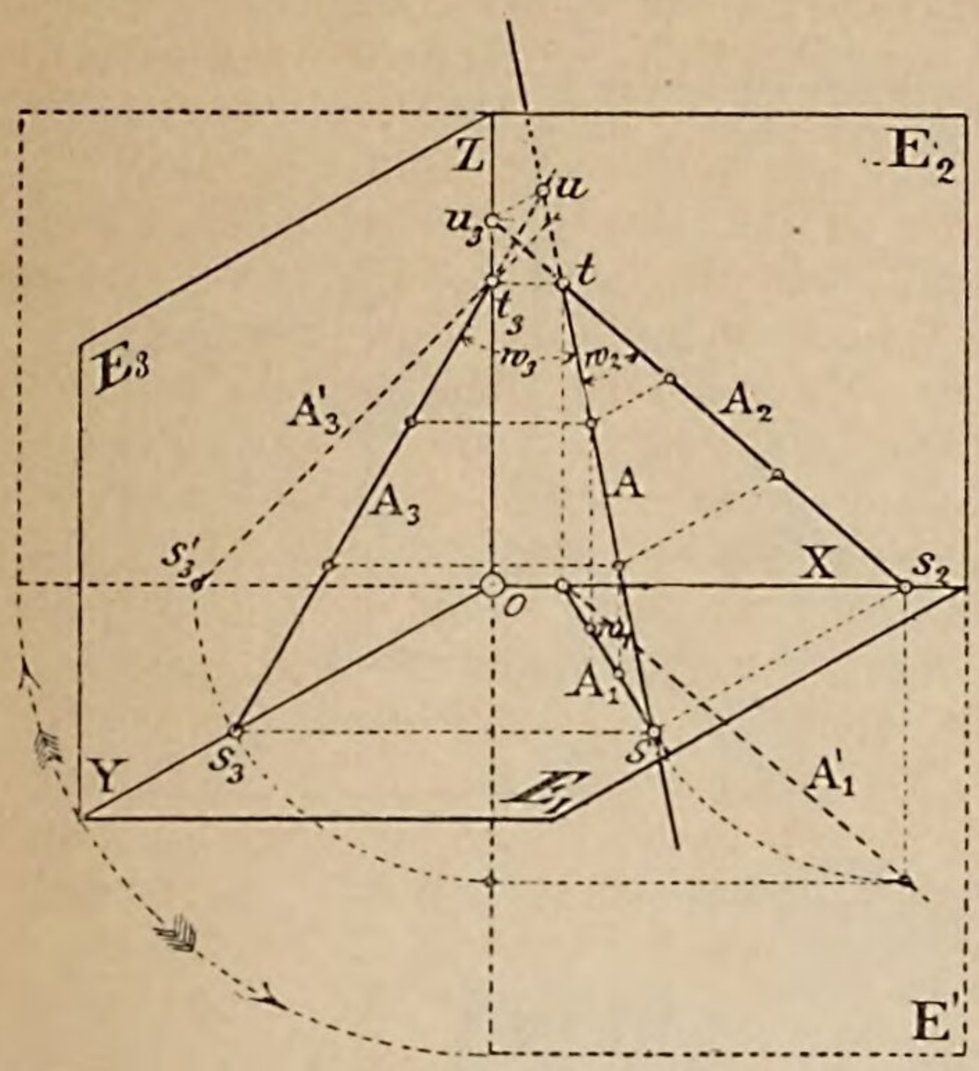
---

b) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Geraden.

Frage 68. Wie erhält man die rechtwinklige Projektion einer Geraden A auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3?

Antwort. Man denke sich, siehe Figur 140, durch alle Punkte der Geraden auf die

Figur 140.



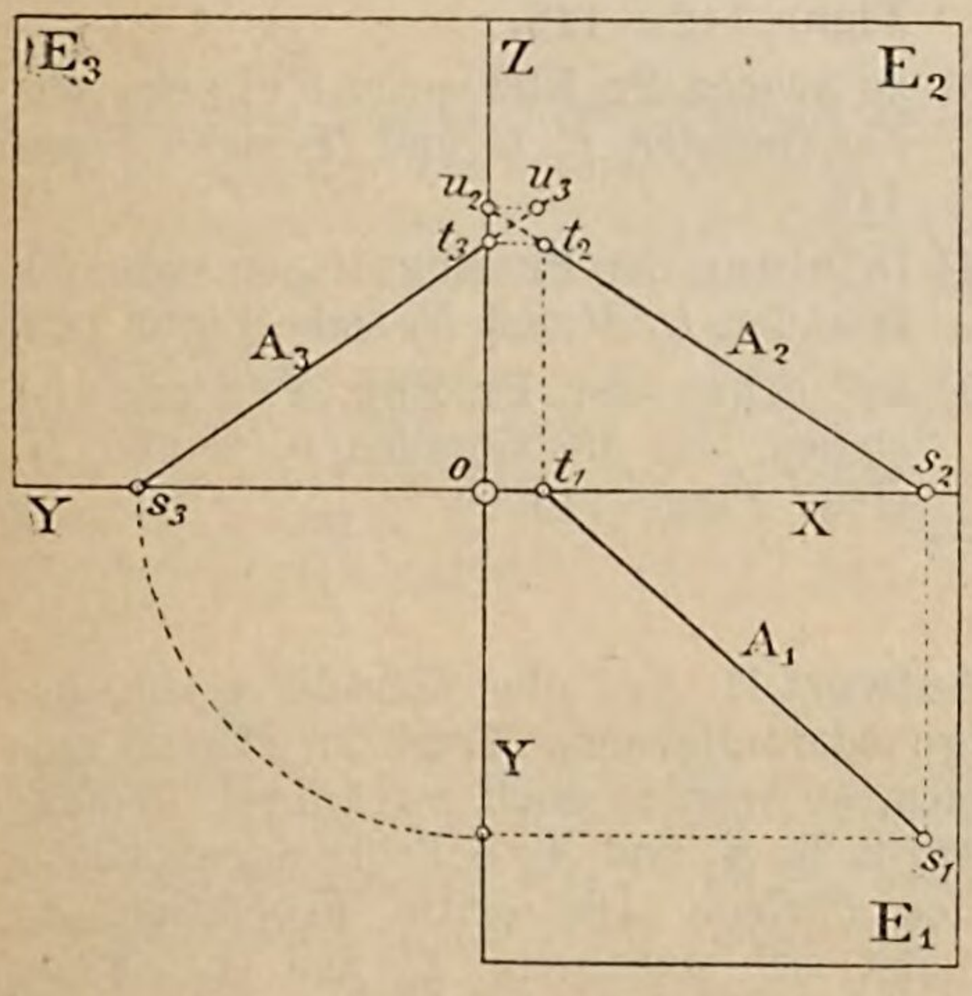
Erkl. 197. Die in Erkl. 196 genannten projizierenden Cylinderflächen gehen im vorliegenden Falle in projizierende Ebenen über und zwar bildet die Ebene AA_1 die horizontal- oder erste, die Ebene AA_2 vertikal- oder zweite, endlich die Ebene AA_3 die Kreuzriss- oder dritte projizierende Ebene der Geraden A.

Pr. Ebn. E_1, E_2 und E_3 Projizierende gezogen, welche diese Ebenen nach dreien Geraden A_1, A_2 und A_3, siehe Frage und Antwort 12 sowie Erkl. 27, 28 und 29, den Projektionen der Geraden A auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 schneiden.

Erkl. 198. Die Geraden A und A_1, A und A_2, A und A_3 schneiden sich in den Punkten s, t und u, den Durchschnittspunkten der Geraden A mit den **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3. Diese Punkte heissen die Spuren der Geraden A und zwar ist s ihre erste, t ihre zweite und u ihre dritte Spur.

Frage 69. Wie werden die Projektionen einer Geraden in der Projektionszeichnung dargestellt?

Figur 141.



Antwort. Denkt man sich die **Pr. Ebn.**, wie in Antwort auf die Frage 62 angegben, in die Zeichnungsebene umgelegt, Figur 140 veranschaulicht diesen Vorgang, so werden die Projektionen einer Geraden A im allgemeinen drei gegen die X- bezw. Z-Achse unter verschiedenen Winkeln geneigte Gerade A_1, A_2 und A_3, siehe Figur 141, sein.

Dabei schneidet im allgemeinen die Projektion A_1 die X-Achse in einem Punkte t_1, dem auf A_2 der Punkt t_2 als zweite Projektion zugehört; ebenso schneidet die Projektion A_2 die X-Achse in einem Punkte s_2, dem auf A_1 der Punkt s_1 als erste Projektion entspricht und es sind s_1 und s_2 bezw. t_1 und t_2 die Projektionen der ersten bezw. zweiten Spur der Geraden A, siehe auch Erkl. 191. Ganz entsprechend schneidet auch A_2 die Z-Achse in einem Punkte u_2, dem auf A_3 der Punkt u_3 als dritte Projektion entspricht und es sind u_2 und u_3 die Projektionen der dritten Spur der Geraden A.

Erkl. 199. Aus der Antwort auf die Frage 69 folgt zugleich, dass die Lage einer Geraden im Raume im allgemeinen vollständig bestimmt ist, sobald man ihre Projektionen auf zwei zu einander senkrecht stehenden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 kennt.

Denn denkt man sich etwa die zwei **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht, so dass sie wieder auf einander senkrecht stehen, so kann man sich durch die beiden Projektionen A_1 und A_2 projizierende Ebenen gelegt denken, welche sich im allgemeinen stets nach einer Geraden A im Raume schneiden, nach jener Linie A nämlich, deren Projektionen durch A_1 und A_2 dargestellt sind.

Erkl. 200. Aus Erkl. 199 folgt weiter, dass, sobald man zwei der Projektionen A_1, A_2 und A_3 kennt, die dritte Projektion stets bestimmt ist und nicht mehr willkürlich angenommen werden darf.

Erkl. 201. Die Projektionen A_1, A_2 und A_3 schliessen mit der Geraden A, siehe Figur 140, die Winkel w_1, w_2 und w_3 ein, welche man die Neigungswinkel der Geraden A mit den **Pr. Ebn.** nennt.

Erkl. 202. Ist eine Gerade A durch zwei ihrer Projektionen, etwa A_1 und A_2 gegeben, so erhält man die Projektionen ihrer ersten bezw. zweiten Spur, wenn man den Schnittpunkt s_2 von A_2 mit der X-Achse auf A_1, den Schnittpunkt t_1 von A_1 mit X aber auf A_2 projiziert.

Frage 70. Welche Lagen kann eine Gerade zu den **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 haben?

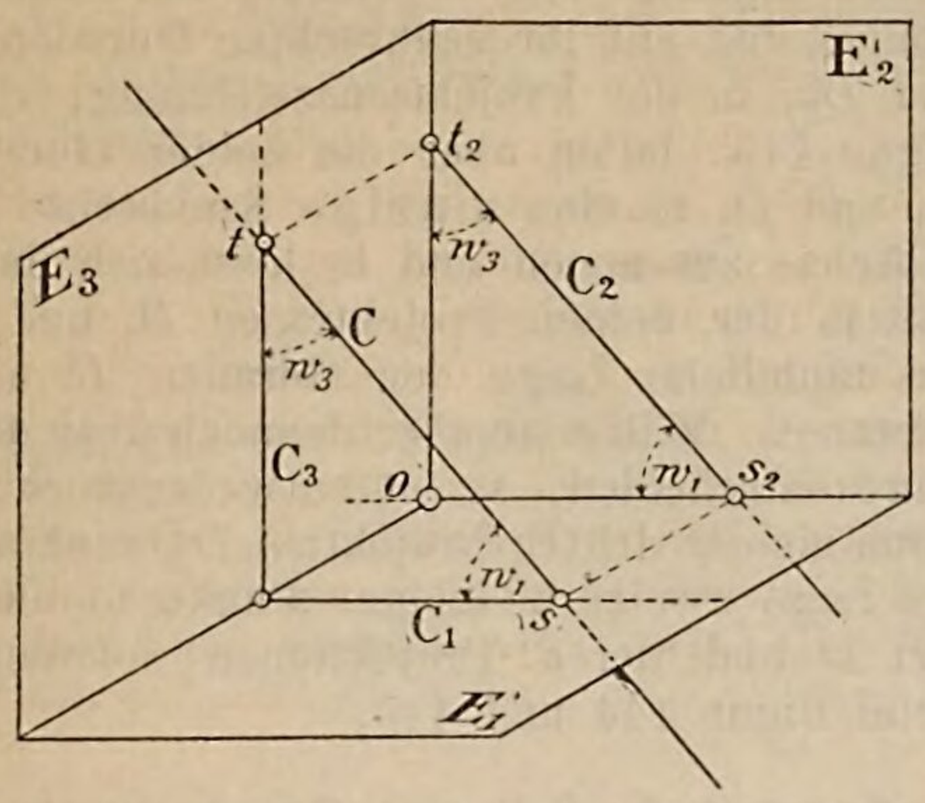
Antwort. Eine Gerade kann:

1) eine beliebige Neigung zu den **Pr. Ebn.** haben (allgemeine Lage), wie die Gerade A, siehe Figur 140 und 141,
2) zu einer der **Pr. Ebn.** parallel sein, wie die Geraden B, C und D, siehe Figur 142—145,
3) zu zweien **Pr. Ebn.** parallel sein, wie die Geraden F, G und H, siehe Figur 146,
4) in einer der **Pr. Ebn.** liegen, wie die Geraden L, M und N, siehe Figur 148,
5) auf einer der **Pr. Ebn.** senkrecht stehen, wie die Geraden F, G und H, siehe Figur 146.

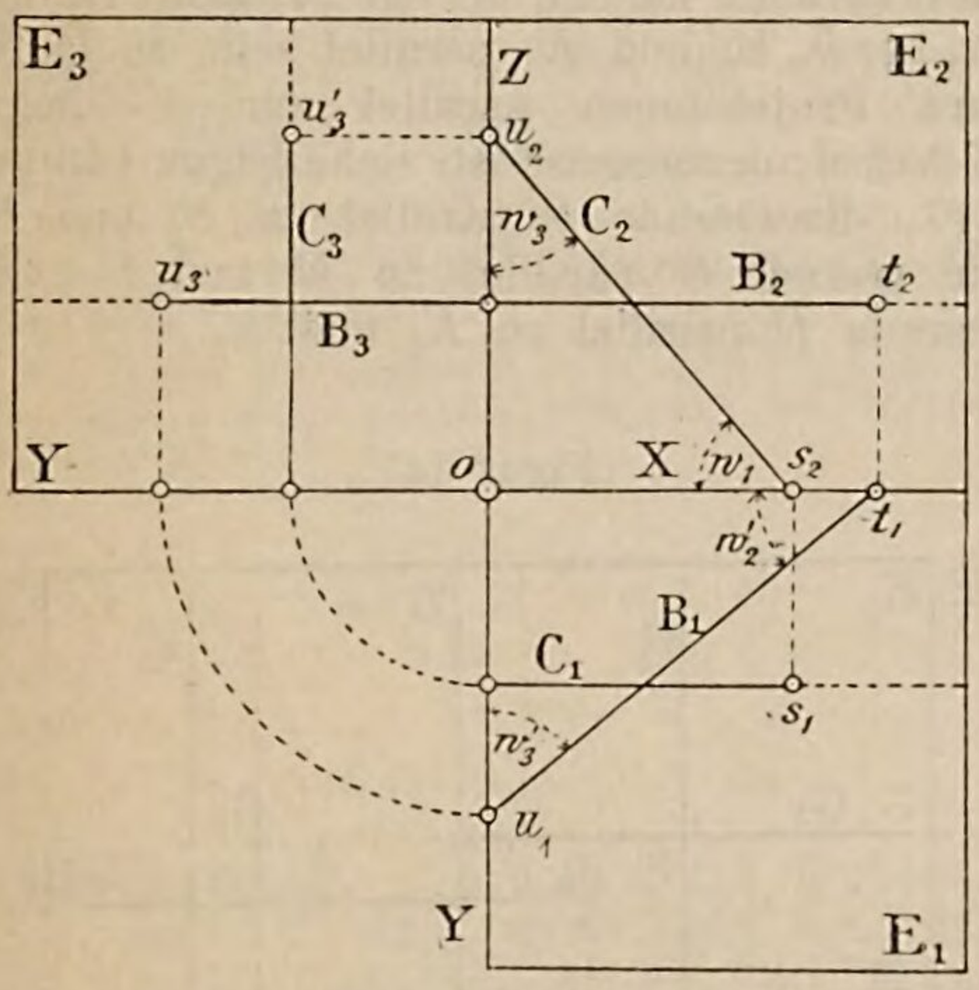
Frage 71. Wie erkennt man die in der Antwort auf die Frage 70 genannten Lagen einer Geraden aus der Projektionszeichnung?

Antwort 1. Soll eine Gerade A eine beliebige oder allgemeine Lage im Raume einnehmen, so werden auch zwei ihrer Projektionen, z. B. A_1 und A_2 beliebig angenommen werden dürfen. Die dritte Projektion A_3 bestimmt sich dann aus A_1 und A_2, siehe Figur 141.

Figur 142.



Figur 143.



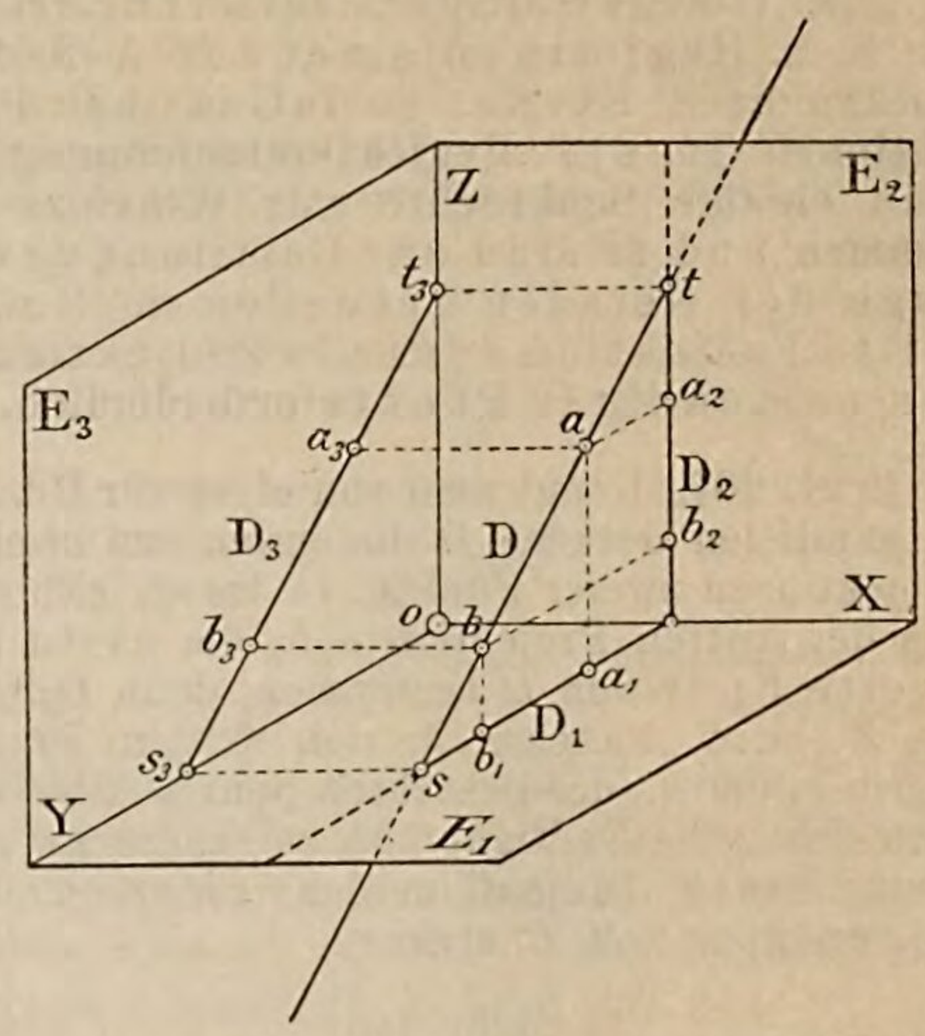
Erkl. 203. Nebenstehende Antwort 2a lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

„Soll eine Gerade B bezw. C parallel zu einer der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, siehe Figur 143, sein, so erkennt man dies aus der Projektionszeichnung daran, dass ihre **zweite** bezw. **erste** Projektion B_2 bezw. C_1 **stets parallel zur X-Achse sein muss.** Die dritte Projektion B_3 bezw. C_3 ist gleichfalls parallel zur Y- bezw. Z-Achse.

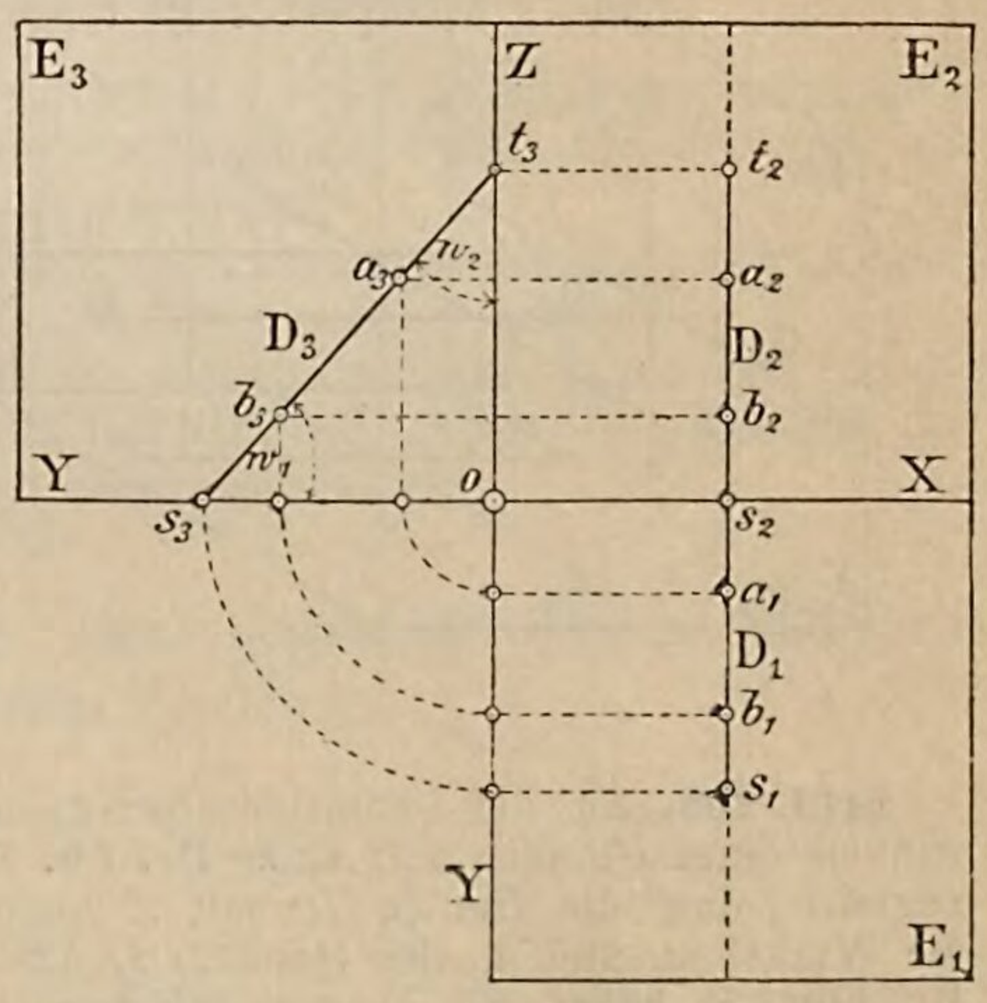
Erkl. 204. Eine zur **Pr. Eb.** E_1 bezw. E_2 parallele Gerade hat nur zwei in der Projektionszeichnung vorhandene Spuren, weil der Schnittpunkt der Geraden, mit jener **Pr. Eb.,** zu welcher sie parallel läuft, in unendliche Ferne rückt; so fällt für die Gerade B, siehe Figur 143, die erste, für die Gerade C die zweite Spur in unendliche Ferne.

Antwort 2a. Ist eine Gerade parallel zu einer der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, z. B. parallel zur **Pr. Eb.** E_2, wie die Gerade C, siehe Figur 142, so ist sie auch parallel zu ihrer zweiten Projektion, siehe Erkl. 34, und alle Punkte der Geraden haben gleichen Abstand von der **Pr. Eb.** E_2; es haben somit auch die ersten bezw. dritten Projektionen aller ihrer Punkte gleichen Abstand von der X- bezw. Z-Achse, siehe Erkl. 184.

Figur 144.



Figur 145.



Antwort 2b. Ist eine Gerade parallel zur **Pr. Eb.** E_3, wie z. B. die Gerade D, siehe Figur 144, so fallen die erste und zweite projizierende Ebene in eine Ebene senkrecht zur X-Achse zusammen und treffen daher

Erkl. 205. Läuft die Gerade B parallel zur **Pr. Eb.** E_1, so schliesst ihre erste Projektion B_1 mit der X- bezw. Y-Achse die Winkel w_2' und w_3' gleich den Winkeln der Geraden B mit den **Pr. Ebn.** E_2 bezw. E_3 in wahrer Grösse ein.

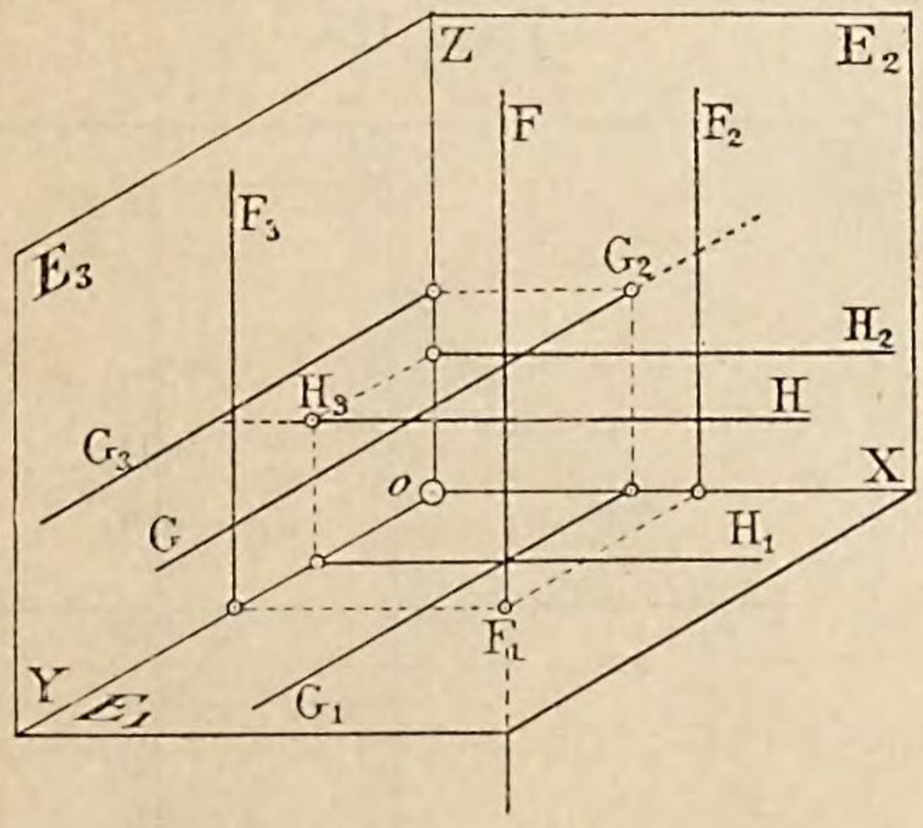
Läuft die Gerade C parallel zur **Pr. Eb.** E_2, so schliesst die zweite Projektion C_2 mit der X- bezw. Z-Achse Winkel w_1 und w_3 gleich den Winkeln der Geraden C mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_3 in wahrer Grösse ein.

Erkl. 206. Nebenstehende Antwort 2b lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

„Läuft eine Gerade parallel zur **Pr. Eb.** E_3, d. h. liegt sie in einer zur X-Achse senkrechten Ebene, so fallen ihre **Projektionen** in der **Projektionszeichnung** in eine **einzige Senkrechte** zur X-**Achse zusammen** und es sind zur Bestimmung der Lage der Geraden entweder noch eine dritte Projektion oder die Projektionen von zweien ihrer Punkte **erforderlich.**“

Erkl. 207. Kennt man von einer zur **Pr. Eb.** E_3 parallelen Geraden D die ersten und zweiten Projektionen zweier Punkte, so lassen sich mittels der dritten Projektion $a_3 b_3$ die erste und zweite Spur von D bestimmen, denn D_3 trifft die Z- bezw. Y-Achse in den dritten Projektionen s_3 und t_3 der gesuchten Spuren, aus welchen sich, wie die Figur 145 zeigt, die zweite bezw. erste Projektion der zweiten und ersten Spur von D ergeben.

Figur 146.



Erkl. 208. Aus der Definition des Neigungswinkels einer Geraden mit einer **Pr. Eb.** folgt zugleich, dass die Gerade D_3 mit Z bezw. Y die Winkel w_2 und w_1 der Geraden D mit den **Pr. Ebn.** E_2 bezw. E_1 in wahrer Grösse einschliesst.

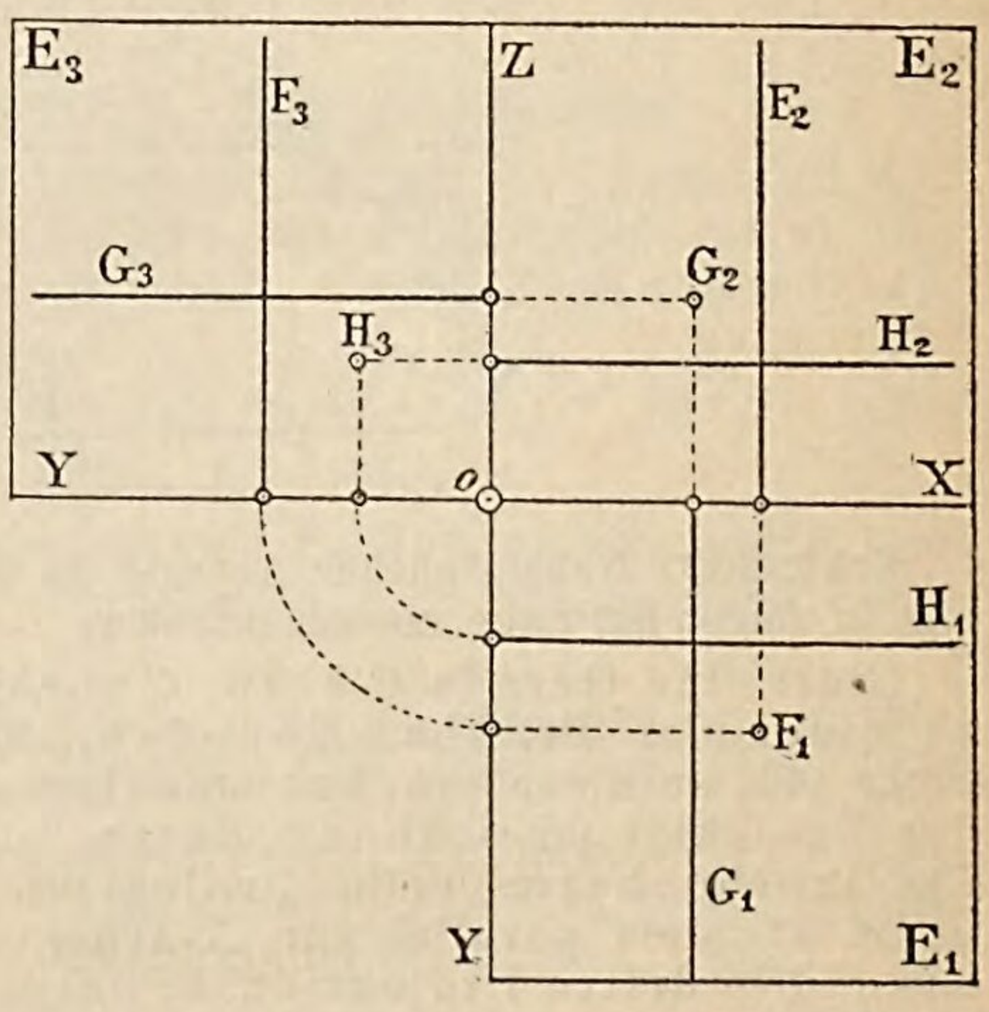
Erkl. 209. Nebenstehende Antwort 3 lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

„Soll eine Gerade zu zweien **Pr. Ebn.** **parallel** sein, so müssen in der Projek-

die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 nach zweien in einem Punkte der X-Achse sich schneidenden und auf ihr senkrechten Geraden D_1 und D_2; in der Projektionszeichnung, siehe Figur 145, fallen aber die beiden Geraden D_1 und D_2 in eine einzige Senkrechte zur X-Achse zusammen und es lässt sich daher mittels der beiden Projektionen D_1 und D_2 die räumliche Lage der Geraden D nicht erkennen. Will man aber dennoch über diese Lage entscheiden, so ist entweder noch die Kenntnis der dritten Projektion D_3 oder aber der Lage zweier beliebiger Punkte a und b von D und deren Projektionen notwendig, siehe Figur 144 und 145.

Antwort 3. Soll eine Gerade zu zweien **Pr. Ebn.**, z. B. E_1 und E_2 parallel sein, so müssen, siehe Erkl. 203, ihre beiden Projektionen parallel zur X-Achse sein. Soll die Gerade aber zu den beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_3 bezw. E_2 und E_3 parallel sein, so laufen ihre Projektionen parallel zur Y- bezw. Z-Achse; demgemäss ist, siehe Figur 146 und 147, die Gerade F parallel zu E_2 und E_3, die Gerade G parallel zu E_1 und E_3, die Gerade H parallel zu E_1 und E_2.

Figur 147.



Antwort 4. Liegt eine Gerade in einer der **Pr. Ebn.**, wie z. B. die Geraden L, M und N, siehe Figur 148, so fällt die eine Projektion mit der Geraden selbst zusammen, die anderen Projektionen fallen in eine der Achsen X, Y und Z und zwar in die X- und Y-, X- und Z- oder Y- und Z-Achse, je nachdem die Gerade in der

tionszeichnung zwei Projektionen zu der Schnittlinie derjenigen **Pr. Ebn. parallel** sein, zu welchen die Gerade selbst parallel sein soll; die dritte Projektion ist ein Punkt.

Erkl. 210. Im Falle eine Gerade zu zweien der **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 parallel läuft, so hat sie nur eine einzige Spur in derjenigen **Pr.Eb.,** zu welcher sie nicht parallel läuft und ist diese Spur zugleich die Projektion der Geraden auf jene **Pr. Eb.**

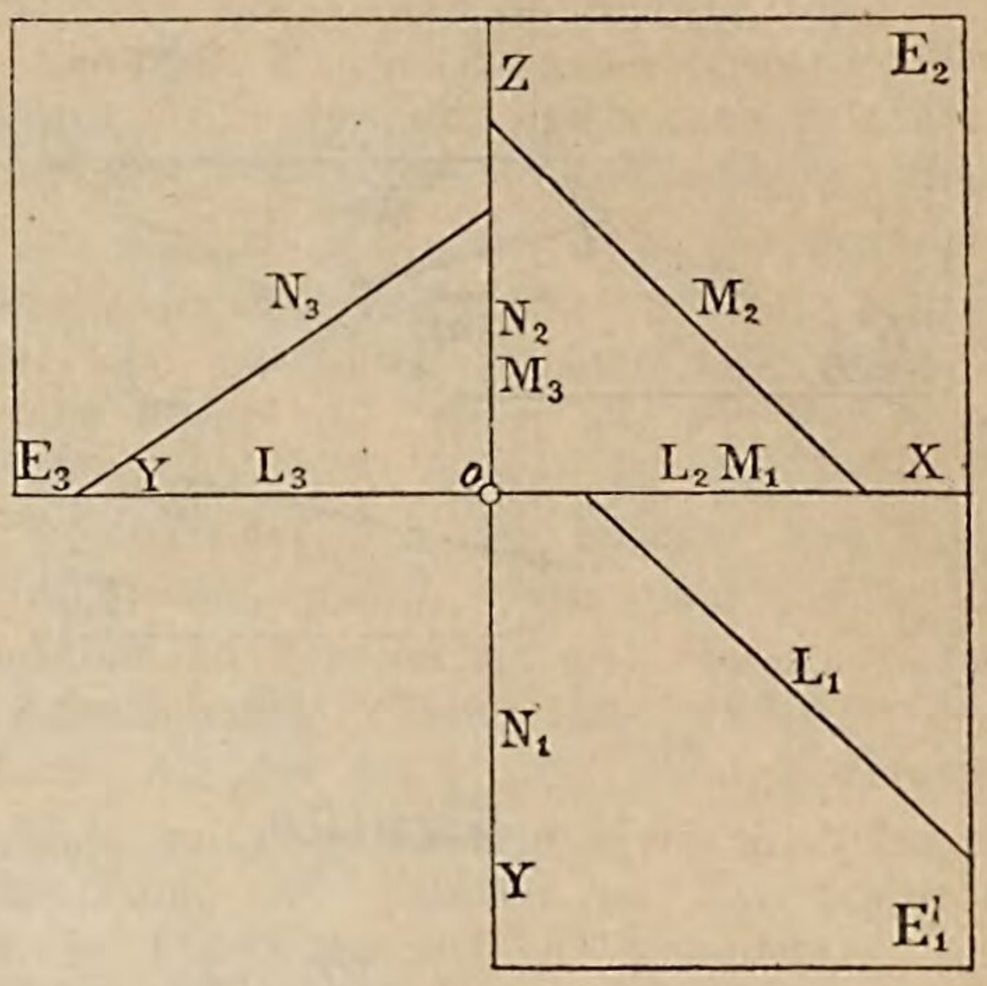
Erkl. 211. „Steht eine Gerade auf einer der **Pr. Ebn.** senkrecht, so ist ihre Projektion auf diese **Pr. Eb.** stets ein Punkt; die beiden anderen Projektionen stehen senkrecht zu den Achsen X und Y, X und Z, Y und Z, je nachdem die Gerade zur **ersten, zweiten** oder **dritten Pr. Eb.** senkrecht steht."

So stehen die Geraden F, G, H, siehe Figur 146 und 147, bezw. auf der ersten, zweiten und dritten **Pr. Eb.** senkrecht.

ersten, zweiten oder dritten **Pr. Eb.** liegt.

So liegen die Geraden L, M und N, siehe Figur 148, bezw. in der ersten, zweiten und dritten **Pr. Eb.**

Figur 148.



Antwort 5. Ist eigentlich schon in Antwort 3 enthalten, denn steht die Gerade senkrecht zu einer der **Pr. Ebn.**, so ist sie zu den beiden anderen parallel. Man erhält daher folgendes Resultat, siehe Erkl: 211.

Welche Lagen haben die Projektionen einer Geraden, welche in einer der beiden Halbierebenen H_1 und H_2, siehe Frage und Antwort 66 sowie Erkl. 192 bis 195, liegt?

Anmerkung 10. Wenn in der Folge von den Projektionen einer Raumgrösse gesprochen wird, so sind, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, darunter stets die Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 zu verstehen.

Auch sind bei den folgenden Projektionszeichnungen die Begrenzungen der **Pr. Ebn.** weggelassen und lediglich die Projektionsachsen angegeben.

Wird die dritte **Pr. Eb.** E_3 nicht in die Betrachtung hereingezogen, so ist die Grenze zwischen den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 lediglich durch die X-Achse bezeichnet, die Y- und Z-Achse sind dagegen weggelassen.

---

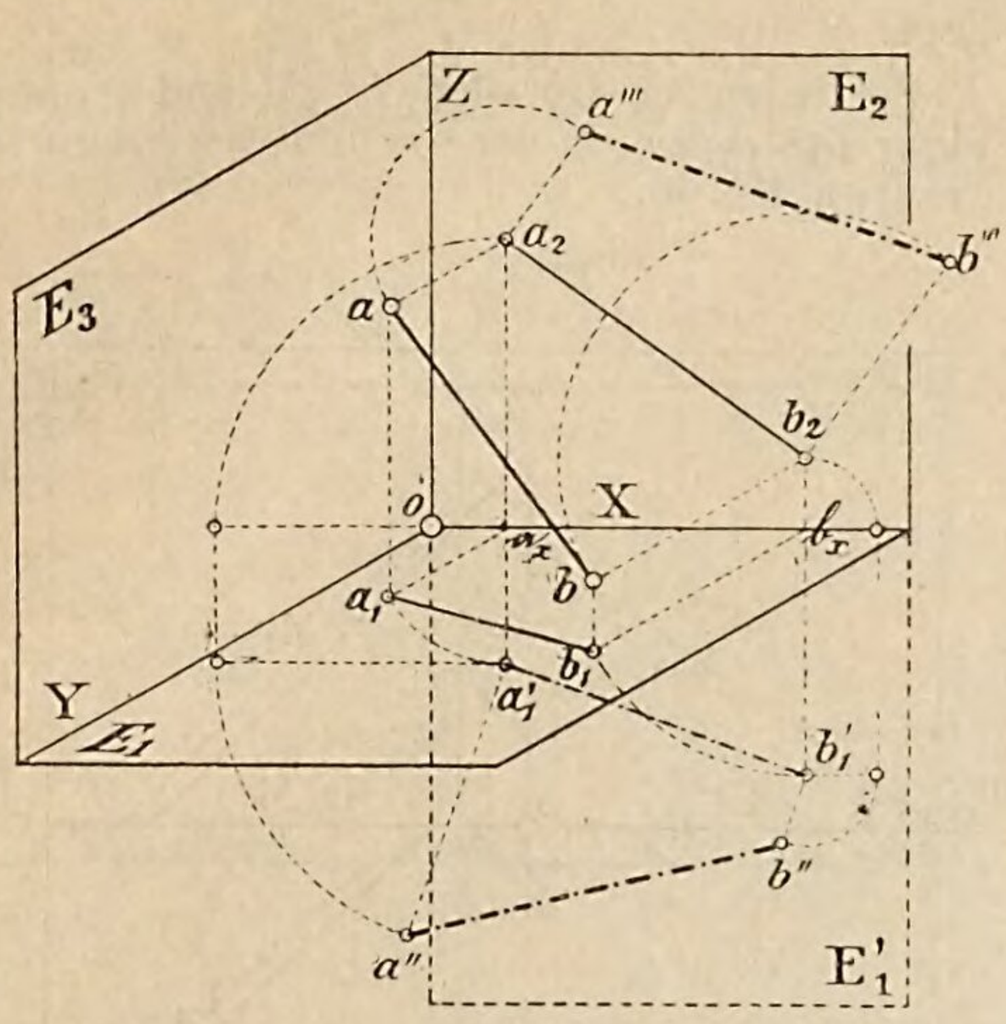
d) Ueber die Bestimmung der wahren Länge einer gegebenen Strecke und ihrer Neigungswinkel mit den Pr. Ebn.

Frage 72. Wie bestimmt man die wahre Grösse einer durch die Projektionen ihrer Endpunkte gegebenen Strecke $\overline{ab}$, sowie ihre Neigungswinkel w_1 und w_2 mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, siehe auch Frage und Antwort 16?

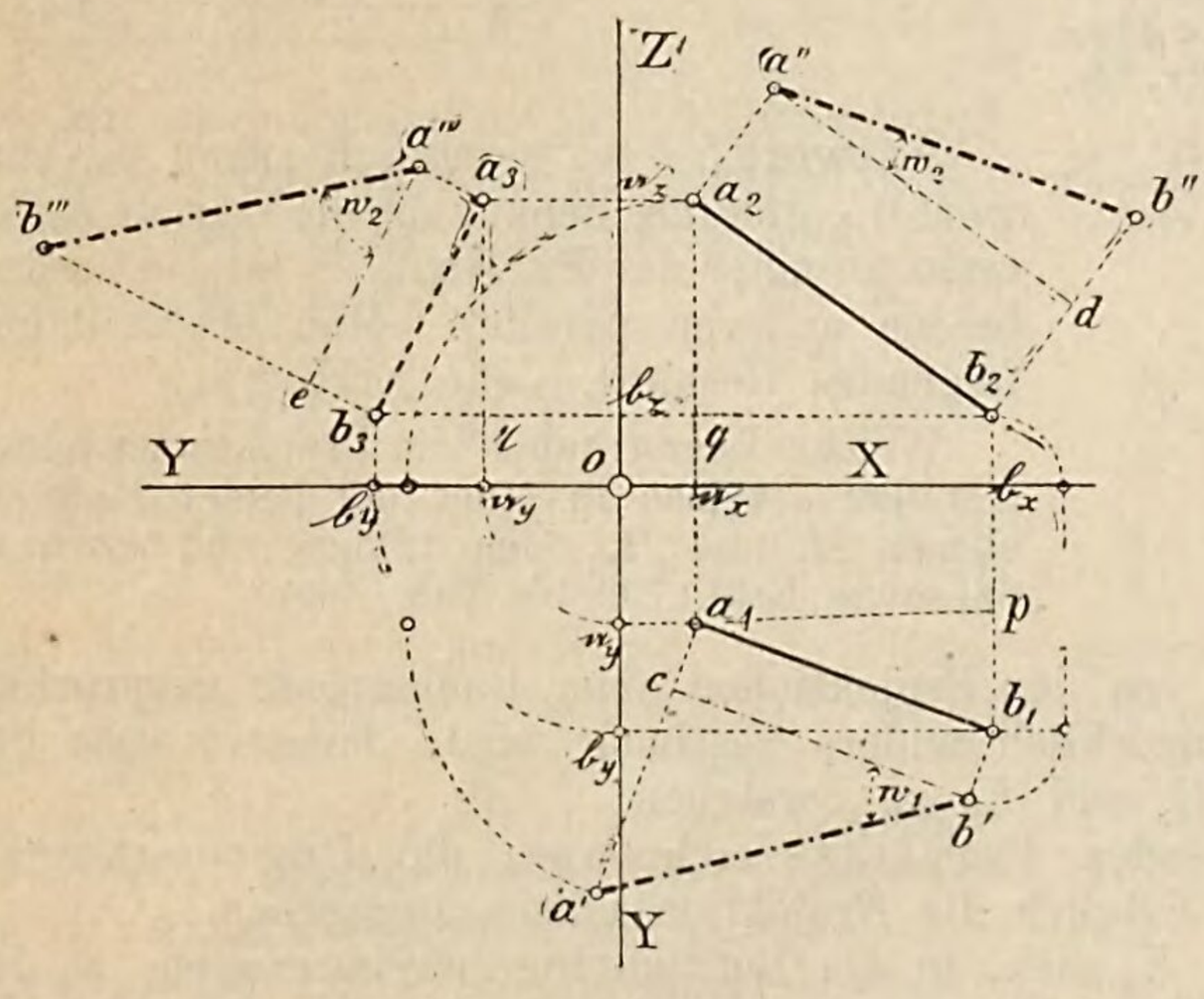
Antwort. Die wahre Länge einer Strecke $\overline{ab}$ lässt sich auf zweierlei Arten ermitteln, nämlich:

1) mittels Umlegen einer die Gerade enthaltenden projizierenden Ebene in die zugehörige **Pr. Eb.**;

Figur 149.



Figur 150.



Erkl. 212. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Die wahre Länge einer Strecke $\overline{ab}$ ergibt sich in der Projektionszeichnung stets als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich der Projektion der Strecke auf eine der **Pr. Ebn.** und dessen andere Kathete gleich der Differenz der Abstände der Endpunkte der Strecke von der betreffenden **Pr. Eb.** ist. Der der letzteren Kathete gegenüberliegende Winkel gibt den **Neigungswinkel der Geraden mit der betreffenden Pr. Eb. in wahrer Grösse an.**“

2) mittels Drehung einer solchen projizierenden Ebene bis zum Parallelsein mit einer **Pr. Eb.**

1) In der Antwort auf die Frage 16 wurde gezeigt, wie man durch Umlegung des Trapezes $a a_1 b_1 b$, siehe Figur 149, die wahre Länge der Strecke $\overline{ab}$ erhält.

Im vorliegenden Falle erhält man in der Projektionszeichnung, siehe Figur 150, die Umlegung $a' a_1 b_1 b'$ des Trapezes $a a_1 b_1 b$ in die **Pr. Eb.** E_1 sehr einfach, indem ja in den Strecken $\overline{a_2 \mathfrak{a}_x}$ und $\overline{b_2 \mathfrak{b}_x}$ die Abstände der Punkte a und b von der **Pr. Eb.** E_1 gegeben sind. Man braucht nur die Strecken $\overline{a_1 a'}$ und $\overline{b_1 b'}$ senkrecht zu $a_1 b_1$ und gleich jenen Längen abzutragen, so gibt $\overline{a' b'}$ die wahre Länge von $\overline{ab}$.

Man kann aber auch das Trapez $a a_2 b_2 b$, siehe Figur 149, um die Gerade $a_2 b_2$ in die **Pr. Eb.** E_2 umlegen. In der Projektionszeichnung, siehe Figur 150, kommt dieses Trapez dann nach $a'' a_2 b_2 b''$, wobei $\overline{a_2 a''} = \overline{a_1 \mathfrak{a}_x}$ und $\overline{b_2 b''} = \overline{b_1 \mathfrak{b}_x}$ abzutragen ist; $\overline{a'' b''}$ gibt gleichfalls die wahre Länge der Strecke $\overline{ab}$.

Bestimmt man schliesslich noch die dritte Projektion $\overline{a_3 b_3}$ von $\overline{ab}$ und die Umlegung des Trapezes $a a_3 b_3 b$ in die **Pr. Eb.** E_3, wobei $\overline{a_3 a'''} = \overline{a_2 \mathfrak{a}_z}$ und $\overline{b_3 b'''} = \overline{b_2 \mathfrak{b}_z}$ zu machen ist, so erhält man endlich auch in der Strecke $\overline{a''' b'''}$ die wahre Länge von $\overline{ab}$.

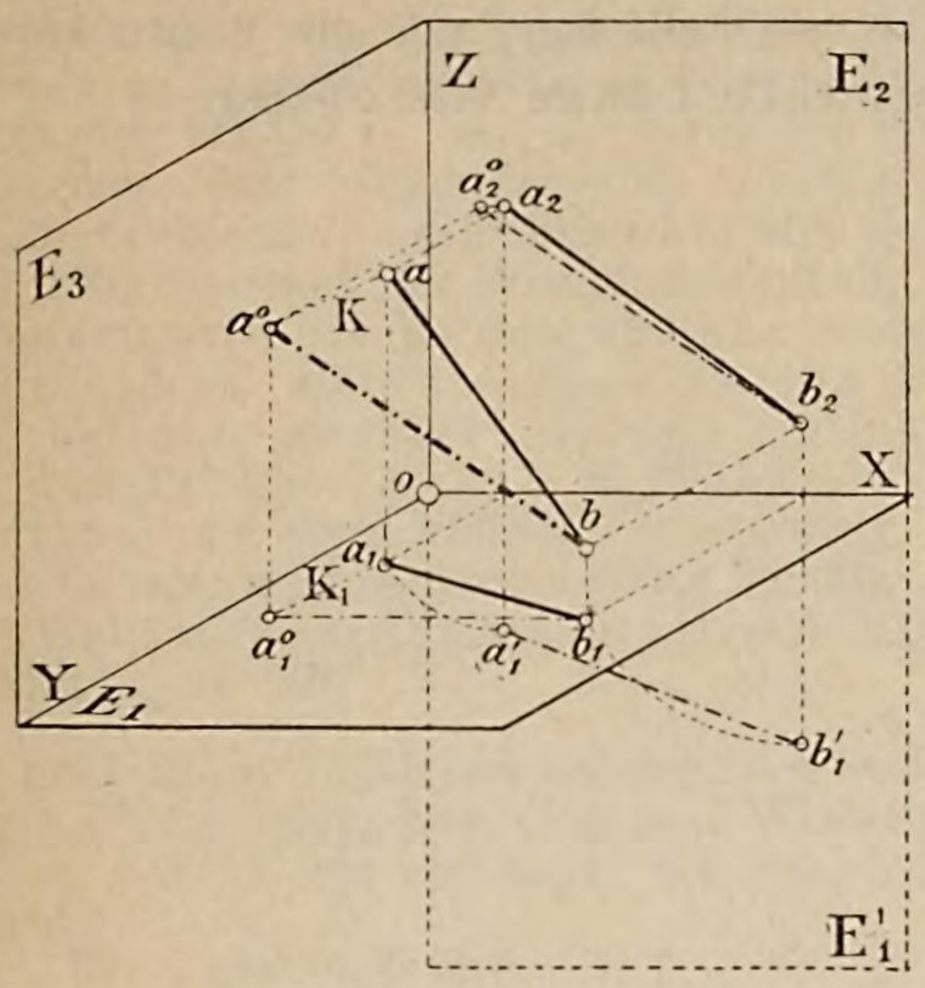
Zieht man überdies noch die Parallelen $b' c$, $a'' d$ und $a''' e$ zu den Richtungen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ und $a_3 b_3$, so erhält man in den rechtwinkligen Dreiecken $a' b' c$ und $a'' b'' d$ die Winkel w_1 und w_2.

In dem rechtwinkligen Dreieck $a''' b''' e$ ist endlich der Winkel w_3 enthalten.

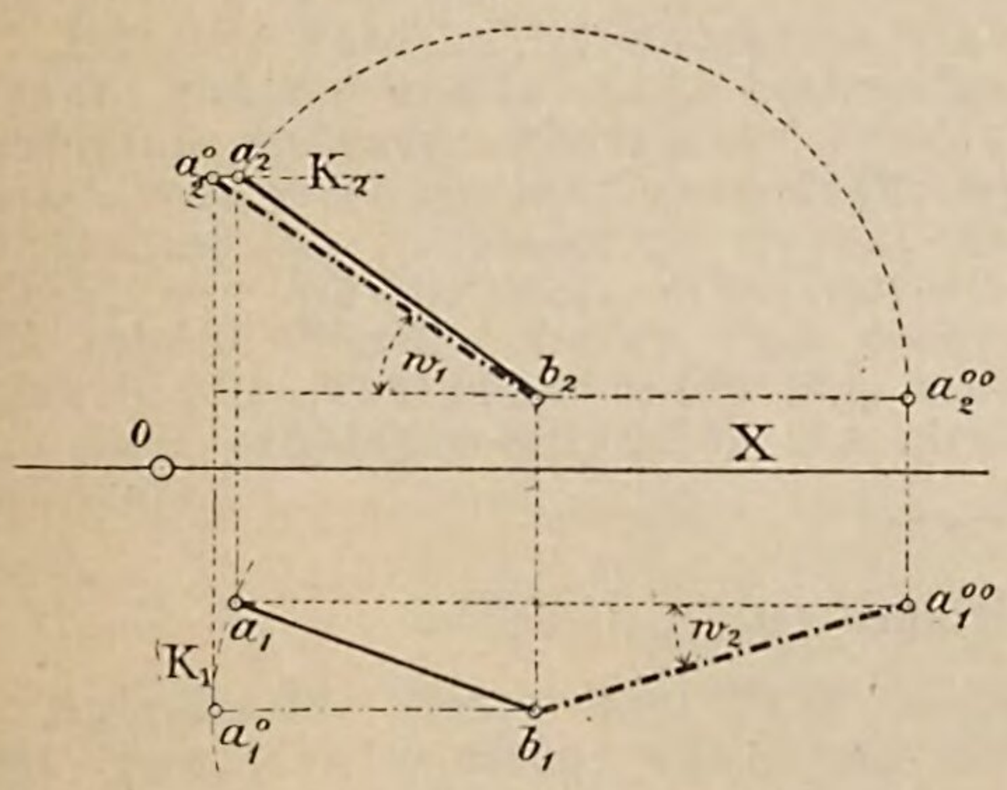
Aus der Figur 150 ist zu ersehen, dass die Strecken $\overline{a' c}$, $\overline{b'' d}$ und $\overline{b''' e}$ gleich sind den Differenzen der Abstände der Punkte a und b von den **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3.

2) Die wahre Länge einer Strecke $\overline{ab}$ lässt sich sehr einfach ermitteln, wenn man berücksichtigt, dass eine zu einer **Pr. Eb.** parallele Gerade sich in dieser **Pr. Eb.** stets in wahrer Grösse projiziert, siehe die Antwort auf die Frage 16.

Figur 151.



Figur 152.



Denkt man sich nun, Figur 151 veranschaulicht diesen Vorgang, das Trapez $a_1 b_1 b a$ etwa um die eine Seite $b b_1$ so lange gedreht, bis seine Ebene und damit auch die Seite $b a$ parallel zur **Pr. Eb.** E_2 wird, wobei der Punkt a nach a^0 gelangt, so wird die Projektion $\overline{a_2{}^0 b_2}$ von $\overline{a^0 b}$ die wahre Grösse der Linie ab darstellen.

In der Projektionszeichnung, siehe Figur 152, gestaltet sich die Ausführung der eben besprochenen Drehung sehr einfach. Sind nämlich $\overline{a_1 b_1}$ und $\overline{a_2 b_2}$ die gegebenen Projektionen der Strecke $\overline{ab}$, so beschreibt bei der erwähnten Drehung der Punkt a, siehe Figur 151, einen zur **Pr. Eb.** E_1 parallelen Kreis K, dessen Mittelpunkt in der Projizierenden $b_1 b$ sich befindet und dessen Halbmesser gleich der Länge der Projektion der Strecke $\overline{ab}$ ist. In der Projektionszeichnung, Figur 152, erscheint dieser Kreis als der um b_1 mit einem Halbmesser gleich $\overline{a_1 b_1}$ beschriebene Kreis K_1. Ist nun die Linie ab parallel zu E_2 geworden, d. h. Punkt a nach a^0 gekommen, siehe Figur 151, so ist die erste Projektion $a_1{}^0 b_1$, siehe Figur 152, parallel zur X-Achse. Die zweite Projektion K_2 von K ist offenbar gleichfalls parallel zur X-Achse, daher ist in $a_2{}^0$ die zweite Projektion von a^0 und in $\overline{a_2{}^0 b_2}$ **die wahre Länge von** $\overline{ab}$ bestimmt.

Ausserdem schliesst $a_2{}^0 b_2$ mit einer Parallelen zur X-Achse einen Winkel w_1 gleich dem Winkel von ab mit der **Pr. Eb.** E_1 ein.

Man könnte auch das Trapez $a a_2 b_2 b$, siehe Fig. 151, um die Linie $b b_2$ bis zum Parallelsein mit der **Pr. Eb.** E_1 drehen und erhielte dann gleichfalls die wahre Länge von $\overline{ab}$. In der Figur 152 ist auch diese Drehung durchgeführt worden und es wurde die Strecke $\overline{a_1{}^{00} b_1}$ als wahre Länge von $\overline{ab}$ und der Winkel w_2 als Winkel von ab mit der **Pr. Eb.** E_2 erhalten.

Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung muss man die Gleichheit der Strecken $\overline{a' b'}$, $\overline{a'' b''}$, $\overline{a''' b'''}$ in Figur 150 und $\overline{a_1{}^{00} b_1} = \overline{a_2{}^0 b_2}$ in Figur 152 erhalten.

Anmerkung 11. Man kann auch in den Anschauungsfiguren 149 und 151, siehe Anmerkung 2, die Länge einer Strecke $\overline{ab}$ in wahrer Grösse erhalten, wenn man voraussetzt, dass die Projizierenden $\overline{a a_2}$ und $\overline{a a_1}$ die wahren Abstände des Punktes a von den **Pr. Ebn.** darstellen. Denn zeichnet man, wie die Figur 149 zeigt, das Trapez $a_2 a''' b''' b_2$, so gibt $\overline{a''' b'''}$ die wahre Länge von $\overline{ab}$ an.

Denkt man sich ferner die **Pr. Eb.** E_1 um die X-Achse gedreht und nach E_1' gebracht, so kommt das Trapez $\mathfrak{a}_x a_1 b_1 \mathfrak{b}_x$ nach $\mathfrak{a}_x a_1' b_1' \mathfrak{b}_x$ und $\overline{a_1' b_1'}$ gibt die wahre Länge der ersten Projektion der Strecke $\overline{ab}$. Zeichnet man daher

über $\overline{a_1' b_1'}$ das Trapez $a_1' a'' b'' b_1'$, wobei $\overline{a_1' a''} = \overline{a_x a_2}$ und $\overline{b_1' b''} = \overline{b_x b_2}$ zu machen ist, so gibt die Strecke $\overline{a'' b''}$ gleichfalls die wahre Länge von $\overline{a b}$ an.

Ganz ähnlich ist in Figur 151 zu verfahren. Bestimmt man nämlich wieder die wahre Länge $\overline{a_1' b_1'}$ von $\overline{a_1 b_1}$ und zieht durch b_1 die Parallele $\overline{b_1 a_1^0} = \overline{b_1' a_1'}$, ferner $\overline{a_1^0 a^0}$ parallel $b b_1$ und gleich $\overline{a_1 a}$, so stellt $b_1 a_1^0 a^0 b$ die wahre Gestalt des Trapezes $b_1 a_1 a\ b$ und daher $\overline{b a^0}$ die wahre Länge von $\overline{a b}$ dar.

***Erkl. 213.** Bezeichnet man die Länge von $\overline{a b}$ mit l, die Länge ihrer Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 mit l_1, l_2 und l_3, endlich mit x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der Punkte a und b, siehe Erkl. 183 und 187, so gewinnt man leicht folgende Beziehungen aus der Figur 150:

Zunächst ist:

33) . . . $l_1 = l \times \cos w_1 \quad l_2 = l \times \cos w_2$
$l_3 = l \times \cos w_3$, siehe Erkl. 48,

ferner ist:

34) . . .
$$\begin{cases} l_1^2 = (y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2 \\ \quad \text{(rechtw. Dreieck } a_1 b_1 p) \\ l_2^2 = (x_1 - x)^2 + (z_1 - z)^2 \\ \quad \text{(rechtw. Dreieck } a_2 b_2 q) \\ l_3^2 = (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \\ \quad \text{(rechtw. Dreieck } a_3 b_3 r) \end{cases}$$

endlich ist:

$l^2 = \overline{a'' d^2} + \overline{d b''^2}$ (rechtw. Dreieck $a'' d b''$)

oder:

35) . . . $l^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$

Addiert man die Gleichungen 34), so erhält man:

$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 2 \times [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2]$

oder in Rücksicht auf Gleichung 35):

36) . . . $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 2 \times l^2$

Setzt man für l_1, l_2 und l_3 die Werte aus Gleichung 33), so erhält man:

$l^2 \times \cos^2 w_1 + l^2 \times \cos^2 w_2 + l^2 \times \cos^2 w_3 = 2 \times l^2$

oder:

37) . . . $\cos^2 w_1 + \cos^2 w_2 + \cos^2 w_3 = 2$

welche Gleichung sich mit Rücksicht auf Gleichung 11), Seite 48, auch so schreiben lässt:

$(1 - \sin^2 w_1) + (1 - \sin^2 w_2) + (1 - \sin^2 w_3) = 2$

oder:

38) . . . $\sin^2 w_1 + \sin^2 w_2 + \sin^2 w_3 = 1$

Erkl. 214. Die Gleichungen 35), 36), 37) und 38) enthalten folgende Sätze:

„Das Quadrat über einer Strecke l ist gleich der Summe der Quadrate der gleichnamigen Coordinatendifferenzen der Endpunkte der Strecke."

„Projiziert man eine Strecke l auf drei zu einander senkrechte **Pr. Ebn.**, so ist die Summe der über den Projektionen errichteten Quadrate gleich dem doppelten Inhalte des über der Strecke l errichteten Quadrates."

„Die Summe der **Cosinus**quadrate der Winkel einer Geraden mit dreien auf einander senkrechten **Pr. Ebn.** ist gleich 2, die Summe der **Sinus**quadrate dieser Winkel ist gleich 1.“

***Erkl. 215.** Aus dem genannten Satze folgt die weitere Eigenschaft, dass die Summe von zweien der Winkel w_1, w_2, w_3 unter der Voraussetzung, dass keiner derselben gleich Null ist, stets kleiner sein muss als 90^0, siehe Erkl. 215a; ist einer der Winkel gleich Null, so ergänzen sich die beiden übrigen zu 90^0.

Mit anderen Worten: „Eine zu den **Pr. Ebn.** beliebig geneigte Gerade schliesst mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 Winkel ein, deren Summe **stets kleiner** ist als 90^0.“

„Nur wenn eine Gerade zur **Pr. Eb.** E_3 parallel läuft, ergänzen sich die Winkel w_1 und w_2 zu 90^0.“

***Erkl. 215a.** In Kleyers Lehrbuch der Goniometrie wird gezeigt, dass wenn zwei Winkel w_1 und w_2 sich zu 90^0 ergänzen, die Beziehung besteht:

$$\sin^2 w_1 + \sin^2 w_2 = 1$$

Erkl. 216. Das in der Antwort auf die Frage 17 und in Erkl. 51 Gesagte behält seine Gültigkeit auch für den Fall, dass eine Strecke durch zwei Projektionen gegeben ist. Man kann den in Erkl. 51 genannten Satz ganz allgemein so aussprechen:

„Ist eine Strecke im Raume in eine Anzahl **gleicher** und in einem **bestimmten Verhältnis stehender** Abschnitte geteilt, so ist jede ihrer Projektionen durch die Projektionen der Teilpunkte in derselben Weise wie die Strecke selbst geteilt. Mit anderen Worten: „Durch eine rechtwinklige Projektion auf die **Pr. Ebn.** wird das Teilverhältnis einer Strecke **nicht** geändert.“

---

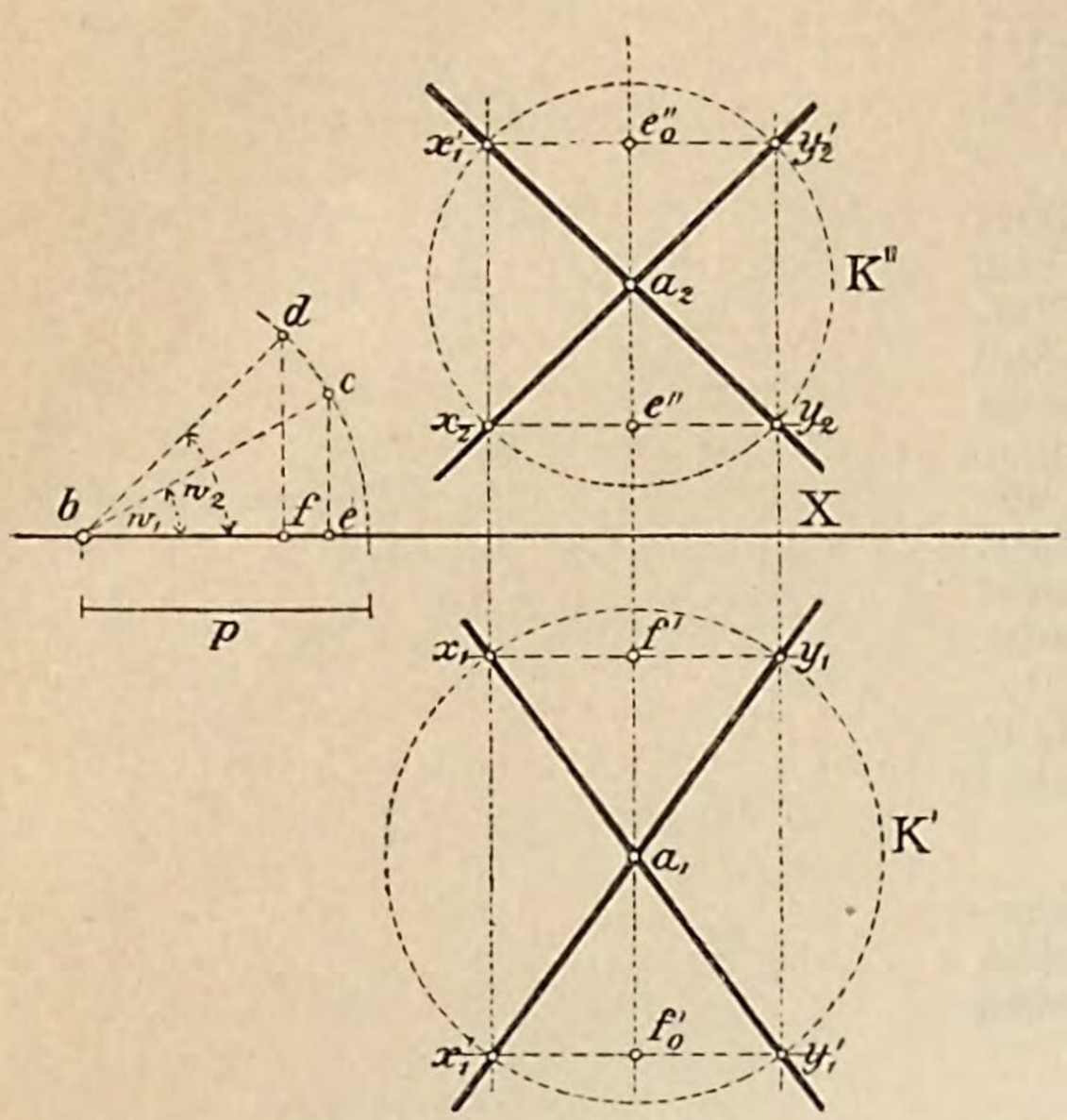
e) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 73. Durch einen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gegebene Winkel $w_1 = 30^0$ und $w_2 = 45^0$ einschliesst.

Auflösung. Nimmt man eine beliebige Strecke p, siehe Figur 153, der gesuchten Geraden als gegeben an, so kann man die in Rede stehende Aufgabe auch so aussprechen: Eine Strecke von gegebener Länge ist durch einen gegebenen Punkt so gegen die **Pr. Ebn.** zu legen, dass ihre Winkel mit denselben vorgeschriebene Grössen haben.

Zu diesem Zwecke braucht man aber nur die rechtwinkligen Dreiecke bce und bdf, siehe Figur 153, mit der Hypotenuse gleich p und den Winkeln $w_1 = 30^0$ und $w_2 = 45^0$ zu konstruieren, so geben die Katheten $\overline{be}$ und $\overline{bf}$ die Längen der Projektionen der

Figur 153.

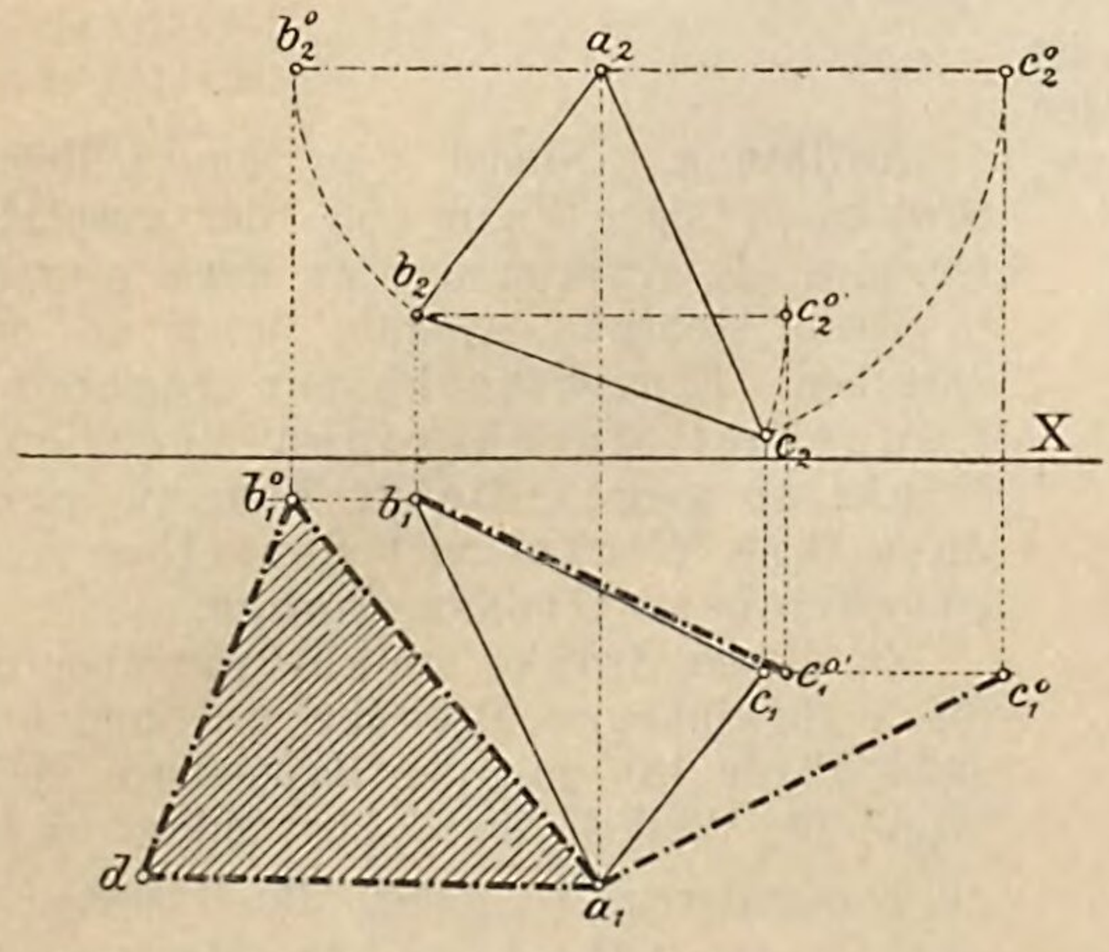


Erkl. 216a. Die nebenstehend durchgeführte Aufgabe lässt im allgemeinen vier Lösungen zu, d. h. als Satz ausgedrückt: „Durch einen Punkt im Raume gibt es im allgemeinen vier Gerade, welche mit den beiden **Pr. Ebn.** Winkel von vorgeschriebener Grösse einschliessen."

Wann wird die Aufgabe unmöglich und wann gibt es nur zwei Lösungen?

Aufgabe 74. Drei Punkte a, b, c sind durch ihre Projektionen gegeben; man soll die wahre Gestalt des Dreiecks abc durch Ermittelung seiner Seitenlängen konstruieren.

Figur 154.



Auflösung. Ermittele die wahren Längen der Dreiecksseiten $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ nach dem in der Antwort auf die Frage 72 angegebenen Verfahren. In der Figur 154 wurde das zweite Verfahren und zwar eine Drehung der Dreiecksseiten parallel zur **Pr. Eb.** E_1 gewählt. Die wahren Längen der Dreiecksseiten ergeben sich als die Strecken $\overline{a_1 b_1^o}$, $\overline{a_1 c_1^o}$ und $\overline{b_1 c_1^{o'}}$; mit diesen Strecken konstruiere man das Dreieck: $\overline{a_1 b_1^o d}$ [$\overline{b_1^o d} = \overline{b_1 c_1^{o'}}$, $\overline{a_1 d} = \overline{a_1 c_1^o}$], so gibt dasselbe die wahre Gestalt des Dreiecks abc an.

Strecke, während durch die Katheten $\overline{ce}$ bezw. $\overline{df}$ die Differenz der ersten bezw. zweiten Abstände der Endpunkte der Strecke von den **Pr. Ebn.** bestimmt sind.

Zur Darstellung der Projektionen der Strecke erhält man folgende

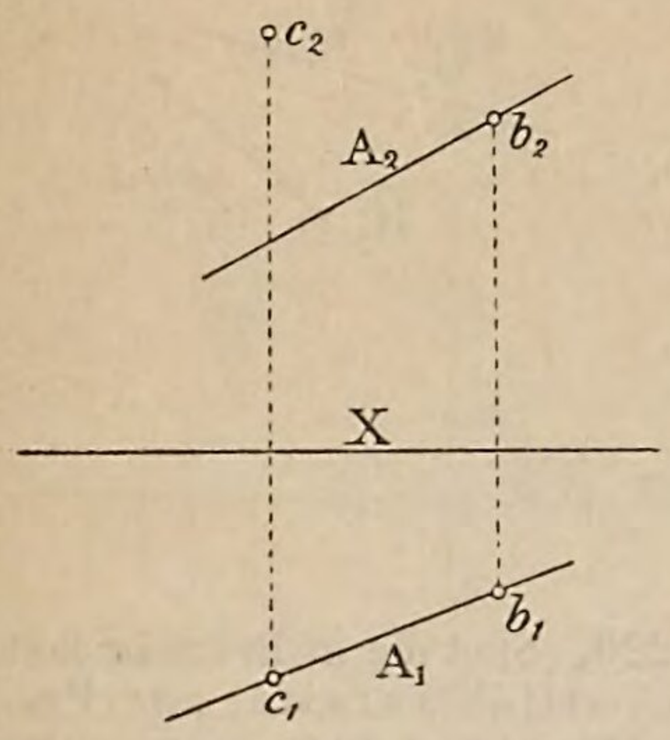
Konstruktion: Beschreibe um a_1 und a_2 die Kreise K' und K'' mit den bezw. Halbmessern gleich $\overline{be}$ und $\overline{bf}$; trage an die Projizierende durch a von a_1 bezw. a_2 aus die Strecken $\overline{a_1 f'} = \overline{df}$ und $\overline{a_2 e''} = \overline{ce}$ ab und ziehe durch f' bezw. e'' Parallele zur X-Achse, so treffen dieselben die zugehörigen Kreise K' und K'' in den Punkten x_1, y_1 bezw. x_2, y_2. Die Verbindungslinien $a_1 x_1$ und $a_2 x_2$ bezw. $a_1 y_1$, $a_2 y_2$ sind daher die Projektionen der gesuchten Geraden. Da man die Strecken $\overline{df}$ bezw. $\overline{ce}$ auch nach $\overline{a_1 f_0'}$ und $\overline{a_2 e_0''}$ abtragen kann, so erhält man in jeder **Pr. Eb.** noch zwei weitere Punkte x_1', y_1' bezw. x_2', y_2' und folglich gibt es auch zwei weitere Gerade ax' und ay' der gesuchten Art.

D) Ueber die gegenseitige Lage von Punkten und Geraden und ihren Projektionen.

a) Ueber die Lagen eines Punktes zu einer Geraden.

Frage 73. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die in der Antwort auf die Frage 19 genannten Lagen eines Punktes zu einer Geraden?

Figur 155.



Antwort. In Rücksicht auf die Antwort der Frage 20 sowie bezugnehmend auf Erkl. 184, erkennt man in der Projektionszeichnung, dass ein Punkt b, siehe Figur 155, stets auf einer Geraden A liegen wird, sobald seine Projektionen b_1 und b_2 auf den gleichnamigen Projektionen A_1 und A_2 der Geraden liegen. Eine Umlegung der Geraden ist daher zur Erkennung der Lage eines Punktes zu einer Geraden nicht mehr erforderlich. Nur wenn die Gerade parallel zur **Pr. Eb.** E_3 läuft, gilt das in Erkl. 206 Gesagte.

Erkl. 217. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Soll ein Punkt auf einer Geraden liegen, so erkennt man dies in der Projektionszeichnung darin, dass die Projektionen des Punktes auf den gleichnamigen Projektionen der Geraden liegen.“

Erkl. 218. Liegt nur eine Projektion c_1 eines Punktes c auf der gleichnamigen Projektion A_1 der Geraden A, siehe Fig. 155, so liegt der Punkt c in der die betreffende Projektion A_1 enthaltenden projizierenden Ebene A_1 der Geraden A.

---

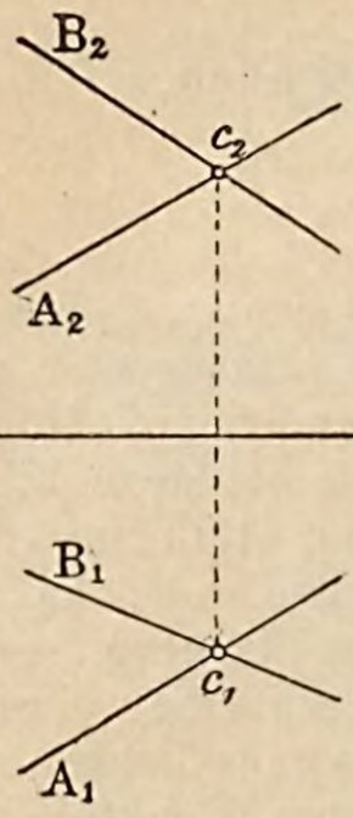
b) Ueber die Lagen zweier Geraden.

Frage 74. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die in der Antwort auf die Frage 21 genannten Lagen zweier Geraden zu einander?

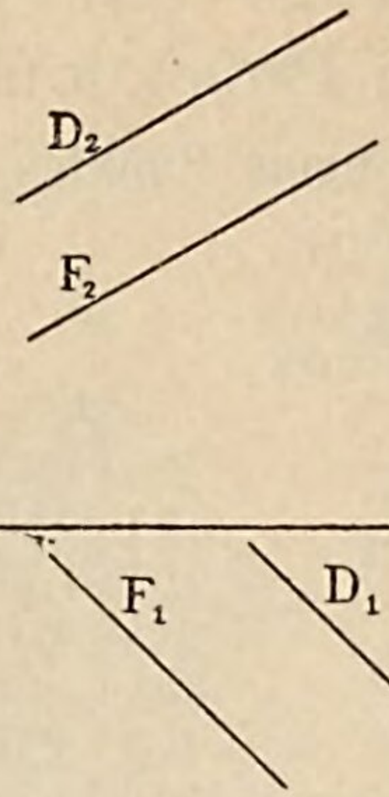
Antwort. Bezugnehmend auf die Antwort der Frage 22 werden die Schnittpunkte c_1 und c_2, siehe Figur 156a, der gleichnamigen Projektionen A_1, B_1 und A_2, B_2 der Geraden A und B die Projektionen des Schnittpunktes c derselben sein, siehe Erkl. 218.

Sind die Geraden D und F, siehe Figur 156b, aber parallel, so sind es auch ihre gleichnamigen Projektionen D_1, F_1 und D_2, F_2, siehe Erkl. 62; haben die Projektionen G_1, H_1 und G_2, H_2 eine ganz willkürliche Lage, siehe Fig. 156c, zu einander, so sind die räumlichen Geraden G und H windschief.

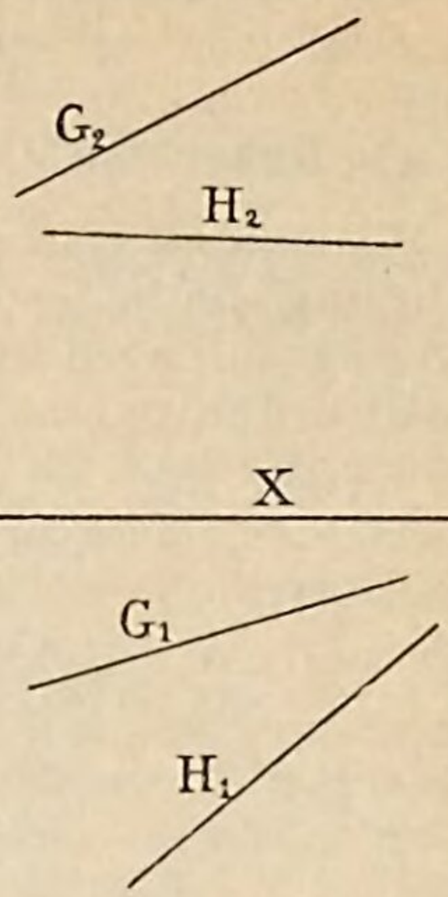
Figur 156a.



Figur 156b.



Figur 156c.



Erkl. 219. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

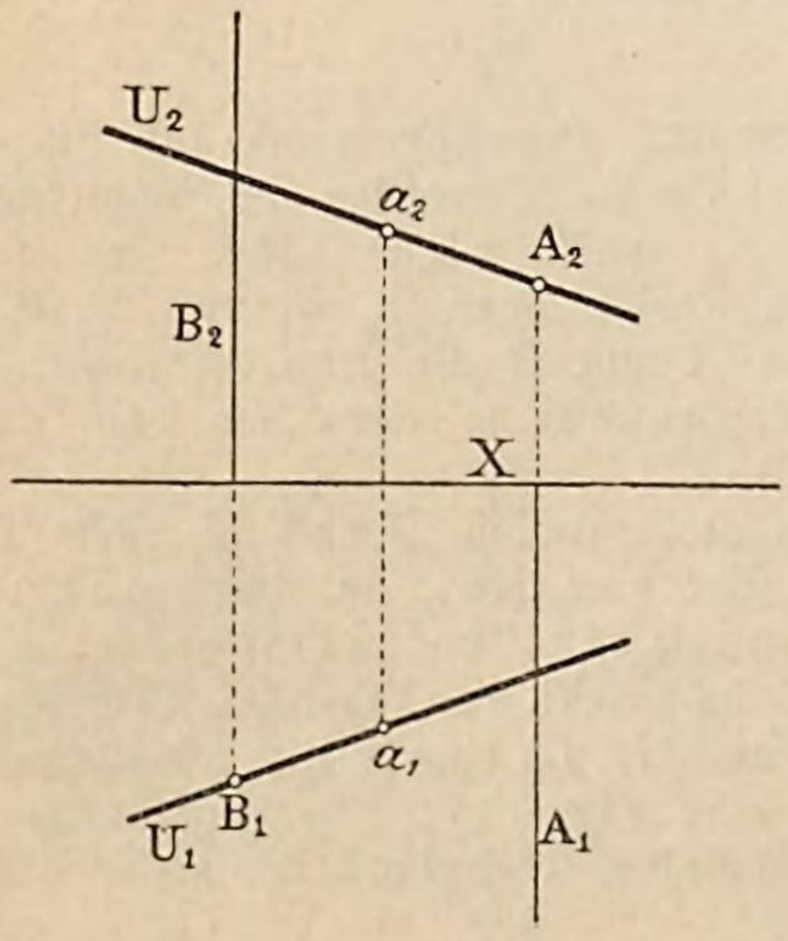
„**Zwei sich schneidende Gerade** haben als Projektionen in jeder **Pr. Eb.** zwei sich schneidende Gerade, deren Schnittpunkte in einer Senkrechten zur X-Achse liegen, zwei **parallele** Gerade projizieren sich wieder als parallele Gerade, sind die Geraden aber windschief, so können auch ihre Projektionen in jeder **Pr. Eb.** eine ganz willkürliche Lage haben."

Erkl. 220. Sind die in Betracht kommenden Geraden sämtlich parallel zur **Pr. Eb.** E_3, so ist zur Erkennung ihrer gegenseitigen Lage noch die Projektion auf E_3 nötig und gilt dann für die Projektionen eins und drei oder zwei und drei, das in Erkl. 218 für die Projektionen eins und zwei Gesagte.

c) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 75. Es sind ein Punkt a und zwei Gerade B und A gegeben, von welcher die erste senkrecht zur ersten, die letztere senkrecht zur zweiten **Pr. Eb.** steht. Es ist durch a eine Gerade zu zeichnen, welche B und A schneidet.

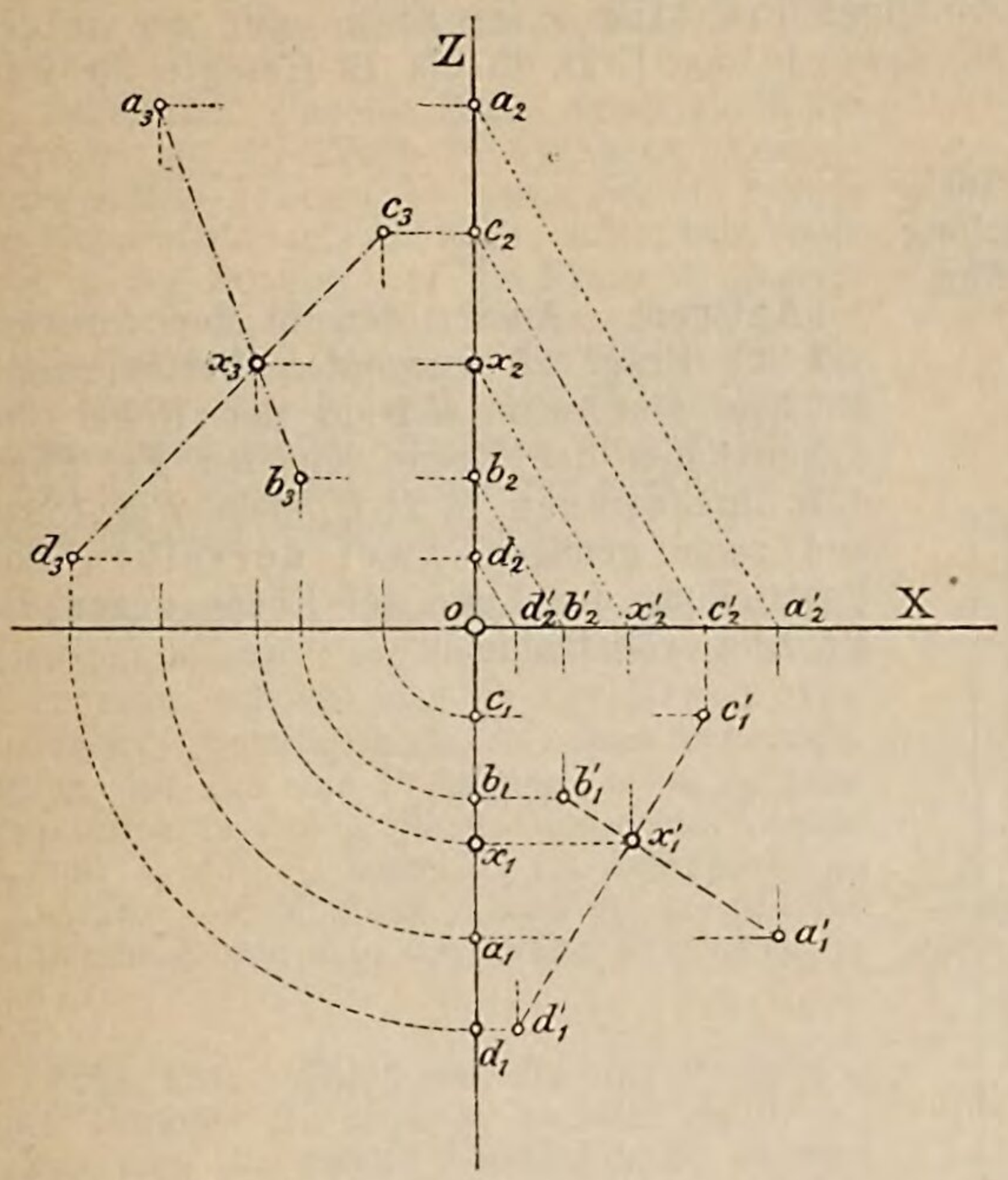
Figur 157.



Auflösung. Die Projektionen der gesuchten Geraden müssen gehen durch die Projektionen des Punktes a, siehe Figur 157, und durch die punktförmigen Projektionen B_1 von B bezw. A_2 von A, sind daher die Verbindungslinien U_1 und U_2.

Aufgabe 76. Zwei in einer zur **Pr. Eb.** E_3 parallelen Ebene liegende Gerade ab und cd sind gegeben. Es ist ihr Durchschnittspunkt zu konstruieren.

Figur 158.



Auflösung 1. Bestimme die dritten Projektionen a_3, b_3, c_3, d_3 der Punkte a, b, c, d, siehe Figur 158, so schneiden sich a_3b_3 und c_3d_3 in der dritten Projektion x_3 des gesuchten Schnittpunktes x. Aus x_3 bestimme umgekehrt x_1 und x_2, wie die Figur dies zeigt.

Auflösung 2. Zieht man durch die vier Punkte a, b, c, d, Parallele zu einer willkürlich gewählten Richtung, so bilden die durch die Punkte a und b bezw. c und d gezogenen Parallelen je eine Ebene parallel zur gewählten Richtung und beide Ebenen schneiden sich offenbar nach einer gleichfalls zur gewählten Richtung parallelen Geraden, welche durch den Schnittpunkt x der beiden Geraden ab und cd hindurch geht. Zur Bestimmung dieser Schnittlinie suche man die Schnittpunkte a', b', c', d' der genannten Parallelen mit der **Pr. Eb.** E_1; die Verbindungslinien $a_1'b_1'$ und $c_1'd_1'$ treffen sich in einem Punkte x_1', dessen zweite Projektion auf der X-Achse liegt. Die durch x_1' und x_2' gezogene Parallelen zu den Linien a_1a_1' bezw. a_2a_2' liefern die Projektionen x_1 und x_2 des Schnittpunktes x der Geraden ab und cd.

---

d) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 77. Man soll eine Gerade in allen möglichen Lagen zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 zeichnen und die dritten Projektionen auf die **Pr. Eb.** E_3 konstruieren.

Aufgabe 78. Die Aufgabe 75 ist zu lösen für den Fall, dass die Gerade B eine allgemeine Lage gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 habe.

Aufgabe 79. Es ist durch einen gegebenen Punkt a eine zur **Pr. Eb.** E_1 (E_2) parallele Gerade zu zeichnen, welche eine gegebene Gerade B schneidet.

E) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Fläche.

a) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Fläche im allgemeinen.

Anmerkung 12. Bezüglich der rechtwinkligen Projektion einer Fläche gilt das in der Antwort auf die Frage 24, sowie in Erkl. 64 Gesagte für jede **Pr. Eb.** Ausserdem

ist noch zu bemerken, dass die Lage einer, ihren geometrischen Eigenschaften nach bestimmten Fläche, aus der Projektionszeichnung ermittelt werden kann, sobald zwei Projektionen der Fläche gegeben sein werden. Weiteres hierüber folgt später.

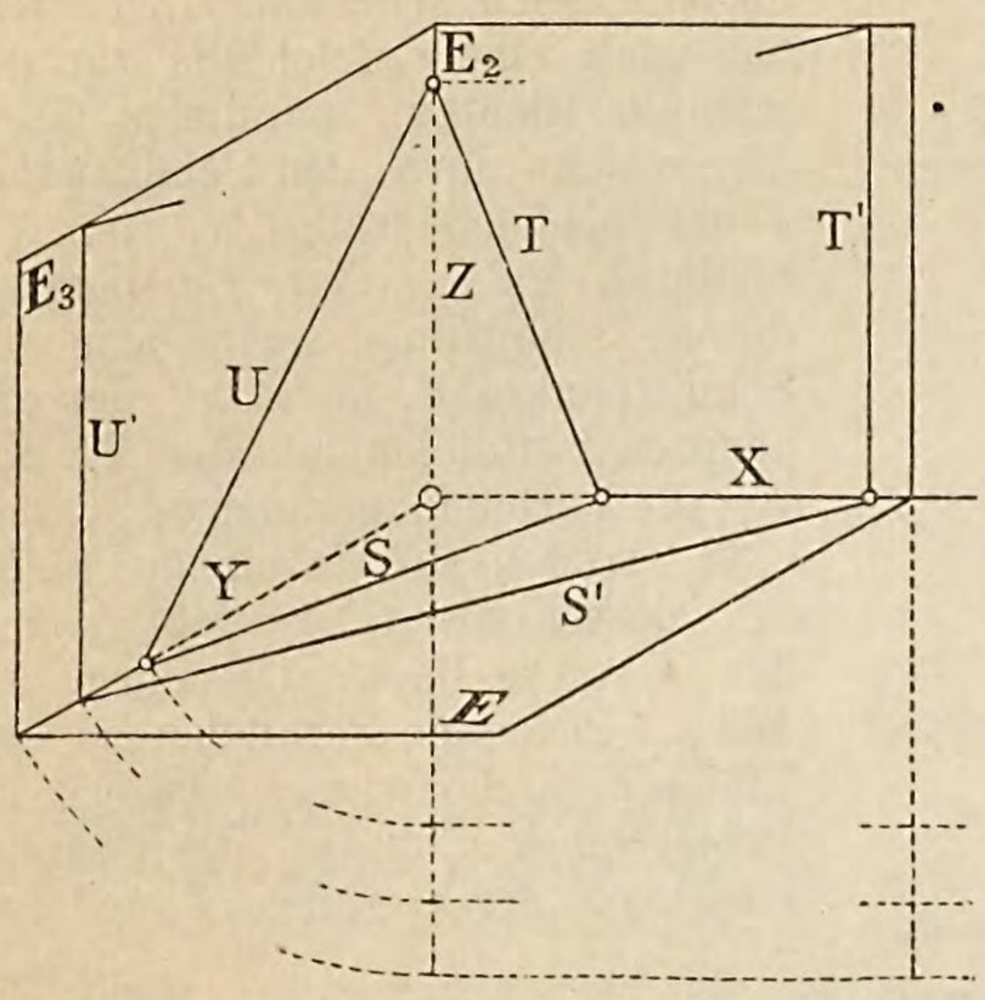
---

b) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Ebene.

Anmerkung 13. Bezüglich der rechtwinkligen Projektion einer Ebene gilt das in der Antwort auf die Fragen 25 und 26, sowie in den Erkl. 65 bis 73 Gesagte für jede der **Pr. Ebn.**

Frage 75. Welches sind die gebräuchlichsten Bestimmungsstücke zur Ermittelung der Lage einer Ebene gegen die **Pr. Ebn.**?

Figur 159a.



Antwort. Ausser den in der Antwort auf die Frage 26 genannten Bestimmungsstücken gibt man sich in der Regel die Schnittlinien der Ebene mit den **Pr. Ebn.**, d. h. ihre Spuren S, T, U, siehe Fig. 159a, und zwar genügen zwei derselben zur Feststellung der Lage der Ebene gegen die **Pr. Ebn.** vollständig.

Anmerkung 14. Für die Folge soll, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, unter den Spuren der Ebene stets die erste und zweite Spur S bezw. T, siehe Figur 159a, verstanden sein.

Frage 76. Wie projizieren sich in der Projektionszeichnung die Spuren einer Ebene?

Erkl. 221. Ist eine Ebene eine projizierende Ebene, d. h. steht sie auf einer der **Pr. Ebn.** senkrecht, so ist sie auch parallel zu derjenigen Projektionsachse, welche auf der nämlichen **Pr. Eb.** senkrecht steht. Steht demnach eine Ebene $S'T'$, siehe Fig. 159a, auf der **Pr. Eb.** E_1 senkrecht, so ist sie und damit auch ihre zweite Spur T' parallel zur Z-, bezw. senkrecht zur X-Achse.

Entsprechend wird eine zur **Pr. Eb.** senkrechte Ebene und damit auch ihre erste Spur

Antwort. Die Spuren einer Ebene sind zwei in der Achse sich schneidende Gerade S und T, siehe Figur 159b, von welchen je eine Projektion in die X-Achse fällt, siehe Antwort 4 der Frage 71, und zwar liegt die zweite Projektion von S, d. h. S_2, ebenso die erste Projektion von T, d. h. T_1 in der X-Achse.

parallel sein zu Y, bezw. senkrecht stehen zur X-Achse. Aus Vorstehendem folgt der Satz:

„Eine projizierende Ebene hat als **eine** Spur stets eine Senkrechte zur X-Achse und zwar steht die **erste** oder **zweite** Spur zu letzterer Linie senkrecht, je nachdem die Ebene zur zweiten oder ersten **Pr. Eb.** senkrecht steht."

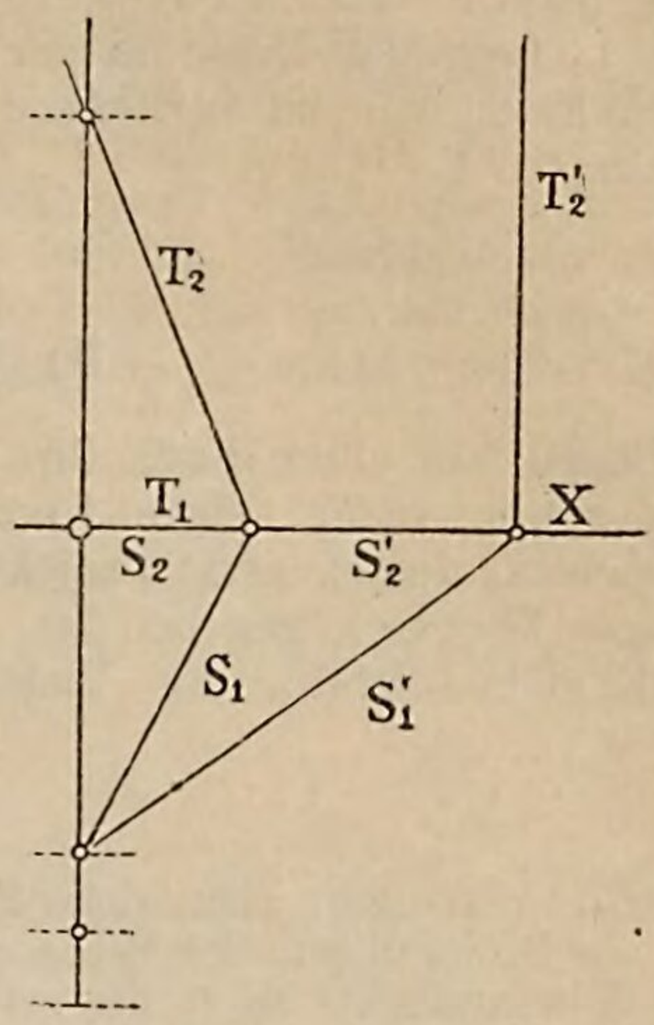
Erkl. 222. Ist eine Ebene durch die in der Antwort auf die Frage 26 genannten Bestimmungsstücke gegeben, so lassen sich die Spuren im Bedarfsfalle stets ermitteln, indem man eben, wie in der Antwort auf die Frage 69 gezeigt wurde, die Spuren von zweien Geraden der Ebene konstruiert, welche in den Fällen 1 und 3, siehe Antwort auf die Frage 26, unmittelbar gegeben sind, im Falle 2 mittels einer Parallelen durch den gegebenen Punkt zur gegebenen Geraden erhalten werden können.

Erkl. 223. Ist eine Ebene durch ihre Bestimmungsstücke, etwa durch die Spuren S und T gegeben und will man in der Ebene eine beliebige Gerade ziehen, so nehme man, siehe Figur 160, die eine Projektion, etwa A_1 ganz willkürlich an und projiziere ihre Schnittpunkte a_1 und b_1 mit S_1 bezw. T_1 (X-Achse) auf S_2 (X-Achse) und T_2 nach a_2 und b_2, so gibt die Verbindungslinie $a_2 b_2$ die zweite Projektion A_2 von A.

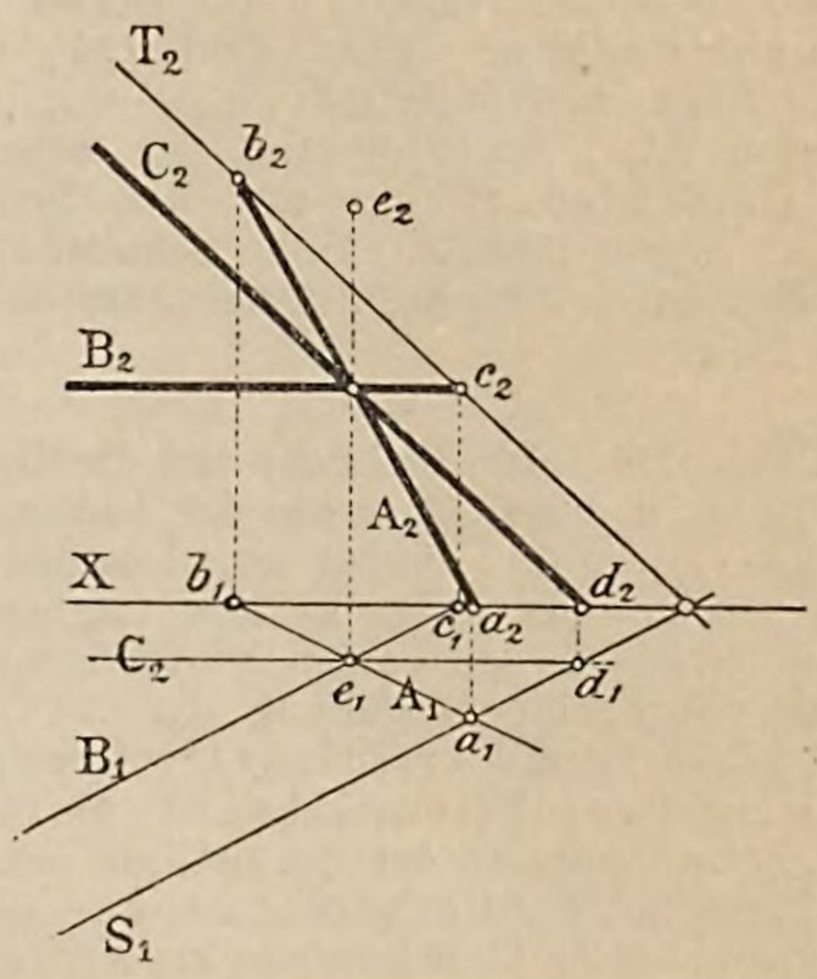
Erkl. 224. Wählt man die eine Projektion einer Geraden B, etwa B_1 parallel zu S_1, so erhält man die zweite Projektion B_2 parallel zur X-Achse (S_2) und die Gerade B liegt in der Ebene, ist parallel zur Spur S der Ebene und heisst deshalb eine Spurparallele oder eine Hauptgerade der Ebene. Analog ist die Gerade C eine Parallele zur zweiten Spur der Ebene. Vorstehendes lässt sich wie folgt als Satz aussprechen:

„In einer Ebene gibt es **zwei Paare** von Hauptgeraden, nämlich die Parallelen zur **ersten** und jene zur **zweiten** Spur, bei den ersteren sind die **zweiten**, bei den letzteren die **ersten** Projektionen **parallel zur X-Achse.**"

Figur 159b.



Figur 160.



F) Ueber die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen und ihren Projektionen.

a) Ueber die Lagen eines Punktes zu einer Ebene.

Frage 77. Wie entscheidet man in der Projektionszeichnung über die in der Antwort auf die Frage 28 genannten Lagen eines Punktes?

Antwort. Sind, siehe Figur 160, e_1 und e_2 die Projektionen eines Punktes e, S_1 und T_2 die Spuren einer Ebene, so ziehe man durch eine der Projektionen des Punktes e, etwa durch e_1 eine beliebige Gerade A der Ebene oder eine der Hauptgeraden B und C, siehe

Erkl. 224 und bestimme die zugehörige andere Projektion von A bezw. B oder C. Geht diese Projektion durch die Projektion des Punktes, so liegt der Punkt in der Ebene, im anderen Falle, wie im vorliegenden, dagegen nicht.

---

b) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 80. In einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene $S_1 T_2$, siehe Figur 161, liegt ein Vieleck, dessen erste Projektion als regelmässiges Sechseck gegeben ist. Es ist die zweite Projektion des Vielecks zu zeichnen.

Erkl. 225. Verlängert man, siehe Fig. 161, die durch die Projektionen der Sechsecksecken gezogenen Spurparallelen bis je die ersten und zweiten Projektionen sich in den Punkten $\mathfrak{a}_{1,2}$, $\mathfrak{b}_{1,2} \cdots \mathfrak{f}_{1,2}$ treffen, so fallen in diesen Punkten die ersten und zweiten Projektionen auf einander, d. h. die Punkte $\mathfrak{a} \cdots \mathfrak{f}$ liegen in der Coïncidenzebene, siehe Erkl. 194, woraus ferner folgt, dass die Punkte $\mathfrak{a}_{1,2} \cdots \mathfrak{f}_{1,2}$ in einer Geraden $\mathfrak{S}_{1,2}$, der Projektion der Schnittlinie der Coïncidenzebene mit der Sechseckebene, liegen müssen. Diese Schnittlinie geht überdies durch den Schnittpunkt der Spuren S und T.

Erkl. 226. In Rücksicht auf die Lage der Punkte a_1, a_2 bis f_1, f_2 sowie der Linien $a_1 \mathfrak{a}_{1,2}$, $a_2 \mathfrak{a}_{1,2} \cdots f_1 \mathfrak{f}_{1,2}$, $f_2 \mathfrak{f}_{1,2}$ findet zwischen den beiden Projektionen des Sechsecks und folglich überhaupt zwischen den beiden Projektionen einer ebenen Figur die Beziehung der Affinität statt; dabei ist die Affinitätsrichtung senkrecht zur Projektionsachse X, die Affinitätsachse aber in der Schnittlinie der Ebene der Figur mit der Coïncidenzebene gegeben. Man nennt diese Linie kurzweg die Affinitätsachse der Ebene.

Vorstehendes lässt sich in folgendem Satze zusammenfassen:

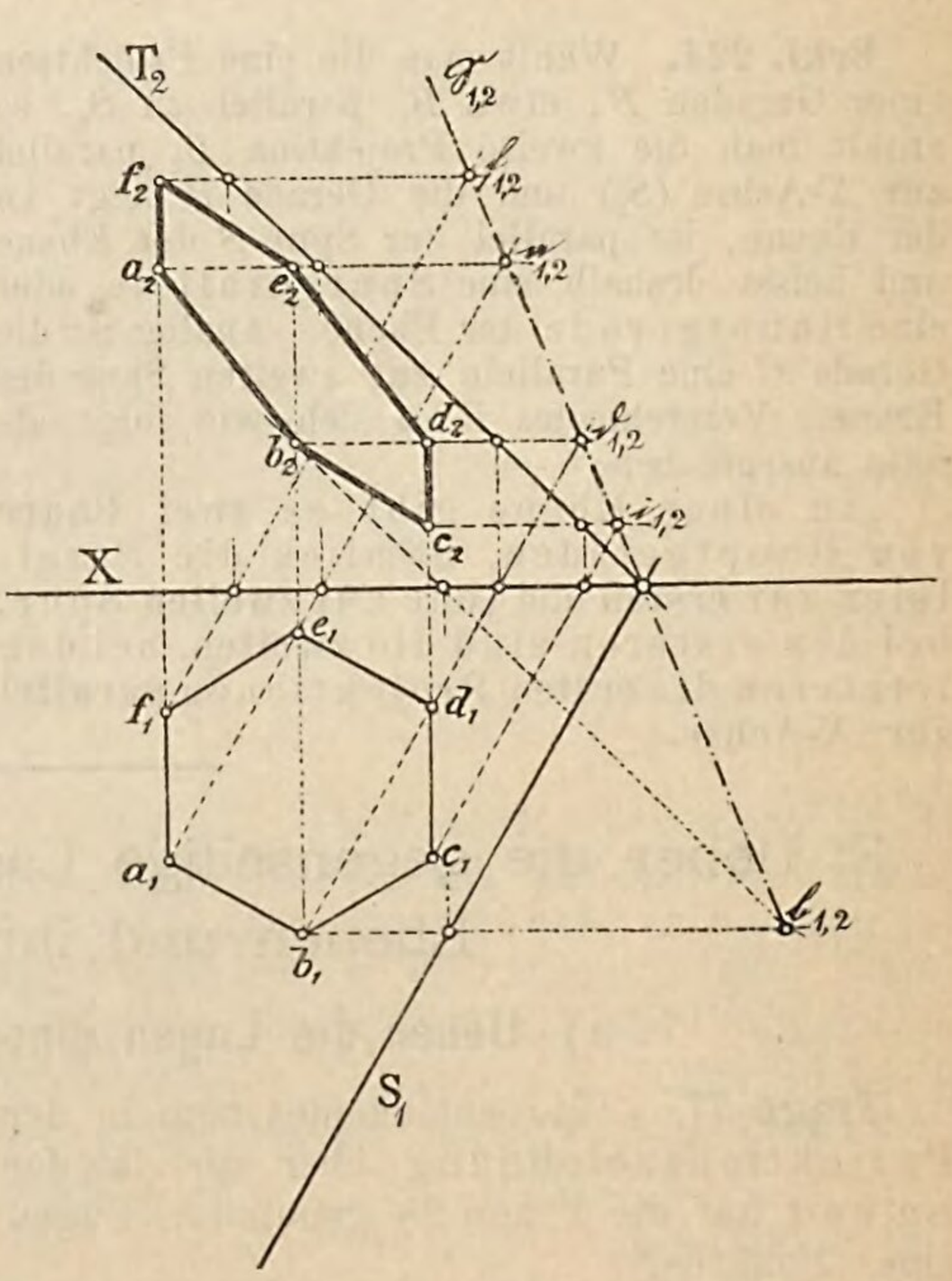
„Die beiden Projektionen einer ebenen Figur sind **affine Figuren,** für welche die **Affinitätsrichtung** senkrecht zur X-Achse, die **Affinitätsachse** aber die **Affinitätsachse** der Ebene der Figur ist.

Erkl. 227. Was in Erkl. 226 über die Projektionen eins und zwei einer ebenen Figur gesagt wurde, gilt entsprechend auch für die Projektionen eins und drei, ebenso zwei und drei.

Auflösung. Zeichne durch die Punkte a_1 bis f_1 Parallele zur ersten (zweiten) Spur der Sechsecksebene, siehe Erkl. 223 und 224 und bestimme deren zweite Projektionen; auf ihnen liegen die zweiten Projektionen der Sechsecksecken.

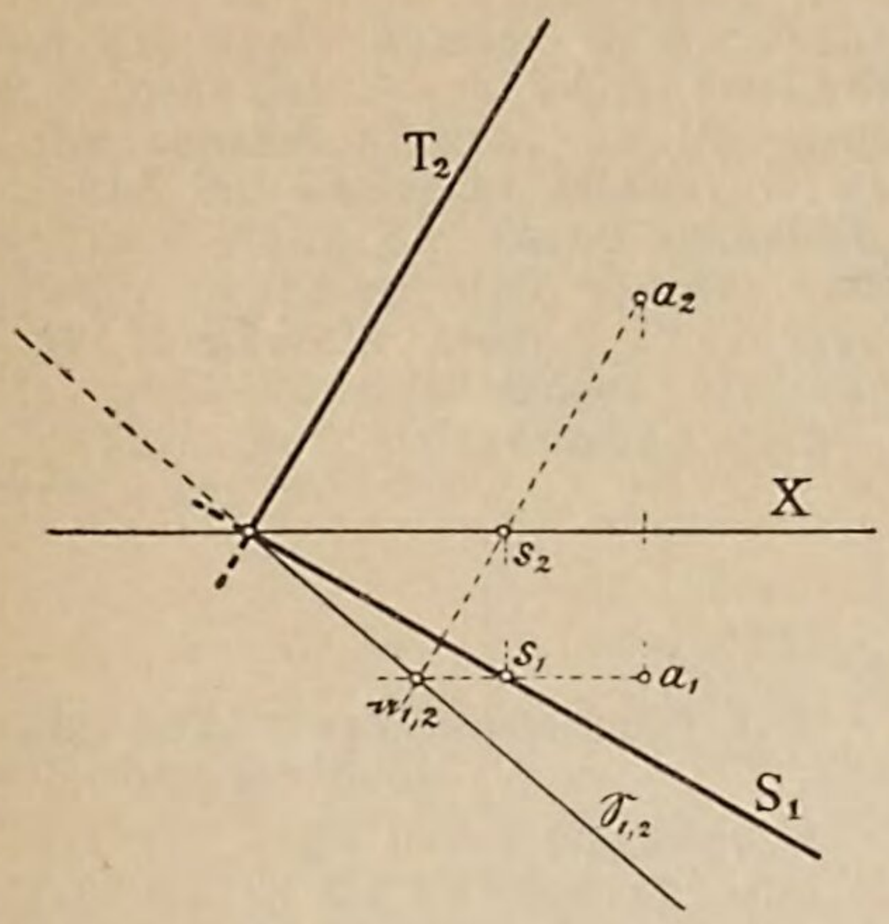
Man hätte selbstverständlich durch die Punkte a_1 bis f_1 auch ganz willkürliche Gerade der Sechsecksebene ziehen und deren zweite Projektionen bestimmen können, einfacher und deshalb zweckmässig ist es aber, so wie oben angegeben, zu verfahren.

Figur 161.



Aufgabe 81. Von einer Ebene sind gegeben ihre Affinitätsachse $\mathfrak{S}_{1,2}$ sowie ein Punkt a_1, a_2. Man soll die Spuren der Ebene konstruieren.

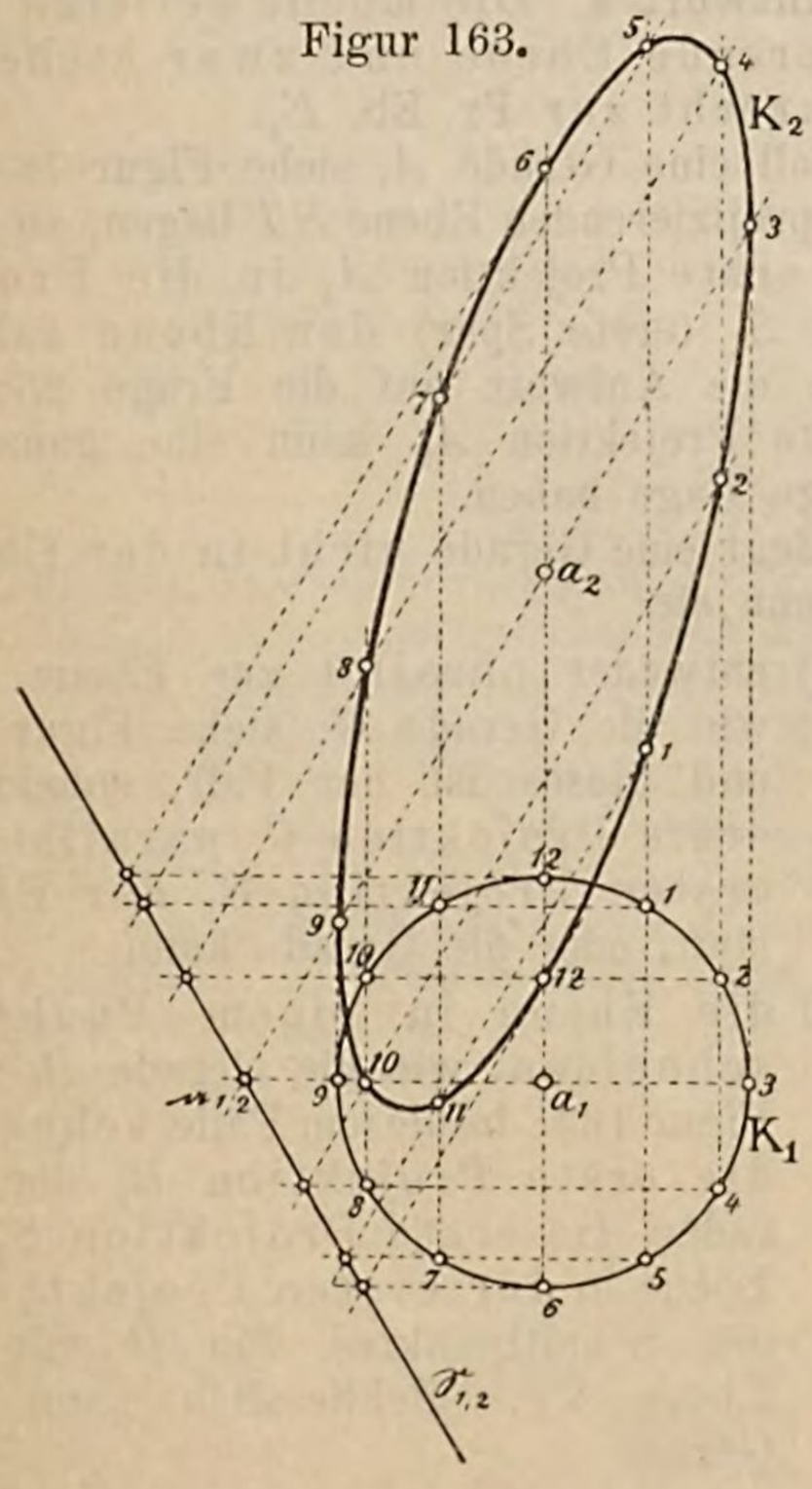
Figur 162.



Auflösung. Zeichne, siehe Figur 162, durch a_1 etwa eine Parallele zur X-Achse bis zum Schnitt $\mathfrak{a}_{1,2}$ mit $\mathfrak{S}_{1,2}$, so gibt die Verbindungslinie $a_2\mathfrak{a}_{1,2}$ die Richtung der zweiten Spur T_2. Bestimmt man ausserdem noch die erste Spur s_1 der Geraden $a\mathfrak{a}$, so ist damit auch die erste Spur S_1 der Ebene festgelegt.

Aufgabe 82. Eine Ebene ist wie in Aufgabe 81 gegeben; a_1 ist Mittelpunkt einer Kreislinie K_1 von beliebigem Halbmesser, als erste Projektion einer in der Ebene $\mathfrak{S}a$ liegenden Linie K. Es ist die zweite Projektion K_2 der Linie K zu zeichnen.

Figur 163.



Auflösung. Ziehe wie in Aufgabe 81 durch a_1 eine Parallele zur X-Achse und ermittele deren zweite Projektion $a_2\mathfrak{a}_{1,2}$. Nehme auf K_1 eine beliebige Anzahl von Punkten an (zweckmässig teilt man K_1 in eine Anzahl gleicher Teile) und ziehe durch dieselben Parallele zu $a_1\mathfrak{a}_{1,2}$ bis zum Schnitte $\mathfrak{S}_{1,2}$. Auf den zu $\mathfrak{a}_{1,2}a_2$ parallelen zweiten Projektionen dieser Linien liegen die zweiten Projektionen der Punkte von K_2.

c) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 83. Die Spuren einer durch die Coordinaten dreier Punkte a, b, c gegebenen Ebene sind zu konstruieren:

Punkt	Abscisse	erste Ordinate	zweite Ordinate
a	0	+ 6	+ 45
b	+ 25	+ 42	+ 15
c	+ 45	+ 24	+ 30

Aufgabe 84. Von einer ebenen Figur ist die erste Projektion als regelmässiges Achteck gegeben; von der zweiten Projektion kennt man die Projektionen dreier Eckpunkte. Man soll:

a) die Affinitätsachse der Ebene,

b) die zweite Projektion des Achtecks,

c) die Spuren der Achtecksebene

konstruieren.

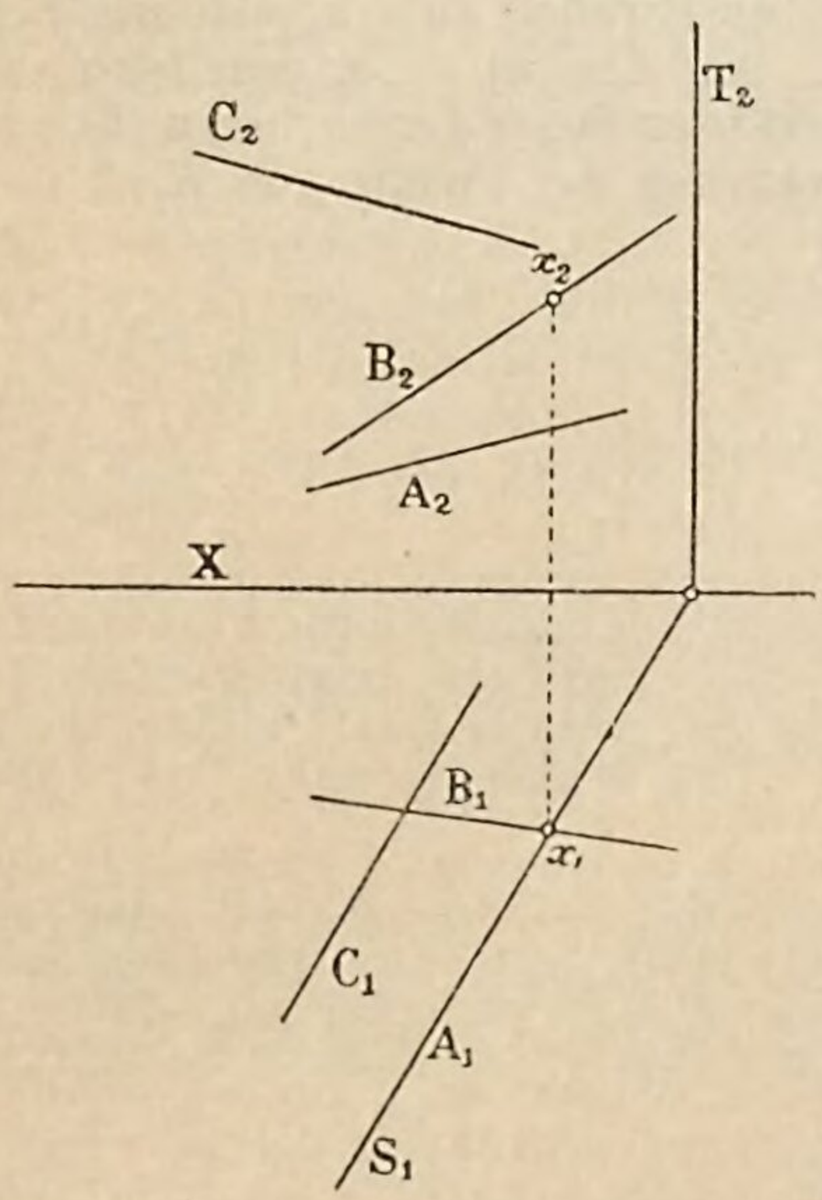
---

d) Ueber die Lagen einer Geraden zu einer Ebene.

α) Ueber die Lagen einer Geraden zu einer Ebene im allgemeinen.

Frage 78. Wie entscheidet man in der Projektionszeichnung über die in der Antwort auf die Frage 30 genannten Lagen einer Geraden zu einer Ebene?

Figur 164.



Antwort a. Die Ebene sei eine projizierende Ebene und zwar stehe sie senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1.

Soll eine Gerade A, siehe Figur 164, in der projizierenden Ebene ST liegen, so muss ihre erste Projektion A_1 in die Projektion S_1 (erste Spur) der Ebene fallen, siehe die Antwort auf die Frage 25; die zweite Projektion A_2 kann eine ganz beliebige Lage haben.

Liegt eine Gerade nicht in der Ebene, so kann sie:

α) entweder parallel zur Ebene sein, wie die Gerade C, siehe Figur 164, und dieses ist der Fall, sobald die erste Projektion C_1 parallel zur ersten Projektion S_1 der Ebene läuft, oder die Gerade kann

β) die Ebene in einem Punkte x schneiden, wie die Gerade B, siehe Figur 164; in diesem Falle schneidet die erste Projektion B_1 der Geraden die erste Projektion S_1 der Ebene in der ersten Projektion x_1 des Schnittpunktes von B mit der Ebene ST. Schliesslich kann eine Gerade

Erkl. 228. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Die möglichen Lagen einer Geraden zu einer Ebene **lassen sich aus der Projektionszeichnung unmittelbar erkennen, wenn die Ebene eine projizierende ist,** und zwar wird die eine Projektion der Geraden die gleichnamige Projektion der Ebene, siehe Erkl. 65, entweder **schneiden, mit ihr zusammenfallen, zu ihr parallel** sein, **auf ihr senkrecht stehen,** je nachdem die Gerade **die Ebene schneidet, in ihr liegt, zu ihr parallel ist** oder endlich **auf ihr senkrecht steht.** In letzterem Falle muss dann überdies die andere Projektion der Geraden parallel zur X-Achse laufen.“

Erkl. 229. Aus nebenstehender Antwort b. folgt der Satz:

„Um die Lage einer Geraden A zu einer Ebene ST zu untersuchen, betrachte man die **eine** Projektion der Geraden A **als Projektion einer Geraden der Ebene** und bestimme deren **zuguhörige andere Projektion.**

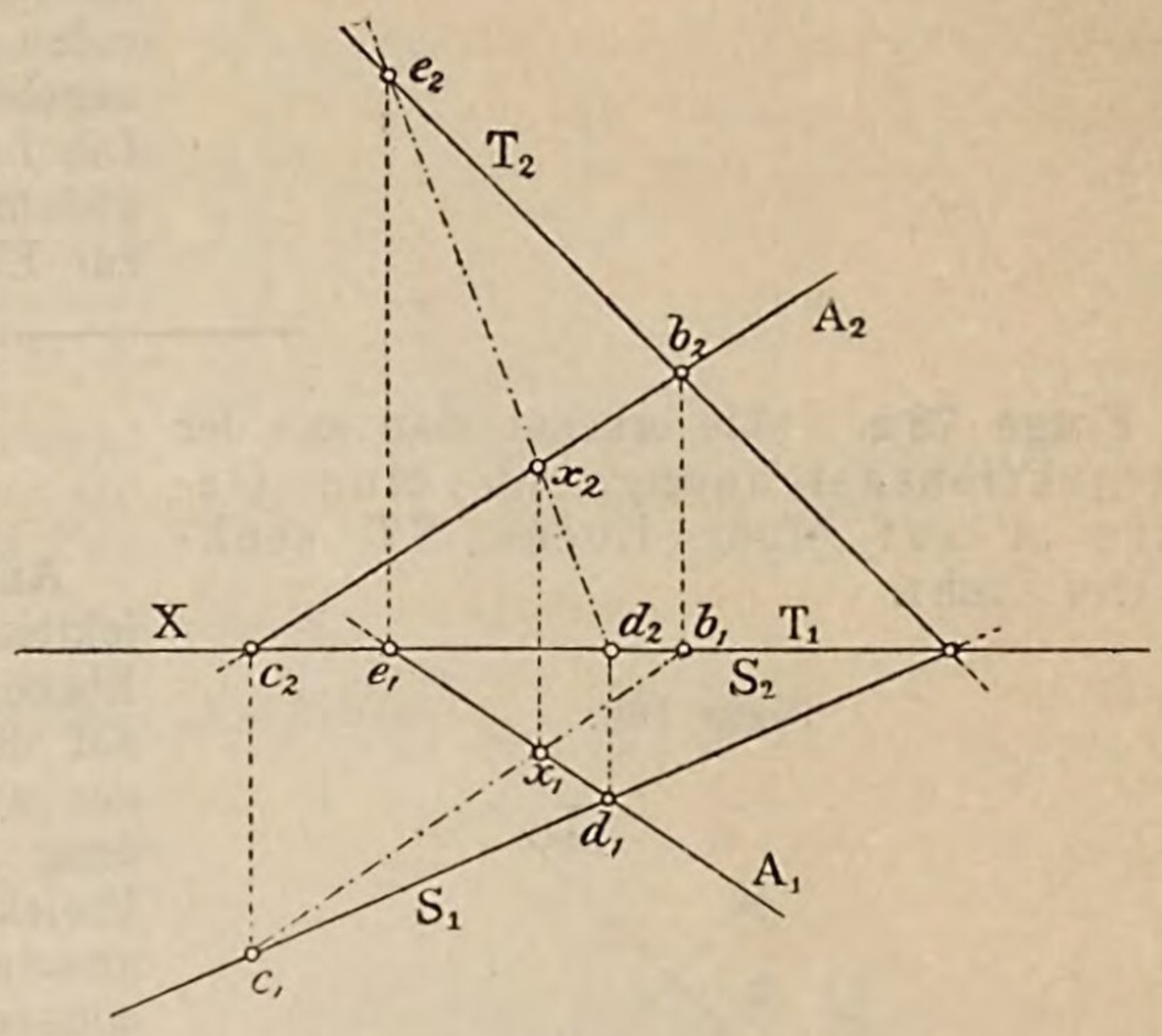
Je nachdem diese Projektion mit jener der gegebenen Geraden **zusammenfällt, sie schneidet** oder zu ihr **parallel läuft,** liegt die Gerade **in der Ebene,** oder **sie schneidet dieselbe** oder läuft endlich **parallel** zu ihr.“

Erkl. 230. In der Antwort b. auf die Frage 78 bezw. in Erkl. 229 ist zu gleicher Zeit die Lösung der Aufgabe enthalten: den Durchschnitt einer Geraden mit einer Ebene zu konstruieren. Da eine Gerade mit einer Ebene nur einen einzigen Punkt gemein haben kann, so müssen die Schnittpunkte x_1 von A_1 und $b_1 c_1$, siehe Fig. 165 und x_2 von A_2 und $d_2 e_2$ die Projektionen des Schnittpunktes x von A mit der Ebene ST darstellen, d. h. in einer Senkrechten zur X-Achse liegen, siehe Erkl. 184.

γ) zur Ebene ST senkrecht stehen; dieser Fall tritt ein, wenn die erste Projektion der Geraden senkrecht zur ersten Projektion (Spur) der Ebene steht; die zweite Projektion läuft parallel zur X-Achse, bezw. steht senkrecht zur zweiten Spur T_2 der Ebene.

Steht die gegebene Ebene auf der **Pr. Eb.** E_2 senkrecht, so gilt für die zweite Projektion der Geraden das, was soeben für die erste Projektion entwickelt wurde.

Figur 165.



Antwort b. Die Ebene habe eine beliebige Lage gegen die **Pr. Ebn.** Ist durch $S_1 T_2$ die Ebene, durch $A_1 A_2$ die Gerade gegeben, so entscheidet man über die Lage der Geraden A zur Ebene ST wie folgt: Ist die Gerade A eine Gerade der Ebene, so schneidet sie alle in der Ebene liegenden Geraden (entweder in endlicher oder unendlicher Entfernung); die Schnittpunkte b_2 und c_2 von A_2 mit den Projektionen T_2 und S_2 der Geraden T und S sind daher die zweiten Projektionen der Schnittpunkte b und c von A mit den Geraden T und S; die zugehörigen ersten Projektionen b_1 und c_1 liegen auf T_1 und S_1. Die erste Projektion von A müsste also die Lage $b_1 c_1$ haben, was nicht der Fall ist; die Gerade A liegt demnach nicht in der Ebene ST.

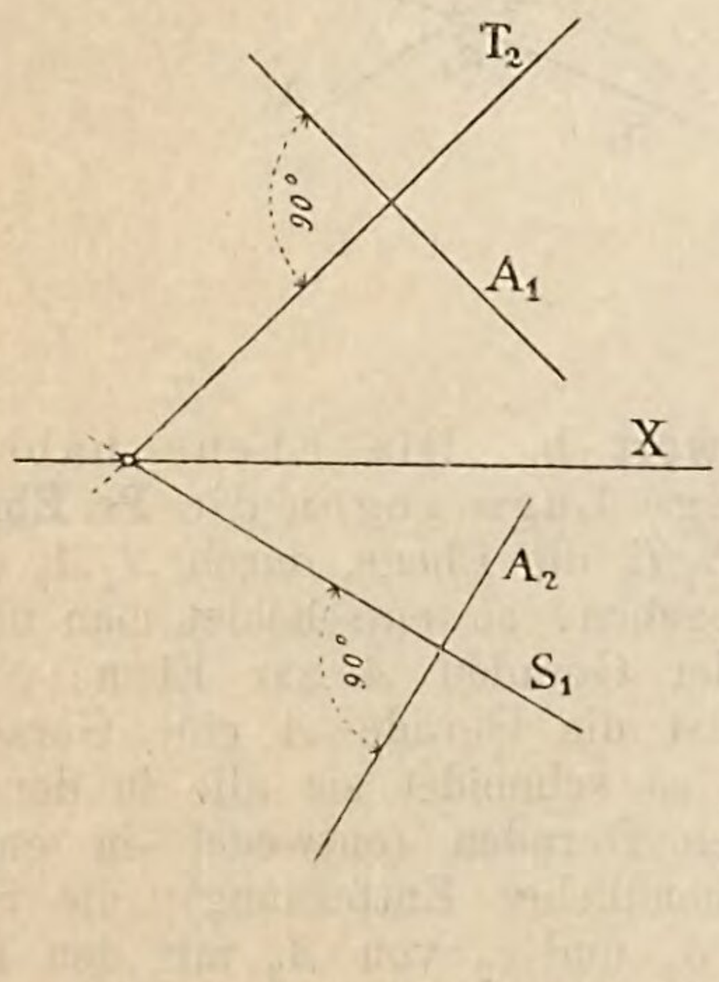
Nun stellen die Geraden $b_2 c_2$ und $b_1 c_1$ die Projektionen einer Geraden bc dar, welche

einerseits in der Ebene ST, andererseits in der projizierenden Ebene A_2 liegt, d. h. der Durchschnitt dieser projizierenden Ebene A_2 mit der gegebenen Ebene ist. Der Punkt x, gelegen im Schnitt der Geraden bc und A, gehört daher der Ebene ST und zugleich auch der Geraden A an, ist somit der Schnittpunkt der Geraden A mit der Ebene ST.

Hätte b_1c_1 eine zu A_1 parallele Lage erhalten, so fiele der Schnittpunkt x von A mit der Ebene ST in unendliche Ferne, d. h. die Gerade A wäre in diesem Falle parallel zur Ebene ST gewesen. Anstatt von der zweiten Projektion A_2 der Geraden auszugehen, kann man auch die erste Projektion A_1, als erste Projektion d_1e_1 einer Geraden de der Ebene ST auffassen und die zugehörige zweite Projektion d_2e_2 bestimmen. Die Lage von d_2e_2 zu A_2 entscheidet dann gleichfalls über die Lage der Geraden A zur Ebene ST.

Frage 78a. Wie erkennt man aus der Projektionszeichnung, ob eine Gerade A auf einer Ebene ST senkrecht steht.

Figur 166.



Antwort. Nach Erkl. 86 muss die Projektion einer Geraden auf der Spur einer Ebene senkrecht stehen, wenn die Gerade auf der Ebene senkrecht steht. Hat man nun zwei **Pr. Ebn.**, so werden in Anwendung eben genannten Satzes die beiden Projektionen der Geraden A auf den gleichnamigen Spuren der Ebene senkrecht stehen müssen und es frägt sich, ob diese Bedingung allein zur Feststellung der Lage der Geraden zur Ebene hinreicht. Dies ist in der That der Fall; denn stehen die Projektionen A_1 und A_2, siehe Figur 166, senkrecht zu den gleichnamigen Spuren S_1 und T_2, so sind die projizierenden Ebenen A_1 und A_2 senkrecht zur Ebene ST, siehe Erkl. 231, und folglich steht auch die Schnittlinie A beider projizierenden Ebenen senkrecht zur Ebene ST, siehe Erkl. 232.

Erkl. 231. Nach Erkl. 70 steht eine Ebene auf einer anderen senkrecht, wenn sie eine Senkrechte zu dieser Ebene enthält.

Die Gerade S_1, ebenso T_2 steht aber senkrecht zur projizierenden Ebene A_1 bezw. A_2, siehe Erkl. 228, daher ist auch die Ebene ST senkrecht zu den projizierenden Ebenen A_1 und A_2.

Erkl. 232. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Stehen zwei Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht, so ist auch die Schnittlinie beider Ebenen senkrecht zur dritten Ebene."

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Erkl. 233. Aus der Antwort auf die Frage 78a folgt der Satz:

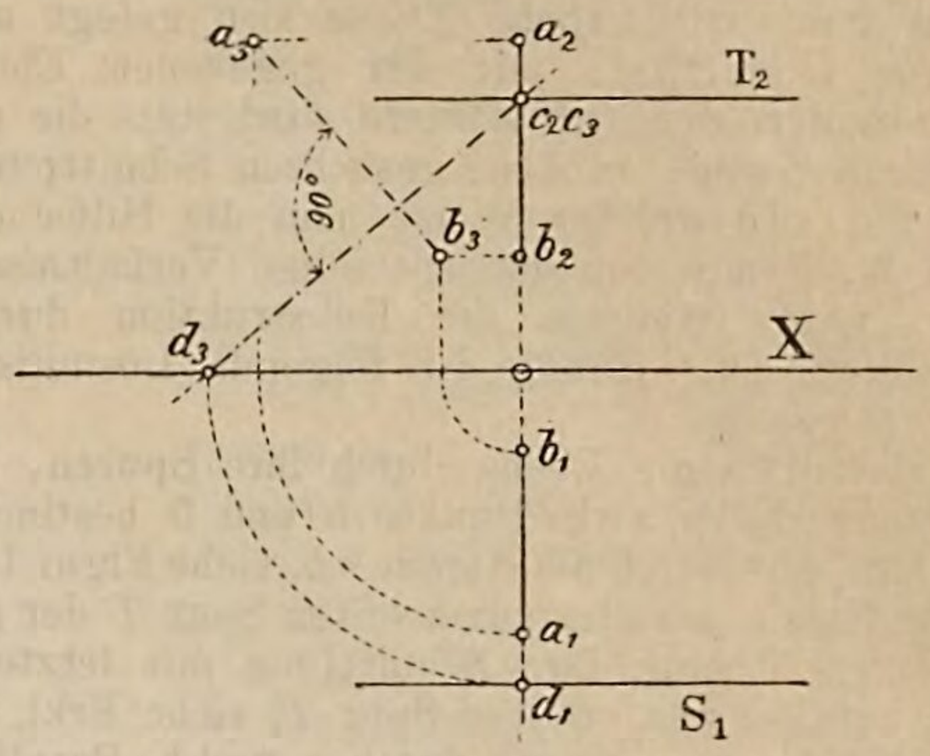
„Soll eine Gerade auf einer Ebene senkrecht stehen, so müssen in der Projektionszeichnung die Projektionen der Geraden senkrecht stehen zu den gleichnamigen Spuren der Ebene."

Erkl. 234. Die in Erkl. 233 genannte Bedingung reicht nicht mehr aus für den Fall, dass beide Spuren der Ebene parallel sind zur X-Achse, denn es werden dann die zu den Spuren senkrechten Projektionen der Geraden in eine Senkrechte zur X-Achse fallen, s. Figur 167.

Man kann in diesem Falle somit unmittelbar nicht erkennen, ob die Gerade ab senkrecht zur Ebene ST steht, doch erhält man hierüber Aufschluss durch Herstellung einer Projektion von Ebene und Gerade auf die **Pr. Eb.** E_3, siehe Figur 167.

Die Gerade steht senkrecht zur Ebene, wenn die dritte Projektion $a_3 b_3$ der Geraden senkrecht steht zur dritten Projektion $c_3 d_3$ der Ebene.

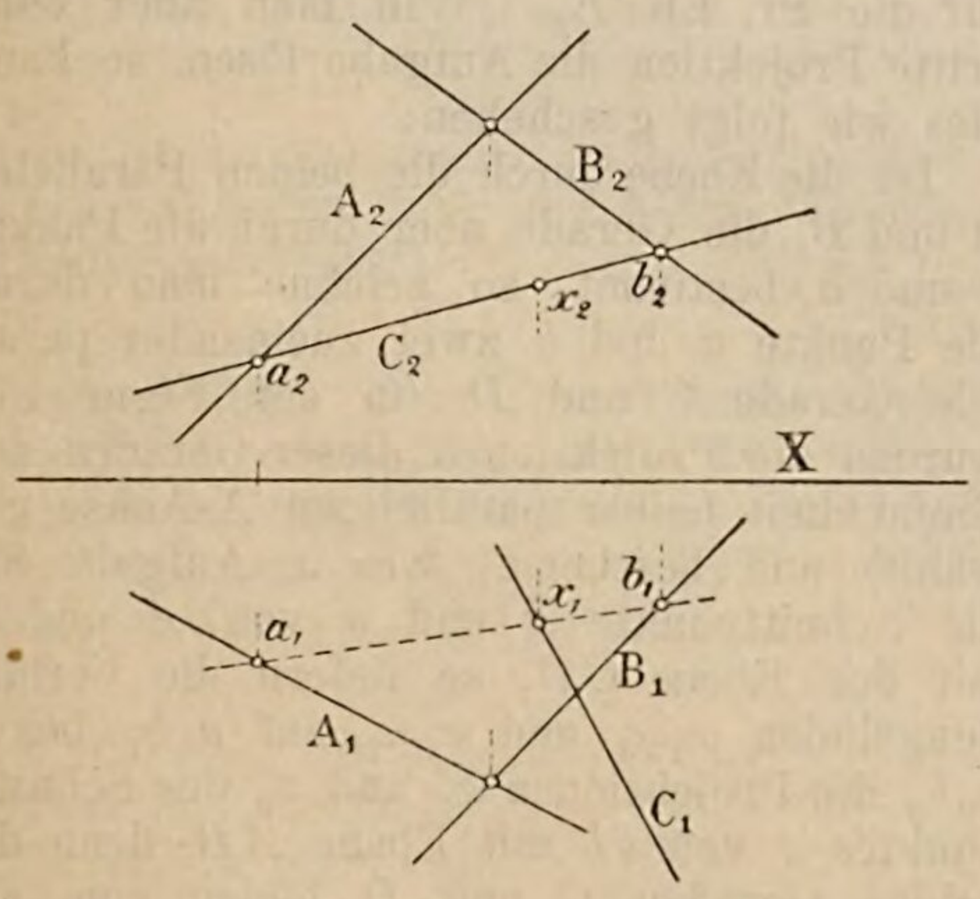
Figur 167.



β) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 85. Man soll den Durchschnittspunkt einer Geraden mit einer durch die in der Antwort auf die Frage 26 genannten Bestimmungsstücke gegebenen Ebene konstruieren.

Figur 168.



Auflösung. Die Ebene sei zunächst durch zwei sich schneidende Gerade A und B gegeben, siehe Figur 168. Sind ferner C_1 und C_2 die Projektionen der Geraden, so projiziere man, siehe Antwort b auf die Frage 77, die Durchschnittspunkte a_2 und b_2 von C_2 mit A_2 und B_2 auf A_1 und B_1 nach a_1 und b_1; die Verbindungslinie $a_1 b_1$ trifft die Projektion C_1 der gegebenen Geraden in der ersten Projektion x_1 des gesuchten Schnittpunktes x. Die zweite Projektion x_2 liegt in der Projizierenden durch x_1 auf C_2.

Die Lösung der Aufgabe bleibt ganz dieselbe, wenn die Ebene durch zwei parallele Gerade gegeben ist.

Kennt man aber von der Ebene nur eine Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt, so ziehe man durch ihn eine Parallele zur Geraden und verfahre wie oben.

Erkl. 235. Die Aufgabe: „Den Durchschnittspunkt einer Geraden mit einer Ebene zu konstruieren", kann auch noch

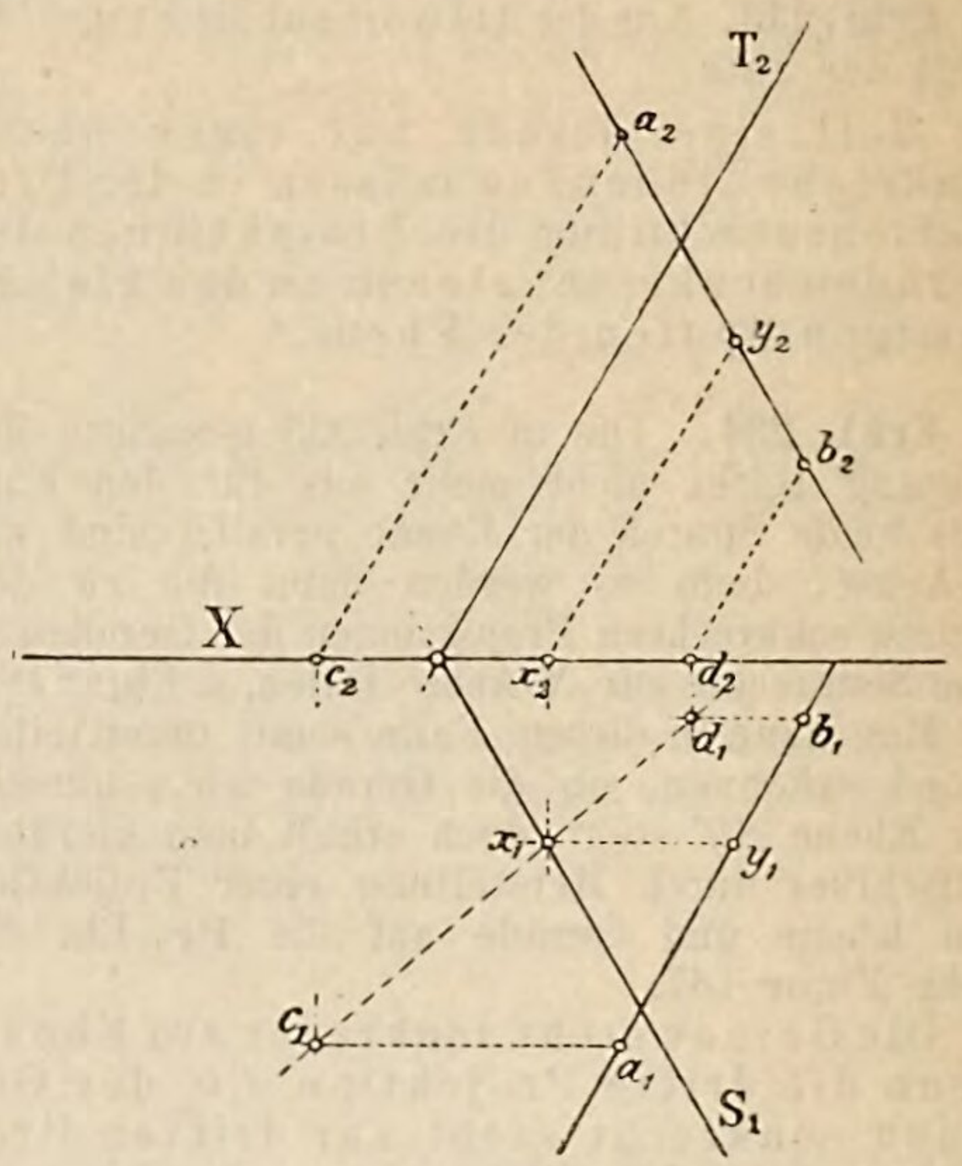
auf eine andere Art, als bisher angegeben, gelöst werden.

In der Antwort auf die Frage 77 wurde die Schnittlinie einer der die Gerade enthaltenden projizierenden Ebenen mit der gegebenen Ebene ermittelt und diese Schnittlinie lieferte auf der gegebenen Geraden den gesuchten Schnittpunkt. Nun kann man aber durch die gegebene Gerade eine ganz willkürliche Ebene sich gelegt und deren Schnittlinie mit der gegebenen Ebene konstruiert denken; letztere wird stets die gegebene Gerade in dem gesuchten Schnittpunkt treffen. In welcher Weise man die Hilfsebene wählt, hängt von den speziellen Verhältnissen ab, unter welchen die Konstruktion durchzuführen ist. Häufig ist folgende Lösungsart zweckmässig:

Ist etwa die Ebene durch ihre Spuren, die Gerade durch zwei Punkte a und b bestimmt, so lege man durch die Gerade ab, siehe Figur 169, eine Ebene parallel zur zweiten Spur T der gegebenen Ebene; ihre Schnittlinie mit letzterer ist parallel zur zweiten Spur T, siehe Erkl. 34.

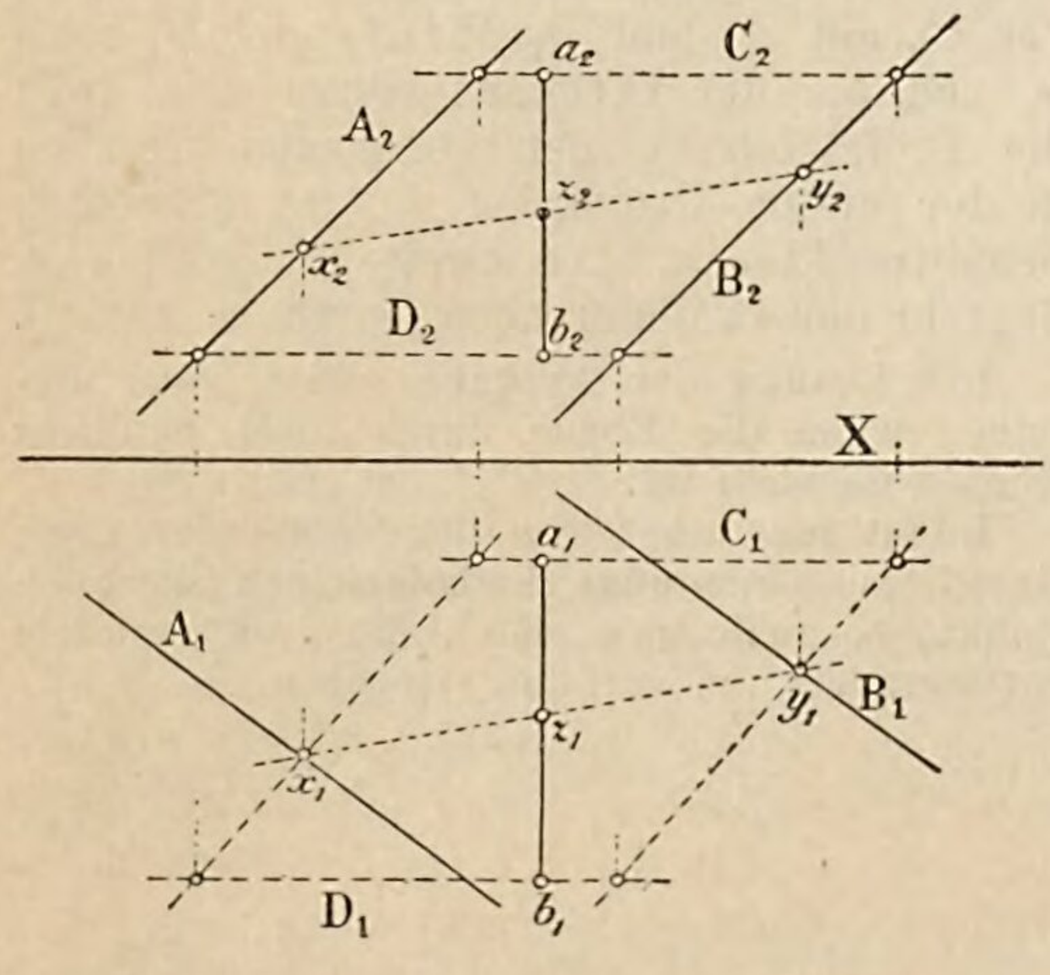
Zieht man demnach durch a_2 und b_2 Parallele zu T_2, durch a_1 und b_1 Parallele zur X-Achse und bestimmt die Projektionen c_1 und d_1, der ersten Spuren der genannten Parallelen, so trifft die Verbindungslinie $c_1 d_1$ die erste Spur S_1 in der Projektion x_1, der ersten Spur der Schnittlinie von Hilfs- und gegebener Ebene. Die durch x_1 und x_2 zu X bezw. T_2 gezogenen Parallelen schneiden auf $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ die Projektionen y_1 und y_2 des gesuchten Schnittpunktes aus. Eine Anwendung dieses Konstruktionsverfahrens soll in Aufgabe 87 gezeigt werden.

Figur 169.



Aufgabe 86. Die Aufgabe 85 ist zu lösen für den Fall, dass die gegebene Gerade senkrecht zur X-Achse steht.

Figur 170.

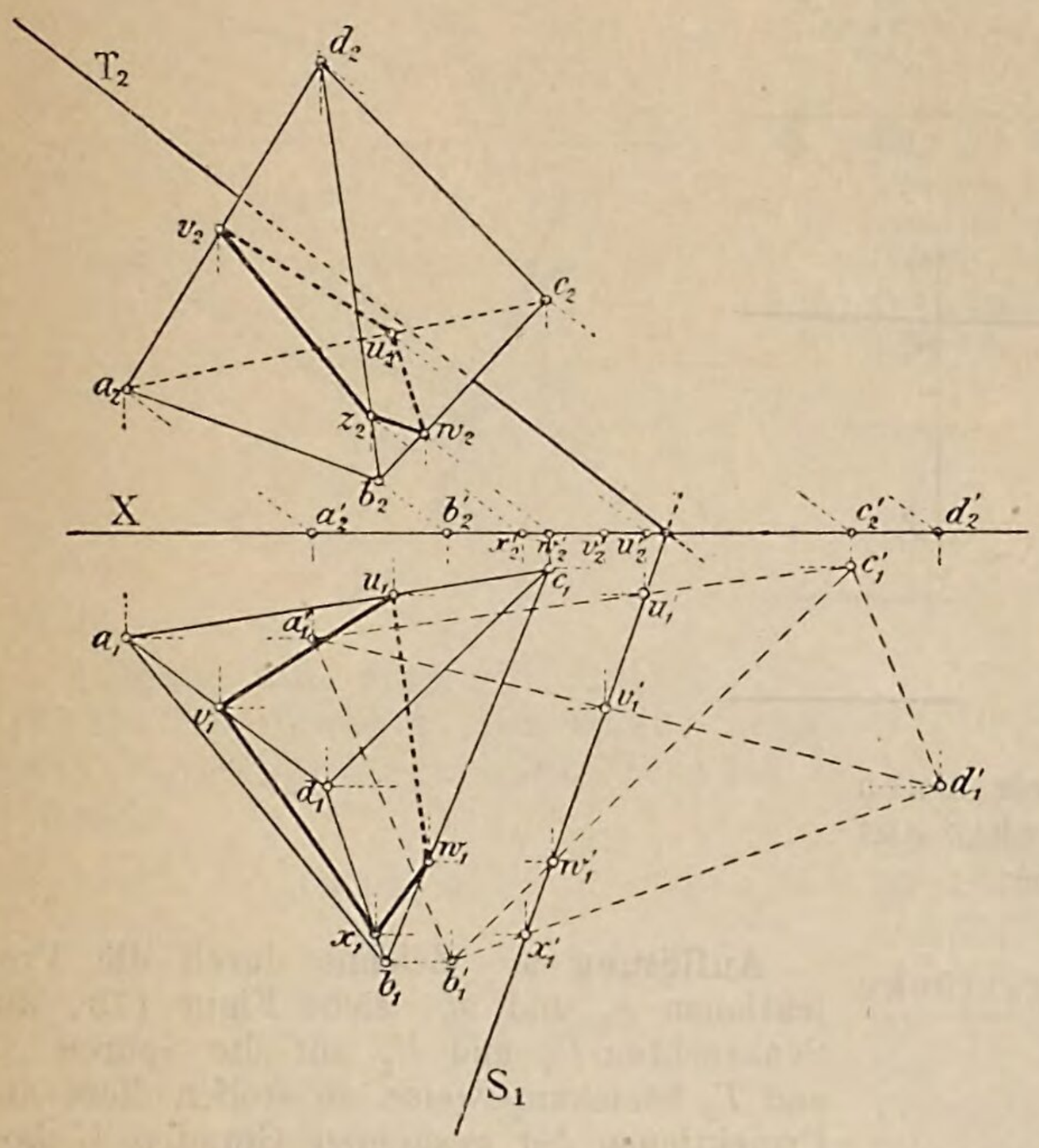


Auflösung. In diesem Falle könnte man die Aufgabe auf die Vorhergehende zurückführen mit Zuhilfenahme einer Projektion auf die **Pr. Eb.** E_3. Will man aber ohne dritte Projektion die Aufgabe lösen, so kann dies wie folgt geschehen:

Ist die Ebene durch die beiden Parallelen A und B, die Gerade aber durch die Punkte a und b bestimmt, so zeichne man durch die Punkte a und b zwei zueinander parallele Gerade C und D (in der Figur 170 wurden die Projektionen dieser Geraden der Einfachheit halber parallel zur X-Achse gewählt) und bestimme, wie in Aufgabe 85, die Schnittpunkte x und y von A und B mit der Ebene CD, so liefern die Verbindungslinien $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ auf $a_1 b_1$ bezw. $a_2 b_2$ die Projektionen z_1 und z_2 des Schnittpunktes z von ab mit Ebene AB, denn die beiden Geraden C und D bilden eine die Gerade ab enthaltende Ebene und xy ist ihre Schnittlinie mit der Ebene AB, daher z der Schnittpunkt von ab mit Ebene AB.

Aufgabe 87. Vier Punkte $abcd$ sind als die Eckpunkte eines Vierflächners (Tetraëder, siehe Erkl. 236) gegeben. Es soll der Schnitt dieses Körpers mit einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene konstruiert werden.

Figur 171.



Erkl. 236. Unter einem Vierflächner versteht man einen von vier Dreiecken begrenzten Körper.

Das Wort „Tetraëder“ stammt aus dem Griechischen (tedra, vier und hedra, Fläche), heisst also Vierflächner.

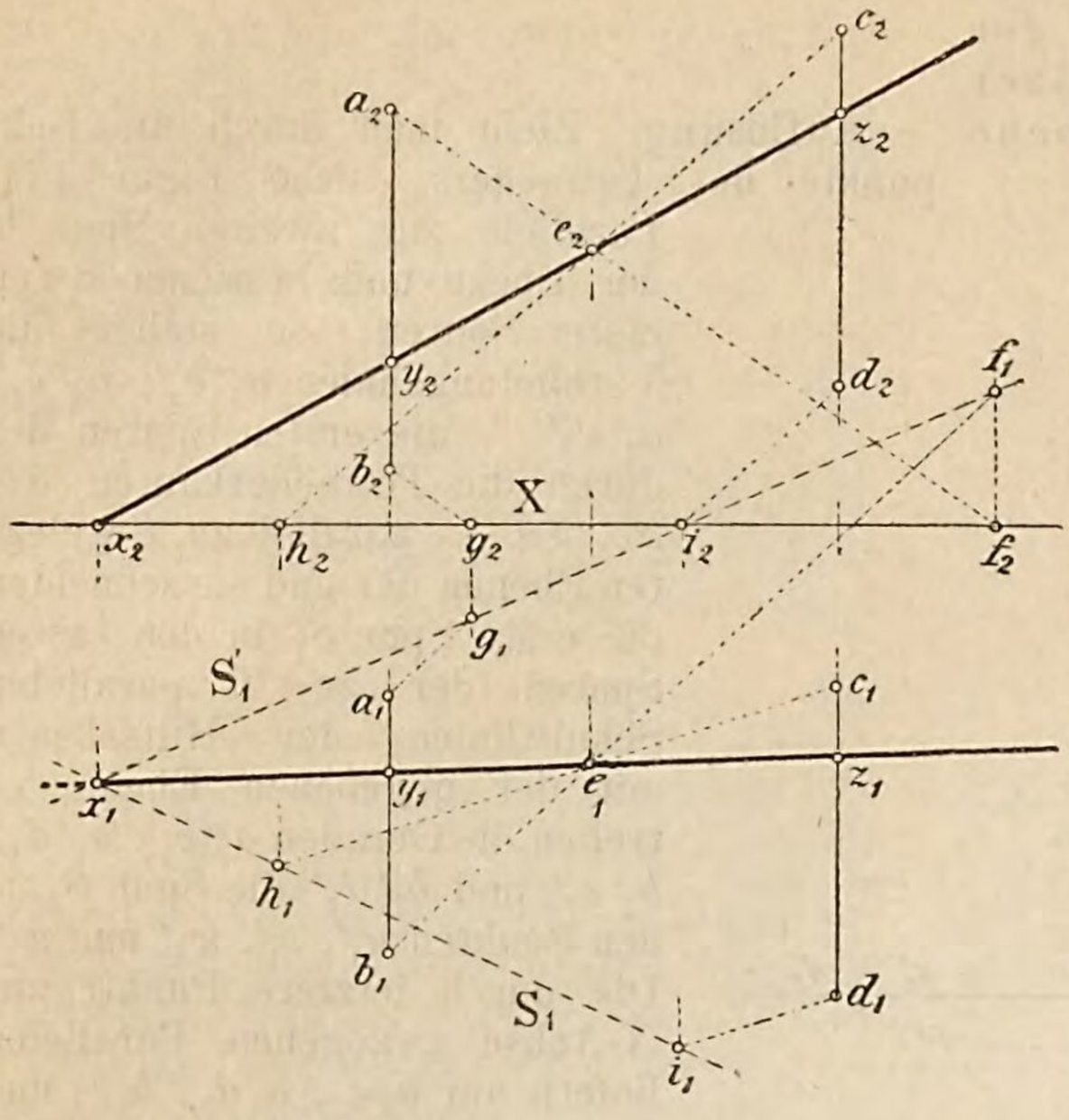
Aufgabe 88. Zwei zur X-Achse senkrechte Gerade ab und cd, sowie ein Punkt e sind gegeben. Man soll durch e eine Gerade zeichnen, welche die beiden Geraden ab und cd schneidet.

Auflösung. Zieht man durch die Eckpunkte des Tetraëders, siehe Figur 171, Parallele zur zweiten Spur T der Ebene und bestimmt deren erste Spuren, so stellen die Verbindungslinien $a_1'b_1'$, $a_1'c_1'$, $a_1'd_1'\cdots$ die ersten Spuren der durch die Tetraëderkanten ab, ac, $ad\cdots$ parallel zu T gelegten Ebenen dar und sie schneiden die erste Spur S_1 in den ersten Spuren der zu T parallelen Schnittlinien der Hilfsebenen mit der gegebenen Ebene; es treffen die Geraden $a_1'c_1'$, $a_1'd_1'$, $b_1'c_1'$ und $b_1'd_1'$ die Spur S_1 in den Punkten u_1', v_1', w_1' und x_1'. Die durch letztere Punkte zur X-Achse gezogenen Parallelen liefern auf a_1c_1, a_1d_1, b_1c_1 und b_1d_1 die Projektionen u_1, v_1, w_1 und x_1 der Eckpunkte der Schnittfigur von Ebene und Tetraëder. Die zweiten Projektionen bestimmen sich wie in Erkl. 235.

Bestimmt man die zweiten Projektionen mittels der Punkte $u_2\cdots$ und der Parallelen zu T_2, so erhält man als Probe für die Genauigkeit der Zeichnung die Bedingung, dass die Punkte u_2, v_2, w_2 und x_2 senkrecht über ihren ersten Projektionen u_1, v_1, w_1 u. x_1 liegen müssen.

Auflösung. Die gesuchte Gerade ist die Schnittlinie der beiden Ebenen abc und cde, siehe auch Auflösung zu Aufgabe 47. Um diese Schnittlinie am einfachsten zu erhalten, bestimme man die Spuren S_1 und S_1' der beiden Ebenen abe und cde mittels der Geraden ae und der durch b zu ihr gezogenen Parallelen, bezw. der Geraden ce und der zu letzterer Linie durch d gezogenen Pa-

Figur 172.



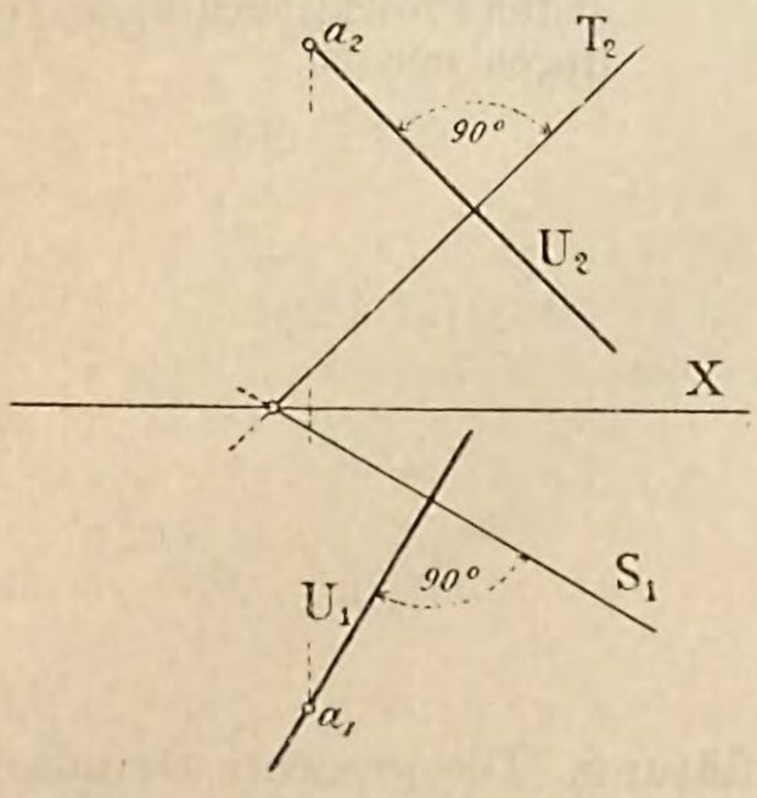
rallelen. Die beiden Spuren S_1 und S_1' treffen sich in einem Punkte x der ersten Projektion der Spur der gesuchten Geraden xe.

Aufgabe 89. Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Senkrechte auf eine Ebene fällen, wenn dieselbe:

a) durch ihre Spuren,

b) durch andere Bestimmungsstücke gegeben ist.

Figur 173.



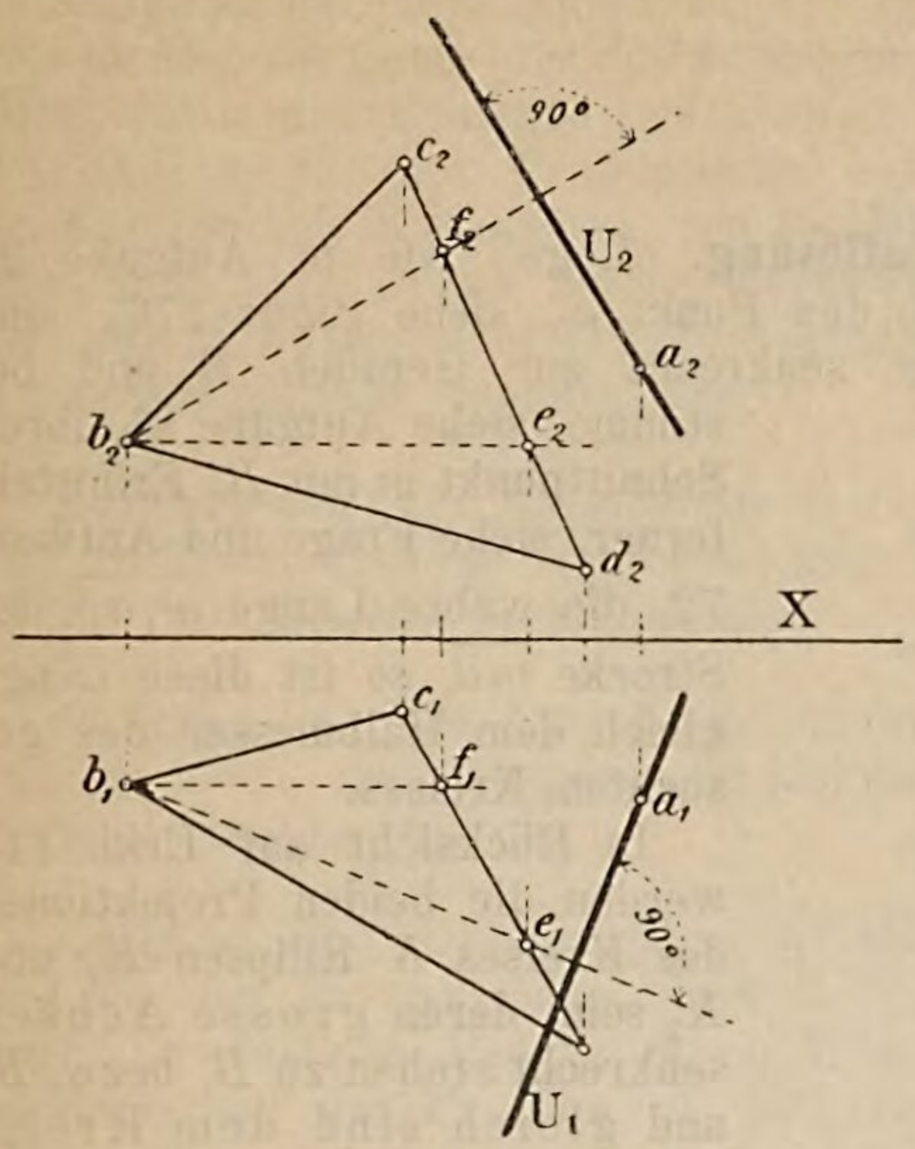
Auflösung a. Zeichne durch die Projektionen a_1 uud a_2, siehe Figur 173, die Senkrechten U_1 und U_2 auf die Spuren S_1 und T_2 beziehungsweise, so stellen diese die Projektionen der gesuchten Geraden U dar.

Auflösung b. Ist die Ebene durch andere Bestimmungsstücke, etwa durch drei nicht in einer Geraden befindlichen Punkte b, c und d, siehe Figur 174, gegeben, so verschaffe man sich die Richtungen der Spuren der Ebene und fälle auf dieselben von den Projektionen des gegebenen Punktes a Senkrechte.

Zu diesem Zwecke ziehe etwa durch b_2 eine Parallele zur X-Achse, bestimme ihren Schnittpunkt e_2 mit c_2d_2 und ermittele e_1 auf c_1d_1, so gibt b_1e_1 die Richtung der ersten Spur, desgleichen erhält man mittels einer Parallelen durch b_1 zur X-Achse den Schnittpunkt f_1 auf c_1d_1 und dessen zugehörige zweite Projektion f_2 auf c_2d_2 und damit in b_2f_2 die Richtung der zweiten Spur der Ebene. Die Senkrechten U_1 und U_2 durch a_1 und a_2 zu b_1e_1 bezw. b_2f_2 geben die Projektionen der gesuchten Geraden.

(Man löse die gleiche Aufgabe, für den Fall, dass die Ebene durch zwei sich schneidende

Figur 174.



oder parallele Gerade oder durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt gegeben ist.)

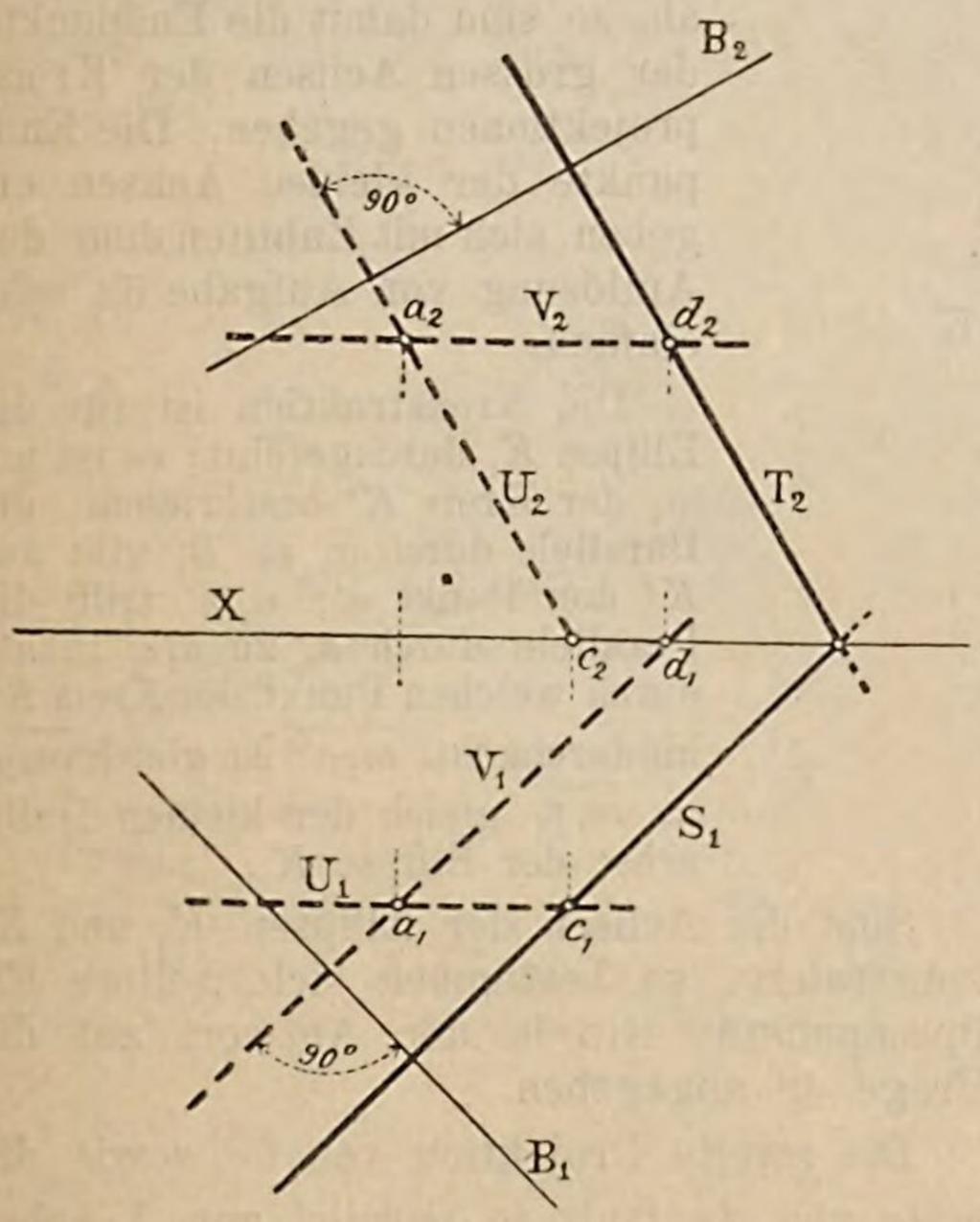
Im Falle die Ebene eine projizierende ist, läuft die Senkrechte zu ihr parallel zu derjenigen **Pr. Eb.**, zu welcher die gegebene Ebene senkrecht steht.

Die von der Projektion des Punktes auf die gleichnamige Projektion der Ebene, siehe Erkl. 65, gezogene Senkrechte gibt somit die Entfernung des Punktes von der Ebene in wahrer Grösse an.

Steht demnach die Ebene senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 bezw. E_2, so ist die Entfernung der ersten bezw. zweiten Projektion des Punktes von der gleichnamigen Projektion der Ebene (erste, bezw. zweite Spur) zugleich die Entfernung des Punktes im Raume von der Ebene.

Aufgabe 90. Man soll durch einen gegebenen Punkt a eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Geraden B legen.

Figur 175.



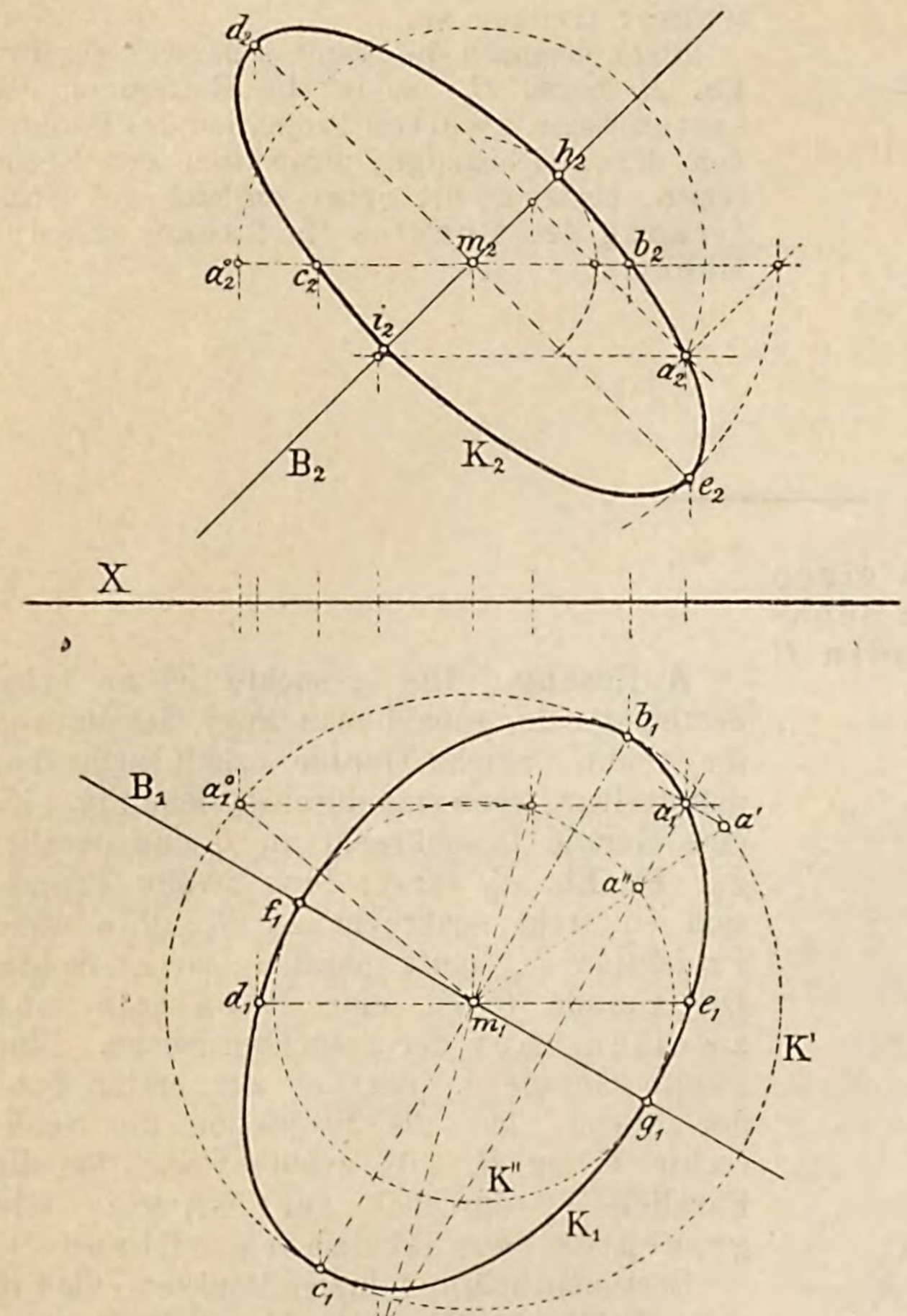
Auflösung. Die gesuchte Ebene wird bestimmt sein, sobald man zwei Gerade von ihr kennt. Solche Gerade erhält man aber unmittelbar, wenn man durch a, siehe Fig. 175, eine Gerade U senkrecht zu B und parallel zur **Pr. Eb.** E_2 führt; ihre zweite Projektion U_2 steht senkrecht zu B_2, ihre erste Projektion U_1 läuft parallel zur X-Achse. Die Gerade U ist eine Parallele zur zweiten Spur der gesuchten Ebene. Eine zweite Gerade V, parallel zur ersten Spur der Ebene, hat als Projektion die Senkrechte V_1 zu B_1, als zweite Projektion die Parallele V_2 durch a_2 zur X-Achse. Die gesuchte Ebene ist daher die Ebene UV.

Bestimmt man nun in den Punkten c und d, siehe Erkl. 202, die erste bezw. zweite Spur von U und V, so geht durch c_1 die erste, durch d_2 die zweite Spur der Ebene und zwar erstere parallel zu U_1, letztere parallel zu V_2.

Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung müssen sich die Linien S_1 und T_2 in einem Punkte der X-Achse begegnen. Man kann daher auch zur Bestimmung der Ebene nur eine der Geraden U oder V, wie angegeben, konstruieren, ihre zugehörige Spur bestimmen und durch letztere die entsprechende Spur der Ebene zeichnen. Durch ihren Schnitt mit der X-Achse geht die andere Spur, senkrecht zur gleichnamigen Projektion der gegebenen Geraden.

Aufgabe 91. Man soll die Projektionen K_1 und K_2 eines Kreises K zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt a geht, dessen Ebene auf einer Geraden B senkrecht steht und dessen Mittelpunkt auf B liegt, vergleiche auch Aufgabe 66.

Figur 176.



Auflösung. Lege, wie in Aufgabe 90 durch den Punkt a, siehe Figur 176, eine Ebene senkrecht zur Geraden B und bestimme, siehe Aufgabe 85, ihren Schnittpunkt m mit B. Ermittele ferner, siehe Frage und Antwort 72, die wahre Länge $\overline{m_1 a_1^0}$ der Strecke $\overline{ma}$, so ist diese Länge gleich dem Halbmesser des gesuchten Kreises.

In Rücksicht auf Erkl. 142 werden die beiden Projektionen des Kreises K Ellipsen K_1 und K_2 sein, deren grosse Achsen senkrecht stehen zu B_1 bezw. B_2 und gleich sind dem Kreishalbmesser.

Die kleinen Achsen fallen mit B_1 und B_2 zusammen. Zieht man daher durch m_1 und m_2 Senkrechte zu B_1 und B_2 und trägt von m_1 und m_2 aus auf diesen Senkrechten die Strecken $\overline{m_1 b_1} = \overline{m_1 c_1} = \overline{m_2 d_2} = \overline{m_2 e_2} = \overline{m_1 a_1^0}$ ab, so sind damit die Endpunkte der grossen Achsen der Kreisprojektionen gegeben. Die Endpunkte der kleinen Achsen ergeben sich mit Zuhilfenahme der Auflösung von Aufgabe 63 sehr einfach.

Die Kronstruktion ist für die Ellipse K_1 durckgeführt; es ist um m_1 der Kreis K' beschrieben; die Parallele durch a_1 zu B_1 gibt auf K' den Punkt a'; $a_1 m'$ trifft die Parallele durch a_1 zu $b_1 c_1$ in a'', durch welchen Punkt der Kreis K'' hindurchgeht. $\overline{m_1 a''}$ ist gleich $\overline{m_1 g_1} = m_1 f_1$ gleich der kleinen Halbachse der Ellipse K_1.

Sind die Achsen der Ellipsen K_1 und K_2 konstruiert, so bestimmen sich weitere Ellipsenpunkte, wie in der Antwort auf die Frage 49 angegeben.

Die zweite Projektion von $\overline{bc}$ sowie die erste von $\overline{de}$ läuft je parallel zur X-Achse und auf diesen Parallelen liegen die zweiten bezw. ersten Projektionen b_2, c_2, d_1, e_1 der Punkte b, c, d und e, was als Probe für die Genauigkeit der Zeichnung gelten mag.

γ) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 92. Die Aufgaben 41, 42, 43, 44, 45 und 46 unter der Voraussetzung zu lösen, dass die Raumgrössen Punkt und Gerade durch ihre Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gegeben, von der Ebene aber stets ihre erste und zweite Spur oder die in Antwort auf Frage 26 genannten Bestimmungsstüche bekannt sind.

Aufgabe 93. Die Aufgabe 89 ist für den Fall zu lösen, dass die Spuren der gegebenen Ebene zur X-Achse parallel laufen.

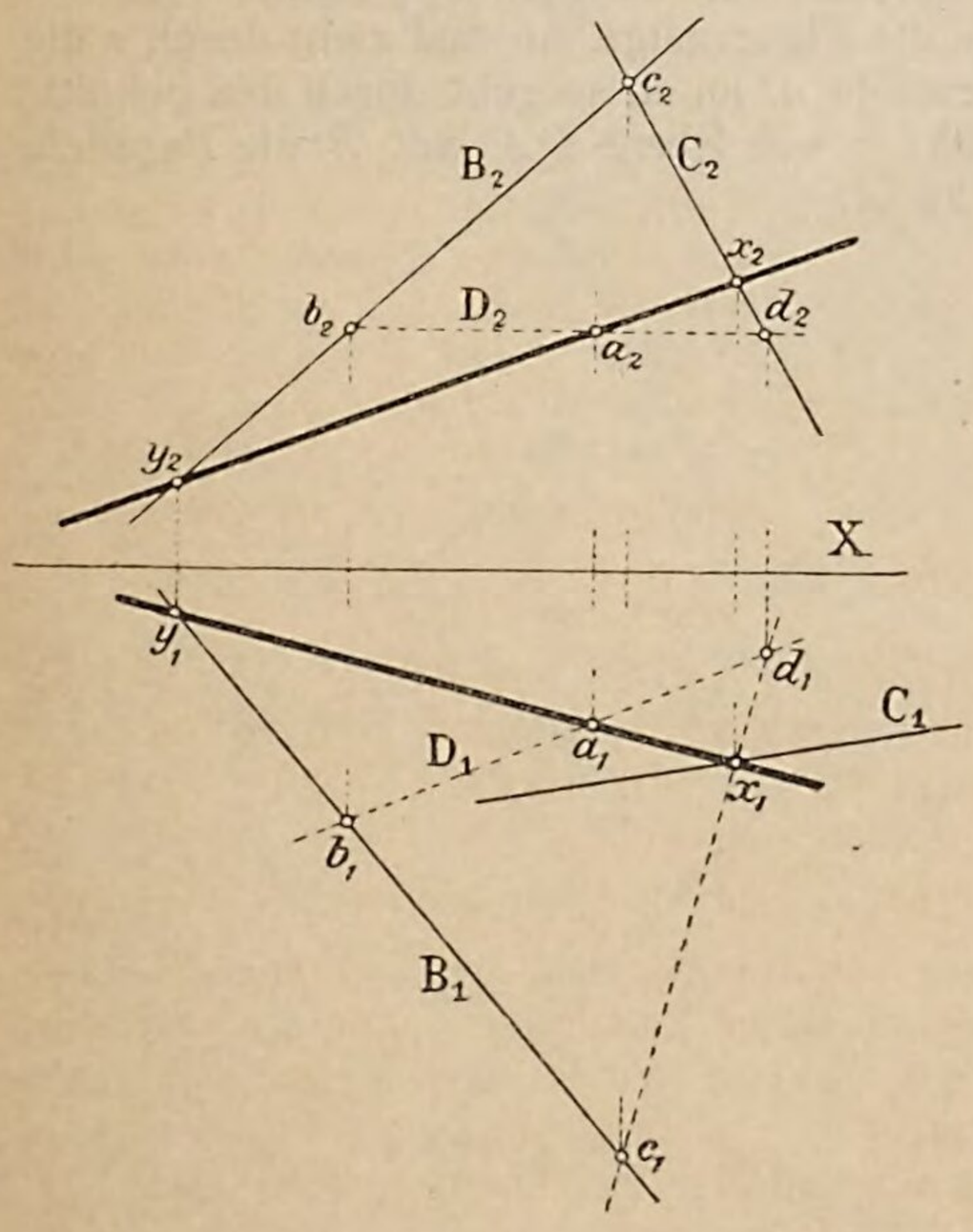
Aufgabe 94. Die Aufgabe 90 ist für den Fall zu lösen, dass die gegebene Gerade zur X-Achse senkrecht steht.

Aufgabe 95. Die Aufgaben 67 und 68 sind für den Fall zu lösen, dass die in Betracht kommenden Punkte durch ihre Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gegeben sind.

δ) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 96. Die Aufgabe 47: Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche zwei gegebene Gerade B und C schneidet, ist für den Fall zu lösen, dass die in Betracht kommenden Raumgrössen durch ihre Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gegeben sind.

Figur 177.



Auflösung. In der Auflösung der Aufgabe 47 erhält man die gesuchte Gerade als Schnittlinie der beiden Ebenen aB und aC. Man kann jedoch die gesuchte Gerade auch auffassen als die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Geraden C und der Ebene aB mit dem gegebenen Punkte.

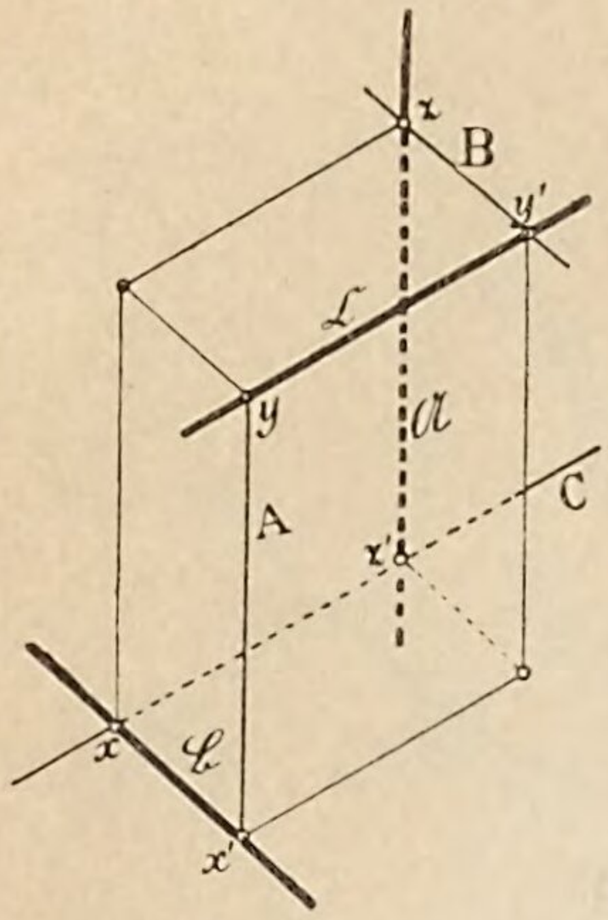
Man gewinnt folgende

Konstruktion: Ziehe durch den gegebenen Punkt a eine beliebige Gerade D der Ebene aB, etwa gleich so, dass D_2 parallel zur X-Achse läuft; bestimme D_1 und hierauf den Schnittpunkt x der Geraden C mit der Ebene BD, siehe die Aufgabe 85. Die Verbindungslinie ax ist die gesuchte Gerade.

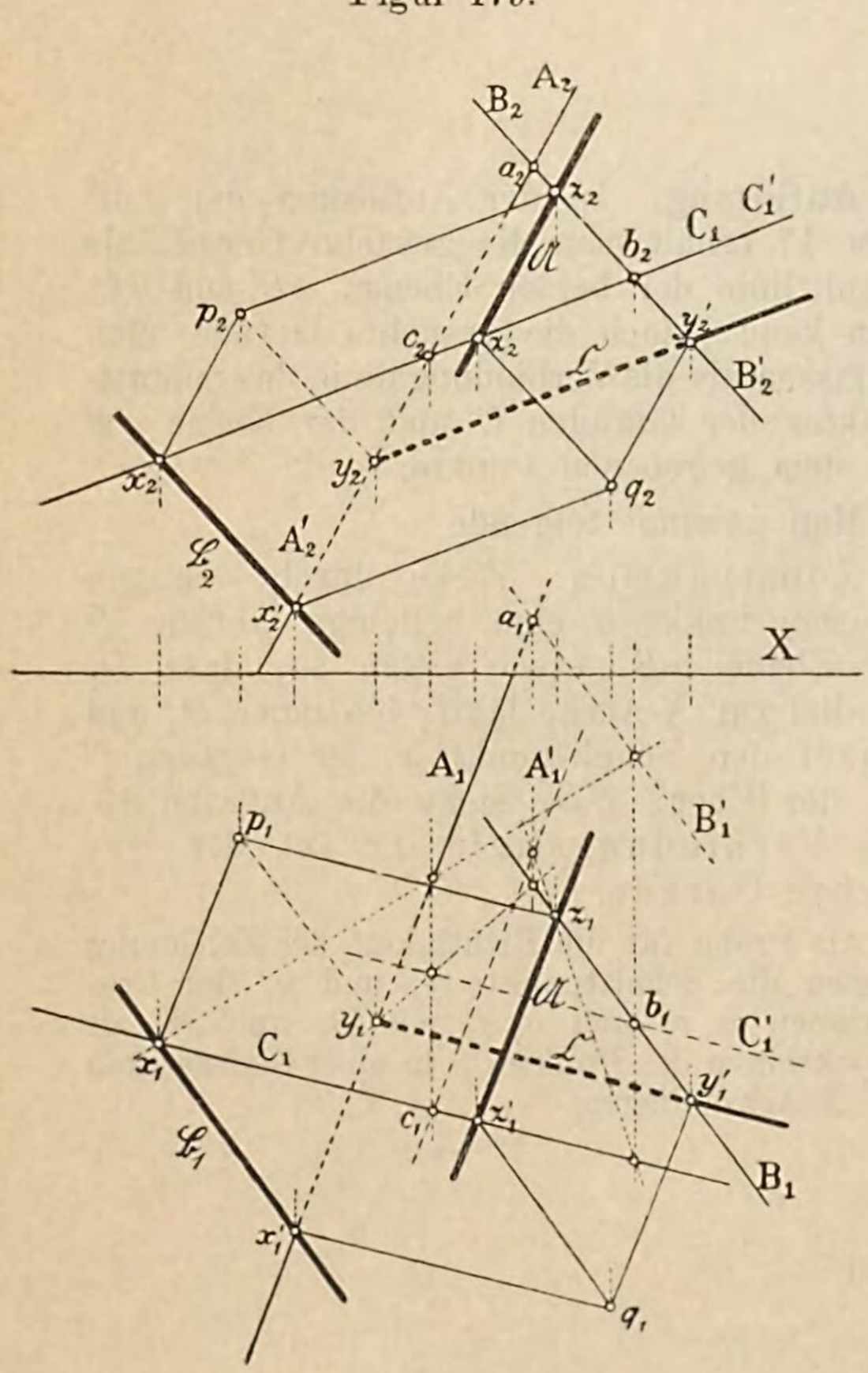
Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung müssen die Schnittpunkte y_1 und y_2 der Projektionen a_1x_1 und a_2x_2 mit B_1 und B_2 als Projektionen des Punktes y in einer Senkrechten zur X-Achse liegen.

Aufgabe 97. Drei Gerade A, B, C sind durch ihre Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gegeben. Es ist zu je einer der Geraden eine Gerade zu zeichnen, welche die beiden anderen Geraden schneidet, siehe auch Aufgabe 48.

Figur 178.



Figur 179.



Auflösung. Denkt man sich durch die Gerade A, siehe Figur 178, eine Ebene gelegt parallel zur Geraden B, so gibt der Schnittpunkt x dieser Ebene mit der Geraden C einen Punkt der Geraden $\mathfrak{B}$, welche zu B parallel läuft und die Geraden C und A in den Punkten x und x' schneidet.

Desgleichen wird eine durch B parallel zu C geführte Ebene die Gerade A in einem Punkte y der zu C parallelen Geraden $\mathfrak{C}$ treffen, die mit den Geraden A und B die Punkte y und y' gemein hat.

Endlich liefert eine durch C parallel zu A gehende Ebene einen Schnittpunkt z auf B der zu A parallelen Geraden $\mathfrak{A}$, welche B und C in den Punkten z und z' trifft.

Man erhält folgende

Konstruktion: Wähle auf A, siehe Figur 179, einen beliebigen Punkt a, zweckmässig nimmt man als zweite Projektion a_2 den Schnittpunkt von A_2 und B_2, führe durch a eine Parallele B' zu B; B'_2 deckt sich mit B_2. Bestimme den Schnittpunkt x von Ebene AB' mit C, siehe Aufgabe 85; durch x geht die Parallele $\mathfrak{B}$ zu B.

In gleicher Weise wähle auf B den Punkt b, so dass b_2 mit B_2 und C_2 sich deckt; ziehe durch b die Parallele C' zu C und ermittele den Schnitt y von Ebene BC' mit A. Durch y geht $\mathfrak{C}$ parallel zu C.

Nimmt man endlich den Punkt c auf C, wie die Figur zeigt, an und zieht durch c die Parallele A' zu A, so geht durch den Schnittpunkt z von Ebene CA' mit B die Parallele $\mathfrak{A}$ zu A.

Erkl. 237. Die sechs Geraden A, $\mathfrak{B}$, C, $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{C}$ begrenzen ein unebenes (windschiefes) Sechsseit, siehe Erkl. 237 a, und gehören als Kanten einem Parallelepipedon derart an, dass die übrigen beiden nicht durch den Schnitt der eben genannten Kanten gebildeten Ecken p und q auf einer Hauptdiagonale des Parallelepipedons liegen. Solche Kanten, wie die oben angeführten, nennt man kurzweg die Trennungskanten des Parallelepipedons.

Erkl. 237 a. Unter einem n-Seit versteht man eine von n-Geraden begrenzte Figur. Liegen die begrenzenden Geraden nicht alle in einer Ebene, so heisst die Figur ein unebenes oder windschiefes n-Seit.

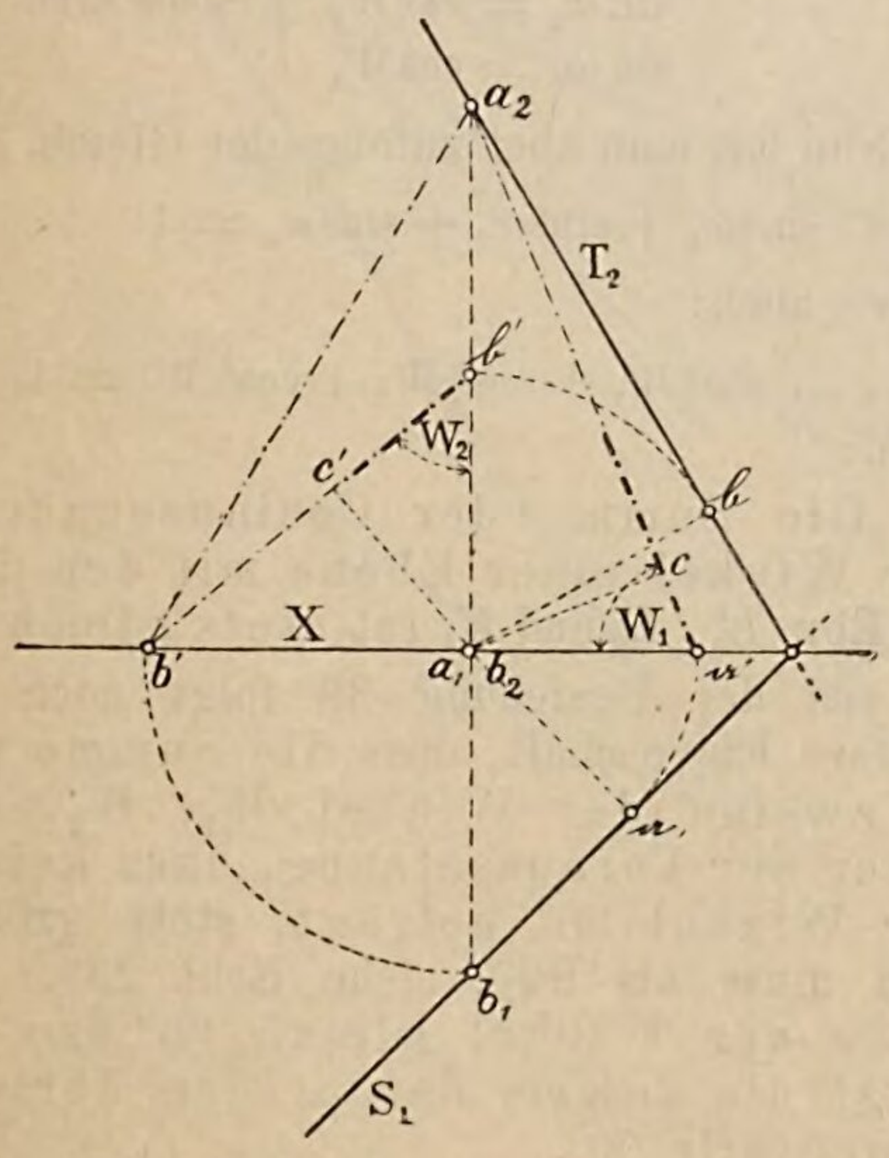
Erkl. 238. Die in der Auflösung der Aufgabe 95 angeführte Konstruktion lässt noch eine Vereinfachung zu in Rücksicht auf das in Erkl. 237 Gesagte.

Hat man nämlich die Punkte x und y, wie angegeben, konstruiert, so sind damit zugleich die Punkte z und z' bestimmt, denn die durch x und y gezogenen Parallelen zu A und B treffen sich in p, während die Parallelen durch x' und y' zu C und A den Punkt q gemeinsam haben. Eine Parallele durch p zu C liefert auf B den Punkt z, eine Parallele durch q zu B schneidet C in z'. Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung muss zz' d. h. $\mathfrak{A}$ parallel zu A sein.

ε) Ueber die Bestimmung der Winkel einer Ebene mit den Pr. Ebn.

Frage 79. Wie ermittelt man in der Projektionszeichnung die wahre Grösse der Winkel W_1 und W_2 einer Ebene mit den **Pr. Ebn.**

Figur 180.

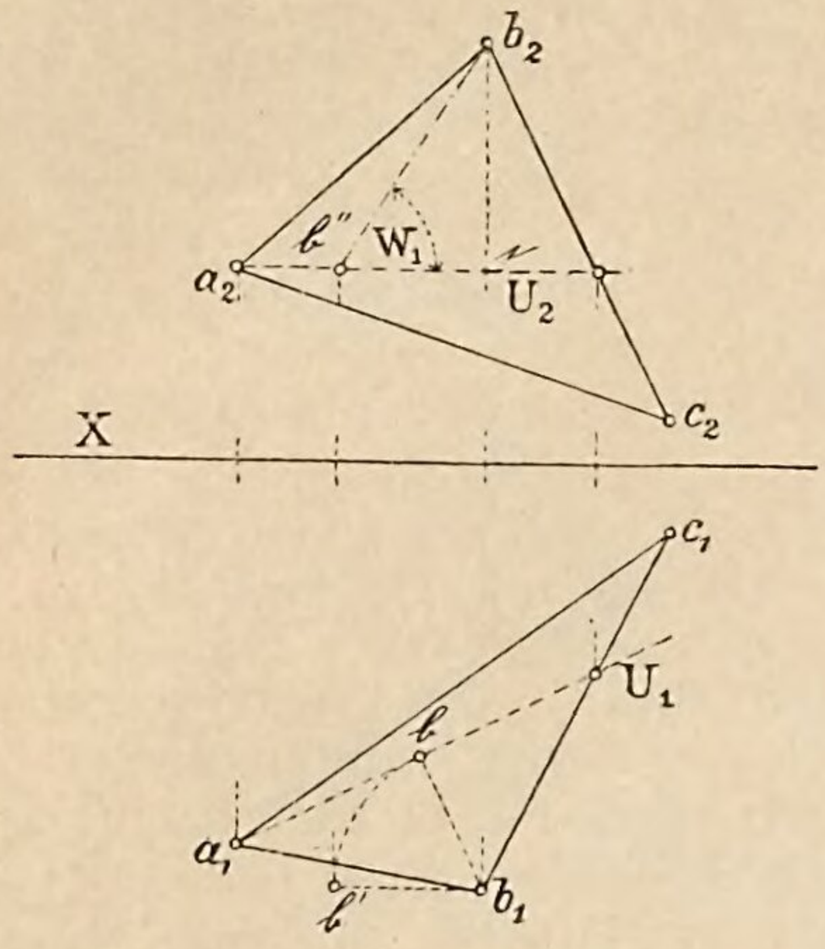


Antwort a. Ist die Ebene etwa durch ihre Spuren S und T, siehe Figur 180, gegegeben, so hat man nach Erkl. 74 nur durch einen, beliebig in der Ebene zu wählenden Punkt, eine Neigungslinie zur ersten und zweiten Spur ziehen, so schliesst erstere mit ihrer ersten Projektion den Winkel W_1, letztere mit ihrer zweiten Projektion den Winkel W_2 ein.

Wählt man demnach auf T_2 den Punkt a_2 willkürlich und ermittelt seine erste Projektion a_1 auf X, zieht $a_1\mathfrak{a}$ senkrecht zu S_1 und konstruiert das rechtwinklige Dreieck $a_1\mathfrak{a}'a_2$, so dass $\overline{a_1\mathfrak{a}'} = \overline{a_1\mathfrak{a}}$ ist, so enthält dasselbe bei $\mathfrak{a}'$ den Winkel W_1 der Ebene ST mit der **Pr. Eb.** E_1, denn das genannte Dreieck ist kongruent mit dem Konstruktionsdreieck $a\,a_1\,\mathfrak{a}$, siehe Erkl. 77, des Punktes a.

Fasst man nunmehr den Punkt a_1 als zweite Projektion b_2 eines Punktes b auf, so liegt b_1 auf S_1; die durch b_2 zu T_2 gezogene Senkrechte $b_1\mathfrak{b}$ liefert die Projektion der zu T gehörigen Neigungslinie und es erscheint der Winkel W_2 in dem rechtwinkligen Dreiecke $b_2b'\mathfrak{b}'$ bei $\mathfrak{b}'$, wenn $\overline{b_2\mathfrak{b}'} = \overline{b_2\mathfrak{b}}$ und $\overline{b_2b'} = \overline{b_2b_1}$ gemacht wird.

Figur 181.



Bestimme in gleicher Weise mit Zuhilfenahme der dritten Spur der Ebene ihren Neigungswinkel W_3 mit der **Pr. Eb.** E_3.

Antwort b. Ist die Ebene durch anderweitige Bestimmungsstücke, etwa durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte a, b, c, siehe Figur 181, gegeben, so lassen sich die Winkel W_1 und W_2 auch ohne Kenntnis der Spuren der Ebene einfach wie folgt ermitteln: Zeichne, wie in Auflösung b. der Aufgabe 89, durch den Punkt a eine Spurparallele U der Ebene und fälle von b_1 aus die Senkrechte $b_1\mathfrak{b}$ zu U_1. Der gesuchte Winkel W_1 liegt nun der Kathete $\overline{b_2\mathfrak{c}}$ in dem rechtwinkligen Dreieck $b_2\mathfrak{c}\mathfrak{b}''$ gegenüber, in welchem $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{b}''} = \overline{b_1\mathfrak{b}'} = \overline{b_1\mathfrak{b}}$ gemacht wurde.

Ermittele in ähnlicher Weise den Winkel W_2.

***Frage 80.** Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Grösse der Winkel W_1, W_2 und W_3 einer Ebene mit den drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3?

Antwort. Denkt man sich eine zur Ebene senkrechte Gerade, welche mit den **Pr. Ebn.** die Winkel w_1, w_2 und w_3 einschliesst, so besteht, siehe Erkl. 86, zwischen den Winkeln w_1, w_2, w_3 und W_1, W_2, W_3 der Zusammenhang:

$$W_1 = 90^0 - w_1$$
$$W_2 = 90^0 - w_2$$
$$W_3 = 90^0 - w_3$$

daher is auch:

$$\left.\begin{aligned} \sin w_1 &= \cos W_1 \\ \sin w_2 &= \cos W_2 \\ \sin w_3 &= \cos W_3 \end{aligned}\right\} \text{(Siehe Erkl. 239)}$$

Nun hat man aber zufolge der Gleich. 38):

$$\sin^2 w_1 + \sin^2 w_2 + \sin^2 w_3 = 1$$

daher auch:

39) . . . $\cos^2 W_1 + \cos^2 W_2 + \cos^2 W_3 = 1$

d. h.:

„Die Summe der Cosinusquadrate der Winkel einer Ebene mit den drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 ist stets gleich 1."

Aus der Beziehung 39 folgt noch die weitere Eigenschaft, dass die Summe von je zweien der Winkel W_1, W_2, W_3, unter der Voraussetzung, dass keiner der Winkel 90^0 beträgt, **stets grösser sein muss als 90^0**, siehe Erkl. 237. Ist einer der Winkel gleich 90^0, so beträgt die Summe der beiden übrigen gleichfalls 90^0.

***Erkl. 239.** In Kleyer's Lehrbuch der Goniometrie wird gezeigt, dass wenn zwei Winkel W_1 und W_2 sich zu 90^0 ergänzen, die Beziehungen stattfinden:

$$\sin W_1 = \cos W_2$$
$$\sin^2 W_1 + \cos^2 W_2 = 1$$

Erkl. 240. Dass die Summe der Winkel W_1 und $W_2 > 90^0$ ist, lässt sich auch unmittelbar aus der Figur 180 ablesen, denn betrachtet man die beiden rechtwinkligen Dreiecke $a_2 b_2 \mathfrak{a}'$ und $a_2 b_2 b'$ mit gemeinsamer Kathete $\overline{a_2 b_2}$, so ist, weil $\overline{b_2 \mathfrak{a}'} < \overline{b_2 b'}$ ist, $\sphericalangle W_1 > \sphericalangle a_2 b' b_2$; desgleichen ist auch in den beiden rechtwinkligen Dreiecken $b_2 b' \mathfrak{b}'$, und $b_2 b' a_2$ mit gemeinsamer Kathete $\overline{b_2 b'}$, da $\overline{b_2 \mathfrak{b}'} < \overline{b_2 a_2}$ ist, auch:

$$\sphericalangle W_2 > \sphericalangle b_2 a_2 b'$$

folglich auch:

$$\sphericalangle W_1 + \sphericalangle W_2 > \sphericalangle a_2 b' b_2 + \sphericalangle b_2 a_2 b'$$

d. h.: $$> 90^0$$

Es ist somit:

$$W_1 + W_2 > 90^0$$
$$W_1 + W_3 > 90^0$$
$$W_2 + W_3 > 90^0$$

daher auch:

$$W_1 + W_2 + W_3 > \frac{3 \times 90^0}{2}$$

d. h.:

$$W_1 + W_2 + W_3 > 135^0$$

Man gewinnt folgende Sätze:

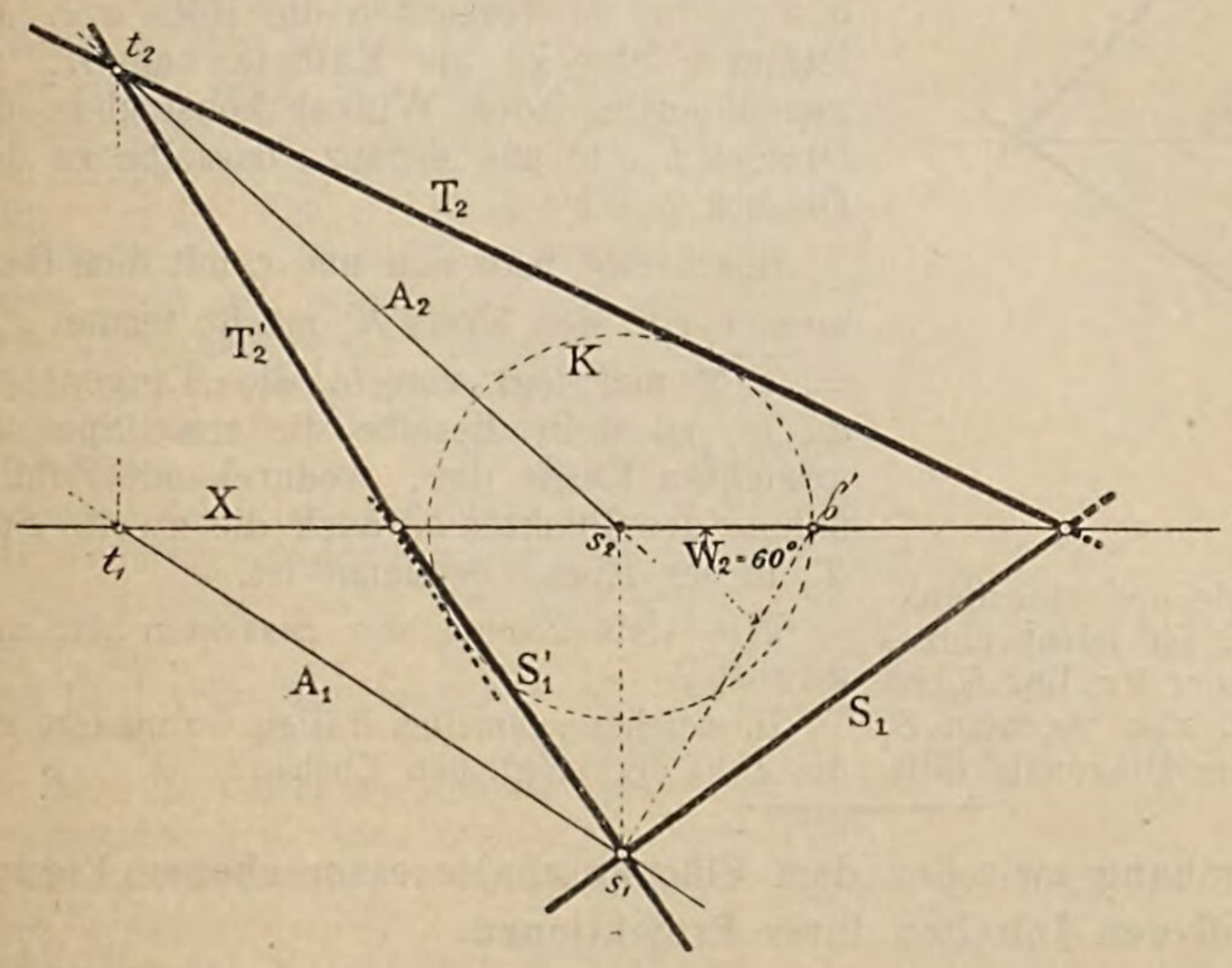
„Eine gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 beliebig geneigte Ebene schliesst mit denselben Winkel W_1 und W_2 ein, deren Summe stets grösser ist als 90^0. Nur für den Fall die Ebene parallel zur X-Achse läuft, ergänzen sich ihre Winkel mit den **Pr. Ebn.** E_1 u. E_2 zu 90^0."

„Die Summe der Winkel W_1, W_2, W_3 einer beliebigen Ebene mit den drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 ist **stets** grösser als 135^0."

ζ) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 98. Eine Gerade A ist durch ihre Projektionen A_1 und A_2 gegeben. Man soll durch A eine Ebene legen, welche mit der **Pr. Eb.** E_2 einen Winkel $W_2 = 60^0$ einschliesst. Vergleiche auch Aufgabe 19.

Figur 182.



Auflösung. Bestimme zunächst die Spuren s und t von A, siehe Figur 182, sowie das Konstruktionsdreieck des Punktes s, indem man durch s_1 eine Gerade $s_1 \mathfrak{s}'$ unter dem Winkel $W_2 = 60^0$ gegen die X-Achse geneigt zieht.

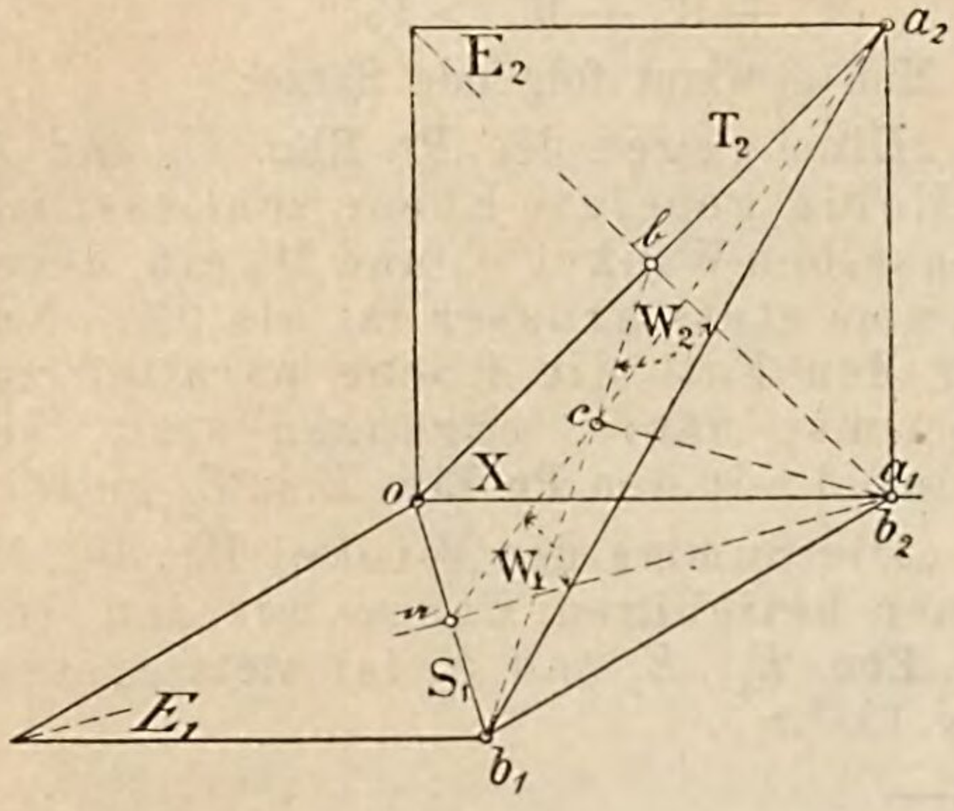
Die zweite Spur T_2 der gesuchten Ebene ist eine Tangente durch t_2 an den um s_2 mit einem Halbmesser gleich $\overline{s_2 \mathfrak{s}'}$ beschriebenen Kreis K, siehe Erkl. 101, die erste Spur S_1 der Ebene geht durch s_1 und durch den Schnittpunkt von T_2 mit der X-Achse.

Da es im allgemeinen zwei Tangenten von t_2 an K gibt, so sind auch zwei Ebenen der verlangten Art möglich.

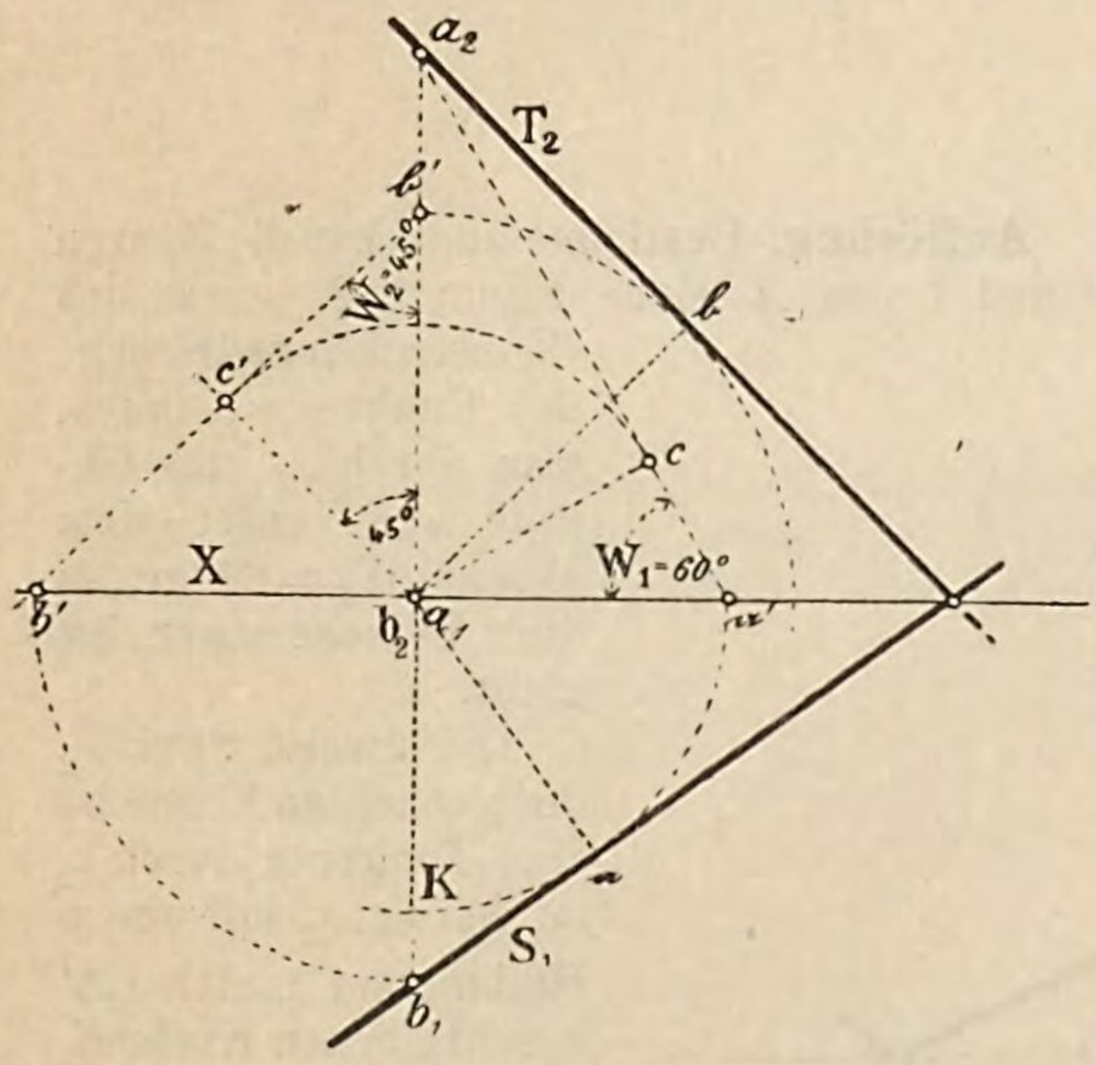
In welchem Falle gibt es nur eine Ebene und wann wird die Aufgabe unmöglich? Siehe Erkl. 104.

Aufgabe 99. Man soll durch einen gegebenen Punkt a eine Ebene legen, welche mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 die gegebenen Winkel $W_1 = 60^0$ und $W_2 = 45^0$ (siehe die Antwort auf die Frage 80) einschliesst.

Figur 183.



Figur 184.



Erkl. 241. Dass die Linie $a_1\mathfrak{a}$ eine Senkrechte zur Spur S_1 darstellt, ist leicht einzusehen, denn die Begrenzung der **Pr. Eb.** E_1 ist in Wirklichkeit ein Quadrat, von welchem S_1 in die eine, $a_1\mathfrak{a}$ in die andere Diagonale fällt.

Auflösung. Denkt man sich, siehe die Anschauungsfigur 183, die Ebene $a_2 o b_1$ als die gesuchte, so erhält man ihre Winkel mit den **Pr. Ebn.** an den Ecken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der rechtwinkligen Dreiecke $a_1\mathfrak{a}a_2$ und $b_1\mathfrak{b}b_2$, welche in den durch die Senkrechten $a_1\mathfrak{a}$ und $b_2\mathfrak{b}$ zu den Spuren S_1 und T_2 gelegten projizierenden Ebenen zu E_1 bezw. E_2 sich befinden, siehe Erkl. 241. Die Linien $a_2\mathfrak{a}$ und $b_1\mathfrak{b}$ stellen die Schnittlinien der eben genannten projizierenden Ebenen mit der gegebenen Ebene dar; sie treffen sich in einem Punkte c so, dass die Verbindungslinie $a_1 c$ bezw. $b_2 c$ als Schnittlinie der beiden projizierenden Ebenen senkrecht zur gegebenen Ebene steht. Diese Linie ist gemeinschaftliche Höhe in den oben genannten rechtwinkligen Dreiecken $a_1\mathfrak{a}a_2$ und $b_2\mathfrak{b}b_1$.

Letztere Dreiecke stimmen aber überein mit den Dreiecken $a_1\mathfrak{a}'a_2$ und $b_2\mathfrak{b}'b'$ der Figur 180. Ist eines dieser Dreiecke konstruiert, so kennt man auch in dem anderen die zur Hypotenuse gehörige Höhe, sowie einen Winkel und damit das Dreieck selbst.

Man erhält folgende

Konstruktion: Lege der Einfachheit halber die X-Achse durch die erste Projektion a_1, siehe Figur 184, des Punktes a, konstruiere mittels $\overline{a_2 a_1}$ und W_1 das Dreieck $a_1\mathfrak{a}'a_2$ und in demselben die Höhe $\overline{a_1 c}$. Mit letzterer Strecke als Kathete und W_2 als gegenüberliegenden Winkel konstruiere das Dreieck $b_2 c'\mathfrak{b}'$ und ergänze dasselbe zu dem Dreieck $b_2 b'\mathfrak{b}'$.

Beschreibt man nun um a_1 mit dem Halbmesser $\overline{a_1\mathfrak{a}'}$ den Kreis K, macht ferner $\overline{a_1 b_1} = \overline{a_1 b'}$ und legt von b_1 die Tangente S_1 an K, so stellt dieselbe die erste Spur der gesuchten Ebene dar, wodurch mit Zuhilfenahme des Punktes a_2 auch die zweite Spur T_2 dieser Ebene bestimmt ist.

Wie viele Ebenen der gesuchten Art sind möglich?

In welchen speziellen Fällen vermindert sich die Zahl der möglichen Ebenen?

η) Ueber den Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalte einer ebenen Figur und den Inhalten ihrer Projektionen.

***Frage 81.** Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Inhalte F einer ebenen Figur und den Inhalten F_1, F_2, F_3 ihrer Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2, E_3?

Antwort. Nach Gleichung 38) besteht die Beziehung:

$$F_1 = F \times \cos W_1$$

Demgemäss werden auch die weiteren Beziehungen Gültigkeit haben, nämlich:

$$F_2 = F \times \cos W_2$$

und

$$F_3 = F \times \cos W_3$$

wobei W_1, W_2 und W_3 die Winkel der Ebene der Figur mit den **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 bezeichnen.

Aus den eben genannten Gleichungen folgt ferner:

$$F_1^2 = F^2 \times \cos^2 W_1$$
$$F_2^2 = F^2 \times \cos^2 W_2$$
$$F_3^2 = F^2 \times \cos^2 W_3$$

Die Addition dieser drei Gleichungen ergibt die weitere Beziehung:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F^2 \times (\cos^2 W_1 + \cos^2 W_2 + \cos^2 W_3)$$

welche, in Rücksicht auf Gleichung 39), in die folgende übergeht:

40) . . . $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F^2$

Erkl. 242. Nebenstehende Antwort lässt sich als Satz so aussprechen:

„Die Quadratsumme der Inhalte der Projektionen einer ebenen Figur auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 ist gleich dem Quadrate des Inhaltes der Figur."

---

9) Ueber die Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur, bezw. das Umlegen einer Ebene in die Pr. Ebn. E_1 und E_2.

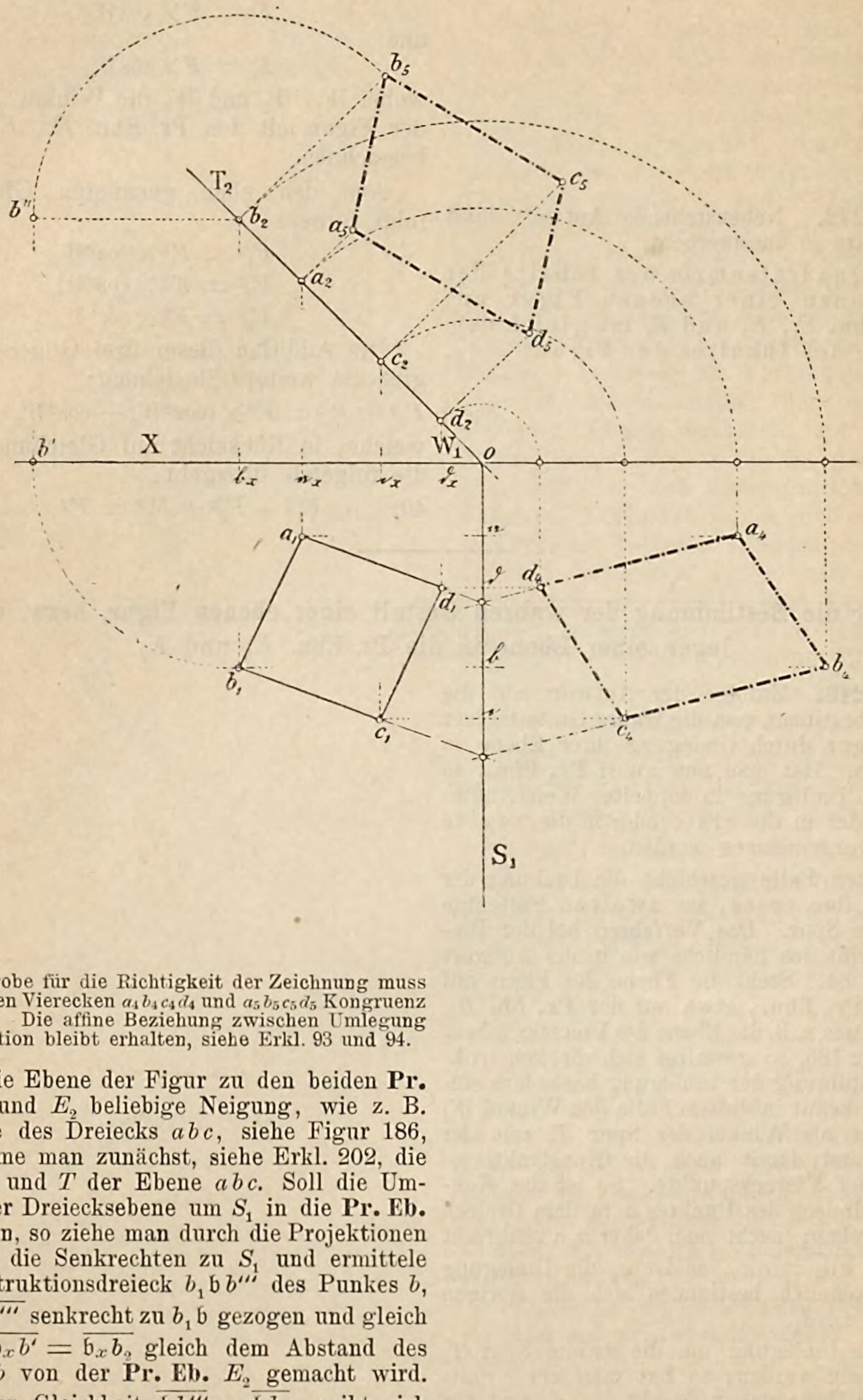
Erkl. 243. Zufolge der Antwort auf die Frage 33 bestimmt man die wahre Gestalt einer ebenen Figur durch Umlegung ihrer Ebene in die **Pr. Eb.** Hat man nun zwei **Pr. Ebn.,** so kann diese Umlegung in doppelter Weise, nämlich entweder in die erste oder in die zweite **Pr. Eb.,** vorgenommen werden.

Im ersten Falle geschieht die Drehung der Ebene um ihre erste, im zweiten Falle um ihre zweite Spur. Das Verfahren bei der Umlegung bleibt das nämliche wie in der Antwort auf Frage 34. Steht die Ebene der Figur auf einer der **Pr. Ebn.,** etwa auf der **Pr. Eb.** E_2, senkrecht, wie z. B. die Ebene des Vierecks $abcd$, siehe Figur 185, so gestaltet sich die konstruktive Durchführung der Umlegung besonders einfach. Man kennt in diesem Falle den Winkel W_1 unmittelbar als Winkel der Spur T_2 mit der X-Achse und damit auch die Konstruktionsdreiecke der Viereckspunkte. So ist das Konstruktionsdreieck des Punktes a in dem Dreieck $o\mathfrak{a}_x a_2$ gegeben; macht man daher $a_1\mathfrak{a}$ senkrecht zu S_1 und $\overline{\mathfrak{a}a_4} = \overline{oa_2}$, so ist a_4 die Umlegung von a. Aehnlich bestimmen sich die übrigen Ecken b_4, c_4, d_4.

Soll die Umlegung um die zweite Spur T_2 vorgenommen werden, so hat man zur Ermittelung der Umlegungen a_5, b_5, c_5, d_5 nur auf den Senkrechten durch a_2, b_2, c_2, d_2 zu T_2 die Abstände der betreffenden Viereckspunkte von der **Pr. Eb.** E_2 abzutragen.

Für den Punkt b sind die Strecken $\overline{b_2 b_5} = \overline{b_2 b''} = \overline{\mathfrak{b}_x b'} = \overline{\mathfrak{b}_x b_1}$ zu machen; in ähnlicher Weise konstruiert man die übrigen Ecken a_5, c_5, d_5.

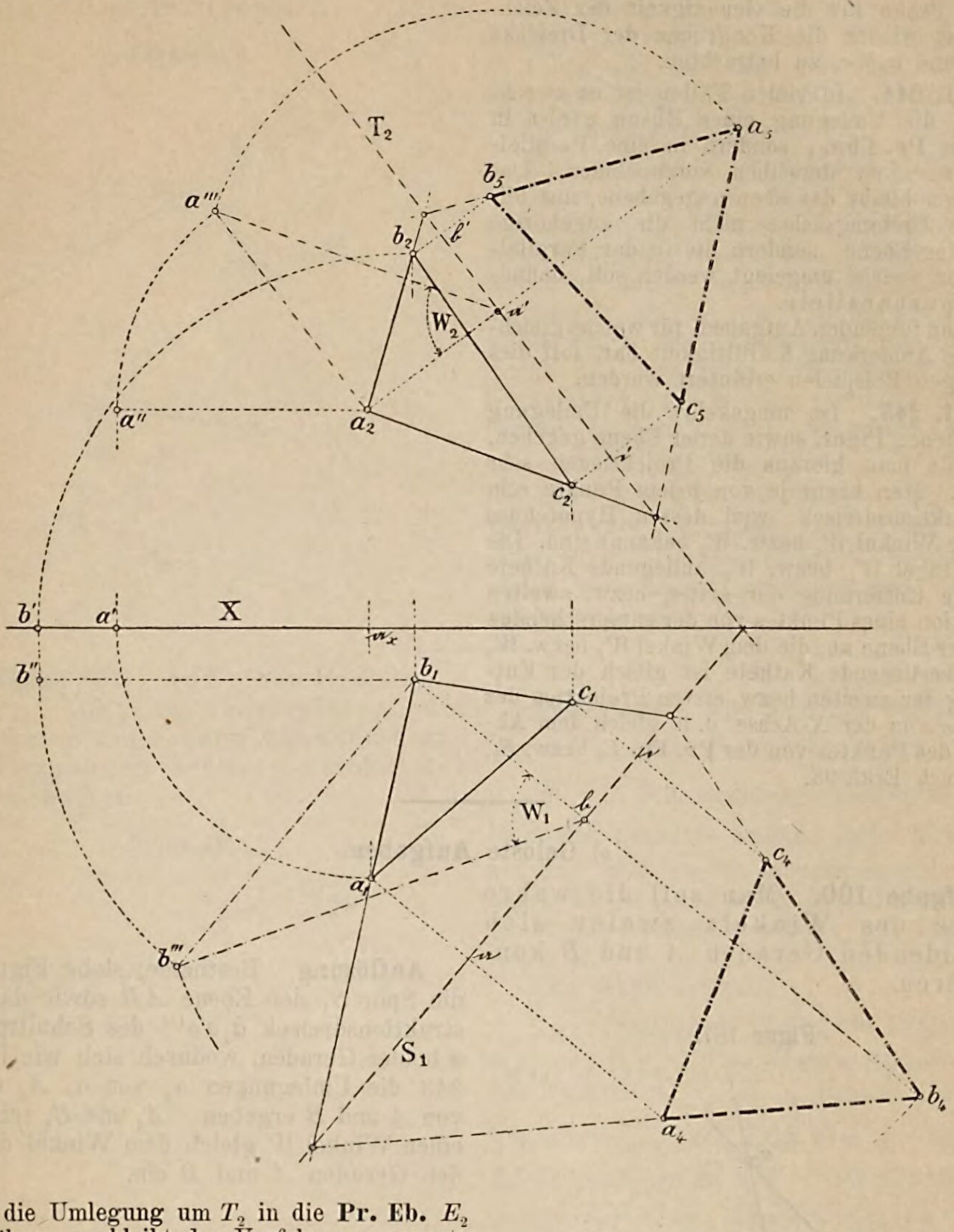
Figur 185.



Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung muss zwischen den Vierecken $a_4 b_4 c_4 d_4$ und $a_5 b_5 c_5 d_5$ Kongruenz stattfinden. Die affine Beziehung zwischen Umlegung und Projektion bleibt erhalten, siehe Erkl. 93 und 94.

Hat die Ebene der Figur zu den beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 beliebige Neigung, wie z. B. die Ebene des Dreiecks abc, siehe Figur 186, so bestimme man zunächst, siehe Erkl. 202, die Spuren S und T der Ebene abc. Soll die Umlegung der Dreiecksebene um S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 erfolgen, so ziehe man durch die Projektionen a_1, b_1, c_1 die Senkrechten zu S_1 und ermittele das Konstruktionsdreieck $b_1 \mathfrak{b} b'''$ des Punkes b, indem $\overline{b_1 b'''}$ senkrecht zu $b_1 \mathfrak{b}$ gezogen und gleich $\overline{b_1 b''} = \overline{\mathfrak{b}_x b'} = \overline{\mathfrak{b}_x b_2}$ gleich dem Abstand des Punktes b von der **Pr. Eb.** E_2 gemacht wird. Mittels der Gleichheit $\overline{\mathfrak{b} b'''} = \overline{\mathfrak{b} b_4}$ ergibt sich die Umlegung b_4 von b; in ähnlicher Weise erhielte man auch die Umlegungen der übrigen Eckpunkte der Figur. Einfacher gewinnt man jedoch die übrigen Punkte der Umlegung unter Benützung der Affinitätsbeziehung, siehe Erkl. 93 und 94, welche zwischen der ersten Projektion und der Umlegung besteht.

Figur 186.



Ist die Umlegung um T_2 in die **Pr. Eb.** E_2 auszuführen, so bleibt das Verfahren ganz entsprechend dem eben angegebenen. Man zieht durch die zweiten Projektionen der Eckpunkte der Figur Senkrechte zu T_2 und verschafft sich wieder das Konstruktionsdreieck einer der Eckpunkte, z. B. des Punktes a, indem man $\overline{a_2 a'''}$ senkrecht zu $a_2 \mathfrak{a}'$ zieht und gleich $\overline{a_2 a''} = \overline{\mathfrak{a}_x a'} = \overline{\mathfrak{a}_x a_1}$ gleich dem Abstande des Punktes a von der **Pr. Eb.** E_2 macht. Mittels der Gleichheit $\overline{\mathfrak{a}' a'''} = \overline{\mathfrak{a}' a_5}$ ergibt sich die Umlegung a_5 von a und analog erhielte man die Umlegungen der übrigen Eckpunkte der Figur.

Einfacher ist es wieder, die Affinitätsbeziehung zwischen Projektion und Umlegung, für welche T_2 als Affinitätsachse gilt, zur Konstruktion

der Umlegungen der übrigen Eckpunkte zu benützen.

Als Probe für die Genauigkeit der Zeichnung ist wieder die Kongruenz der Dreiecke $a_4 b_4 c_4$ und $a_5 b_5 c_5$ zu betrachten.

Erkl. 244. In vielen Fällen ist es zweckmässig, die Umlegung einer Ebene nicht in eine der **Pr. Ebn.**, sondern in eine Parallelebene zu einer derselben vorzunehmen. Das Verfahren bleibt das oben angegebene, nur bildet die Drehungsachse nicht die zugehörige Spur der Ebene, sondern die in der Parallelebene, in welche umgelegt werden soll, befindliche Spurparallele.

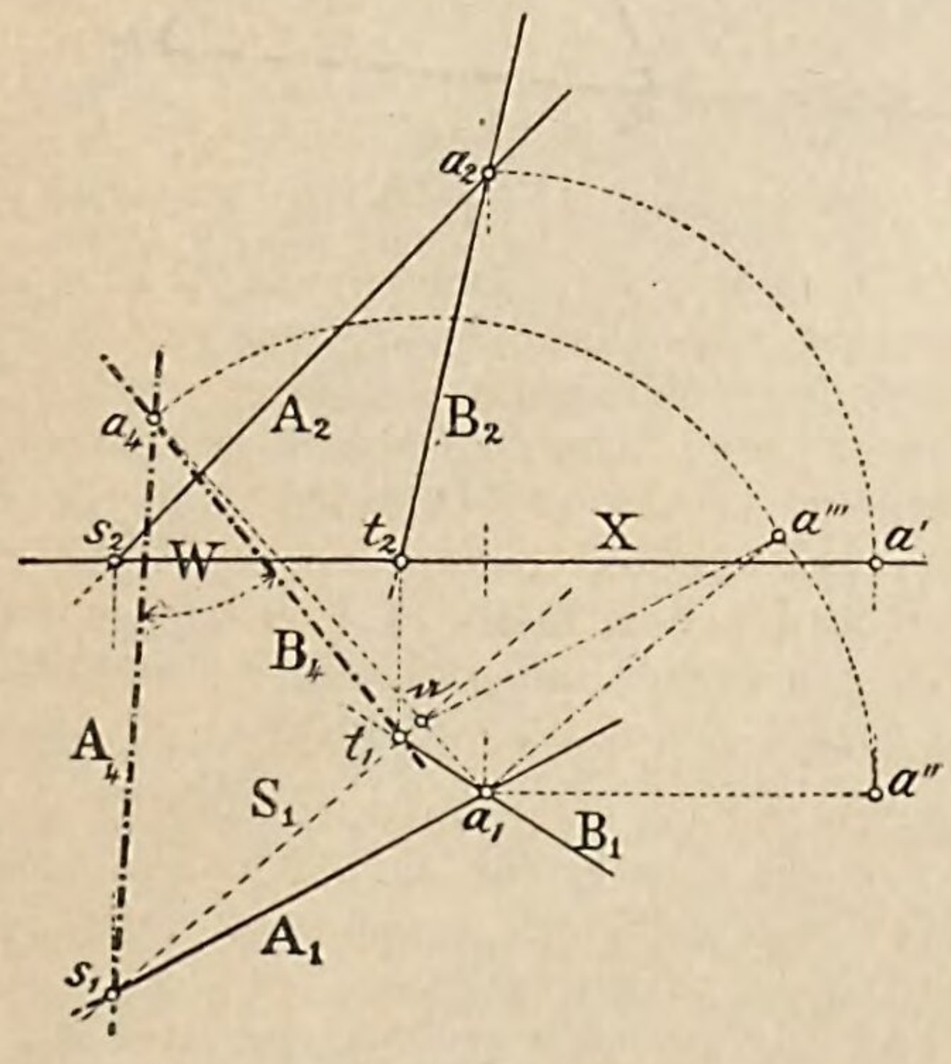
In den folgenden Aufgaben, für welche gleichfalls die Anmerkung 5 Gültigkeit hat, soll dies an einigen Beispielen erläutert werden.

Erkl. 245. Ist umgekehrt die Umlegung einer ebenen Figur, sowie deren Ebene gegeben, so erhält man hieraus die Projektionen sehr einfach. Man kennt ja von jedem Punkte sein Konstruktionsdreieck, weil dessen Hypotenuse und der Winkel W_1 bezw. W_2 bekannt sind. Die dem Winkel W_1 bezw. W_2 anliegende Kathete gibt die Entfernung der ersten bezw. zweiten Projektion eines Punktes von der entsprechenden Spur der Ebene an, die dem Winkel W_1 bezw. W_2 gegenüberliegende Kathete ist gleich der Entfernung der zweiten bezw. ersten Projektion des Punktes von der X-Achse, d. h. gleich dem Abstande des Punktes von der **Pr. Eb.** E_1 bezw. E_2, siehe auch Erkl. 93.

ι) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 100. Man soll die wahre Grösse des Winkels zweier sich schneidenden Geraden A und B konstruieren.

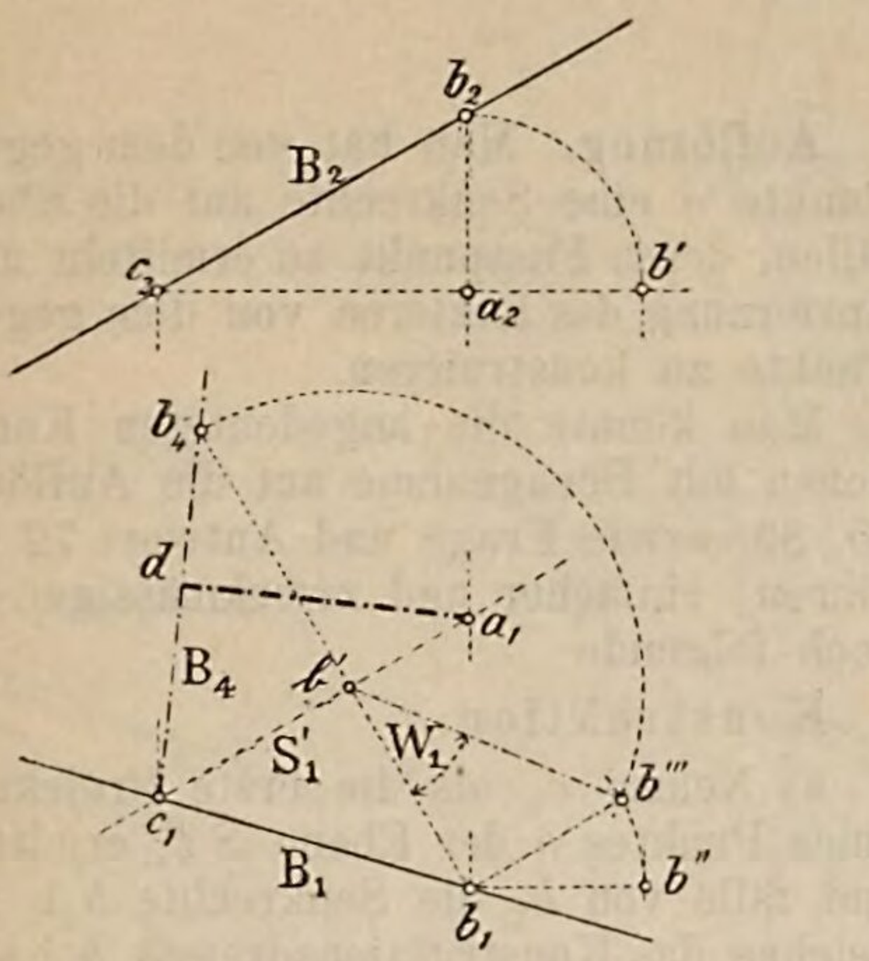
Figur 187.



Auflösung. Bestimme, siehe Figur 187, die Spur S_1 der Ebene AB sowie das Konstruktionsdreieck $a_1 a a'''$ des Schnittpunktes a beider Geraden, wodurch sich wie in Erkl. 243 die Umlegungen a_4 von a, A_4 und B_4 von A und B ergeben. A_4 und B_4 schliessen einen Winkel W gleich dem Winkel der beiden Geraden A und B ein.

Aufgabe 101. Man soll die wahre Entfernung eines Punktes a von einer Geraden B konstruieren.

Figur 188.



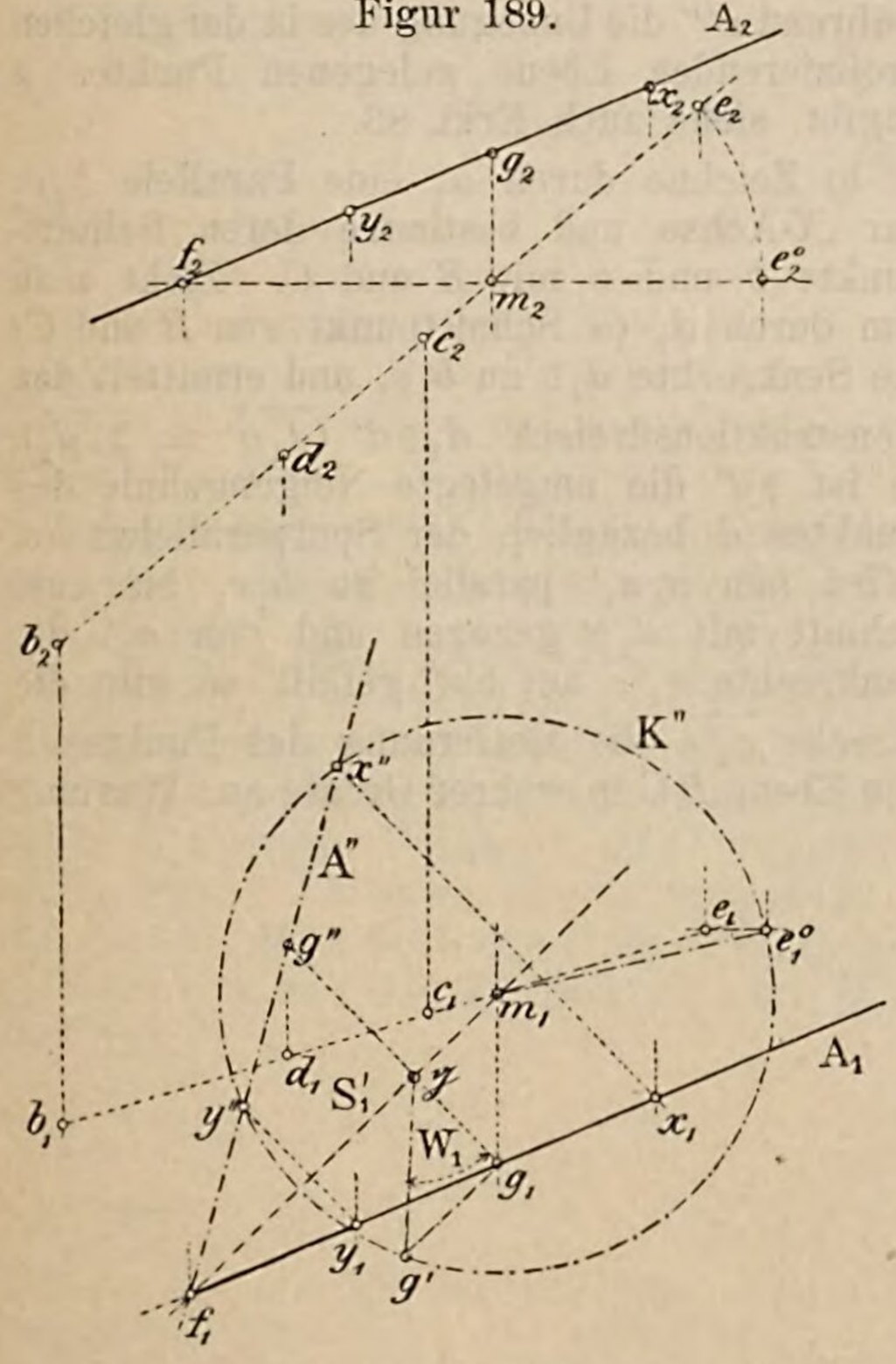
Auflösung. Man hat von dem gegebenen Punkte a auf die Gerade B eine Senkrechte zu fällen und die Länge derselben von a bis zu ihrem Fusspunkt auf B zu ermitteln.

Man erhält folgende

Konstruktion: Ziehe etwa gleich durch a, siehe Figur 188, eine Parallele ac zur ersten Spur der Ebene aB, bestimme deren erste Projektion a_1c_1 oder S_1' und lege die Ebene aB um S_1' in die Parallelebene durch ac zur **Pr. Eb.** E_1 um. Zu diesem Zwecke wähle auf B einen beliebigen Punkt b, etwa gleich so, dass seine Projektionen auf die Gerade a_1a_2 fallen und bestimme die Umlegung b_4 von b ($b_1\mathfrak{b}'$ senkrecht zu S_1', $\overline{b_4\mathfrak{b}'} = \overline{\mathfrak{b}'b'''}$, $\overline{b_1b'''} = \overline{b_1b''} = \overline{a_2b'} = \overline{a_2b_2}$). Die Linie c_1b_4 gibt die Umlegung B_4 von B, während die Umlegung von a mit a_1 zusammenfällt. Die Senkrechte $\overline{a_1d}$ auf B_4 ist gleich der wahren Entfernung des Punktes a von der Geraden B.

Aufgabe 102. Auf einer Geraden A ist ein Punkt zu konstruieren, der von zweien gegebenen Punkten b und c Entfernungen besitzt, welche sich $m:n$ verhalten.

Figur 189.



Auflösung. Teilt man die Verbindungsstrecke $\overline{bc}$, siehe Figur 189, in den Punkten d und e in dem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$, so liegt der gesuchte Punkt, siehe Erkl. 175, auf dem über $\overline{de}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise, ist somit der Durchschnittspunkt dieses Kreises mit der gegebenen Geraden A.

Man erhält folgende

Konstruktion: Teile die Projektionen $\overline{b_1c_1}$ und $\overline{b_2c_2}$ der gegebenen Strecke $\overline{bc}$ in den Punkten d_1, e_1, d_2, e_2 in dem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$, siehe Erkl. 216, und bestimme die Projektionen m_1 und m_2 des Mittelpunktes m der Strecke $\overline{de}$. Ziehe in der Ebene Am durch m eine Parallele mf zur ersten Spur der Ebene und ermittele deren erste Projektion m_1f_1 oder S_1'. Um S_1' lege die Ebene Am samt der Geraden A in die Parallelebene durch mf zur **Pr. Eb.** E_1 um und bestimme mittels des Konstruktionsdreiecks $g_1\mathfrak{g}g'$ die Umlegung g'' des Punktes g der Geraden A, ferner die wahre Länge $\overline{m_1e_1^0}$ der Strecke $\overline{me}$, siehe Antwort 2 der Frage 72.

Um m_1 beschreibe mit dem Halbmesser $\overline{m_1e_1^0}$ den Kreis K'', welcher die Umlegung A'' von A in den Punkten x'' und y'' trifft, denen auf A_1 und A_2 die Projektionen x_1

und y_1 der gesuchten Punkte x nnd y entsprechen.

Wann gibt es nur einen Punkt der gesuchten Art und wann wird die Aufgabe unmöglich?

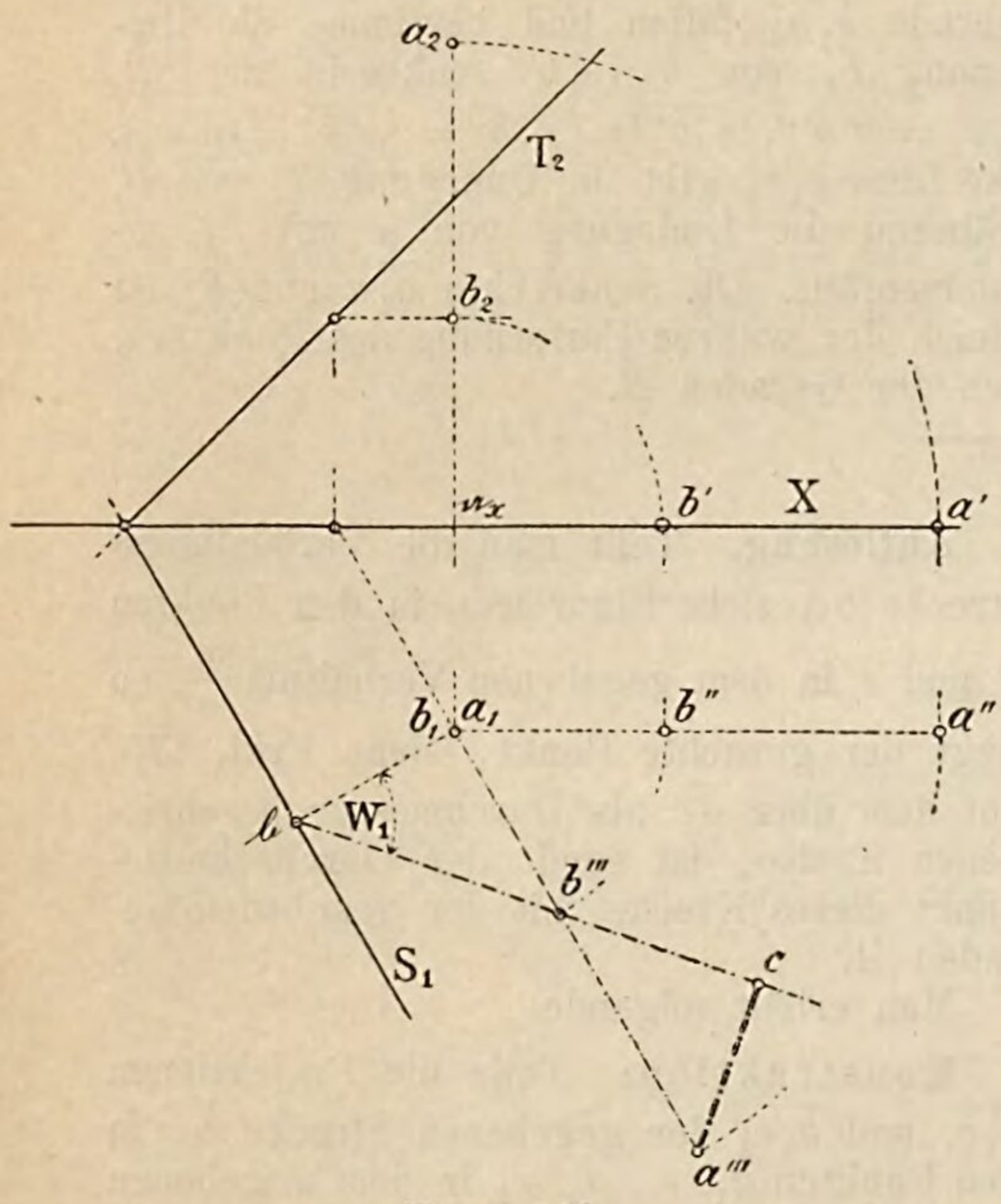
Aufgabe 103. Man soll die wahre Entfernung eines Punktes a von einer Ebene konstruieren, wenn dieselbe

a) durch ihre Spuren S und T,

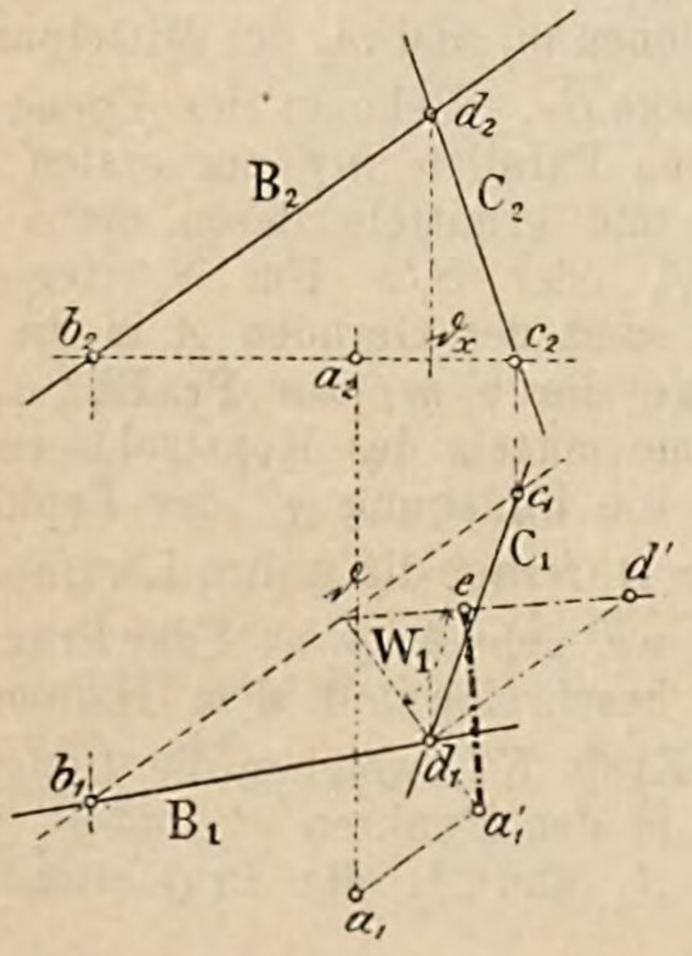
b) durch zwei sich schneidende Gerade B und C

gegeben ist.

Figur 190.



Figur 191.



Auflösung. Man hat von dem gegebenen Punkte a eine Senkrechte auf die Ebene zu fällen, deren Fusspunkt zu ermitteln und die Entfernung des letzteren von dem gegebenen Punkte zu konstruieren.

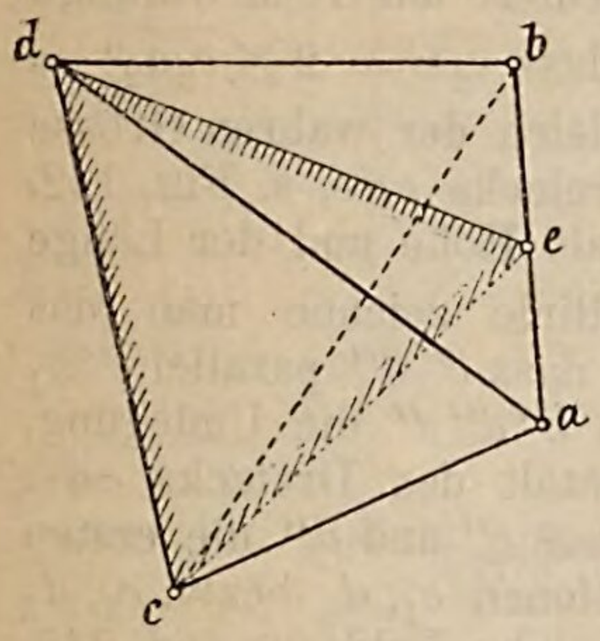
Man könnte die angedeuteten Konstruktionen mit Bezugnahme auf die Auflösungen 85, 89, sowie Frage und Antwort 72 durchführen; einfacher und zweckmässiger ist jedoch folgende

Konstruktion:

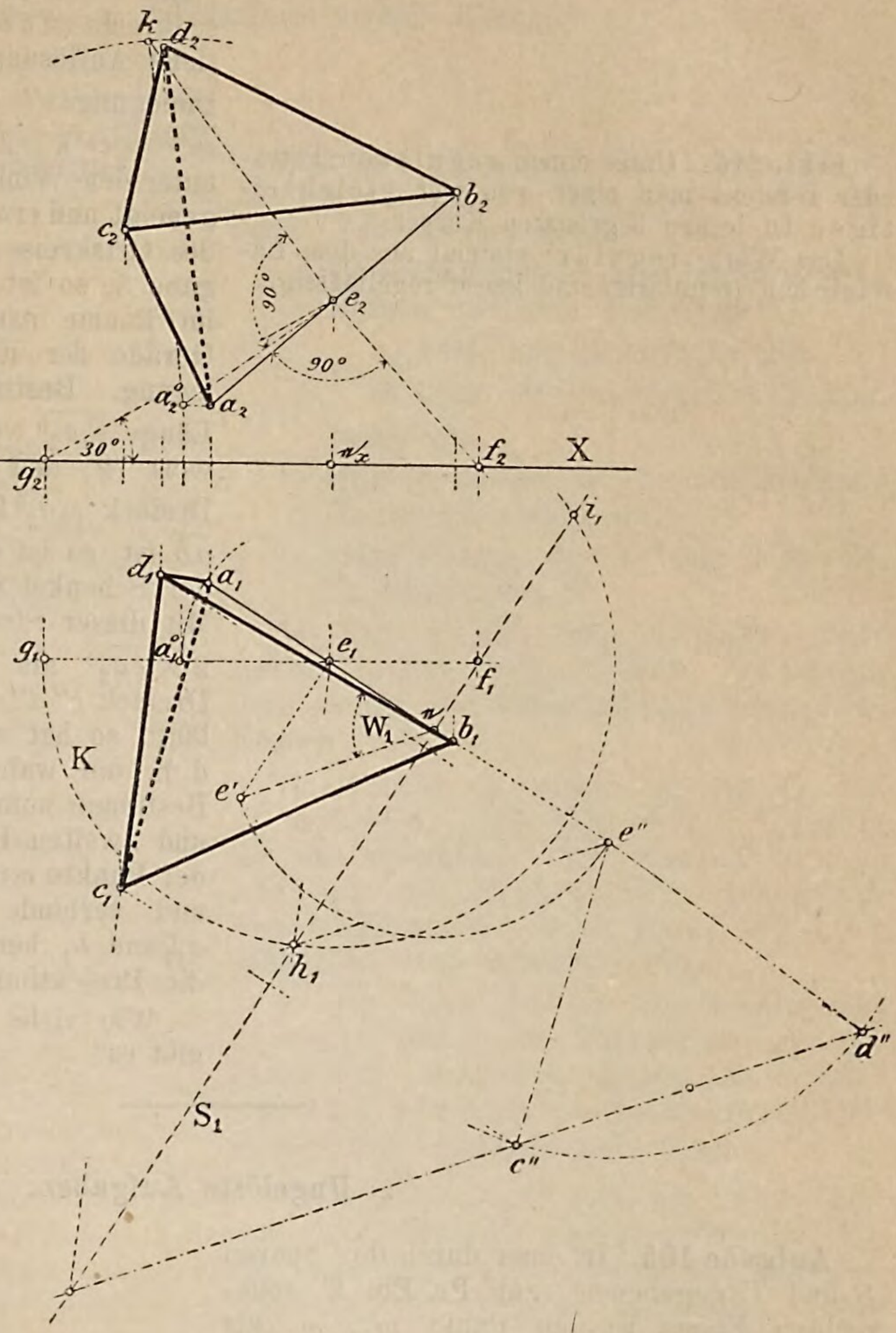
a) Nehme a_1 als die erste Projektion b_1 eines Punktes b der Ebene ST, ermittele b_2 und fälle von b_1 die Senkrechte $b_1\mathfrak{b}$ zu S_1. Zeichne das Konstruktionsdreieck $b_1\mathfrak{b}b'''$ des Punktes b. Mache ferner $\overline{a_1a'''} = \overline{\mathfrak{a}_x a_2}$, so gibt die von a''' auf $\mathfrak{b}b'''$ gezogene Senkrechte $\overline{a'''c}$ die Entfernung des Punktes a von der Ebene ST in wahrer Grösse an, denn $\mathfrak{b}b'''$ ist die mit der projizierenden Ebene $b_1\mathfrak{b}$ umgelegte zu S_1 gehörige Neigungslinie der Ebene ST für den Punkt b, während a''' die Umlegung des in der gleichen projizierenden Ebene gelegenen Punktes a angibt, siehe auch Erkl. 83.

b) Zeichne durch a_2 eine Parallele b_2c_2 zur X-Achse und bestimme deren Schnittpunkte b und c mit B und C. Zieht man nun durch d_1 (d Schnittpunkt von B und C) die Senkrechte $d_1\mathfrak{d}$ zu b_1c_1 und ermittelt das Konstruktionsdreieck $d_1\mathfrak{d}d'$ ($\overline{d_1d'} = \overline{\mathfrak{d}_x d_2}$), so ist $\mathfrak{d}d'$ die umgelegte Neigungslinie des Punktes d bezüglich der Spurparallelen bc. Wird nun a_1a_1' parallel zu b_1c_1 bis zum Schnitt mit $d_1\mathfrak{d}$ gezogen und von a_1' die Senkrechte $a_1'e$ auf $\mathfrak{d}d'$ gefällt, so gibt die Strecke $\overline{a_1'e}$ die Entfernung des Punktes a von Ebene BC in wahrer Grösse an. Warum?

Figur 192.



Figur 193.



Aufgabe 104. Von einem regulären Tetraëder, siehe Erkl. 246, ist eine Kante $\overline{ab}$, siehe Figur 192, der Grösse und Lage nach gegeben; ausserdem soll die Verbindungslinie cd der beiden noch übrigen Eckpunkte des Tetraëders mit der **Pr. Eb.** E_1 einen Winkel von vorgeschriebener Grösse ($w_1 = 30^0$) einschliessen. Man soll die Projektionen des Körpers auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 zeichnen.

Auflösung. Denkt man sich den Halbierpunkt e, siehe Figur 192, der Kante $\overline{ab}$ mit den Eckpunkten c und d verbunden, so steht die Ebene cde senkrecht auf ab und das Dreieck cde ist gleichschenklig mit den Höhen der gleichseitigen Dreiecke abc und abd als Schenkellängen. Diese Längen sind aber konstruierbar und damit auch das Dreieck cde, wodurch sich die Punkte c und d ergeben.

Man erhält folgende

Erkl. 246. Unter einem regulären Tetraëder versteht man einen von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzten Körper.

Das Wort „regulär“ stammt aus dem Lateinischen (regularis) und heisst regelmässig.

Konstruktion: Lege durch den Mittelpunkt e von $\overline{ab}$, siehe Figur 193, eine Ebene senkrecht zu ab, bestimme deren erste Spur S_1, siehe Auflösung von Aufgabe 90, sowie die Umlegung e'' des Punktes e ($\overline{e_1 e'} = \overline{\mathfrak{e}_x e_2}$, $\overline{\mathfrak{e} e''} = \overline{\mathfrak{e} e'}$). Zeichne durch e eine Gerade unter dem Winkel $w_1 = 30^0$ gegen **Pr. Eb.** E_1 geneigt und ermittele die Schnittpunkte h_1 u. i_1 des Ortskreises K, siehe Erkl. 59 und Aufgabe 5, so ist die Gerade eh bezw. ei eine im Raume parallel zur Kante cd laufende Gerade der Ebene cde und $h_1 e''$ ihre Umlegung. Bestimmt man nunmehr die wahre Länge $\overline{e_2 a_2{}^0}$ von $\overline{ea}$, siehe Frage und Antwort 72, und konstruiert das rechtwinklige Dreieck $e_2 a_2{}^0 k$ so, dass $\overline{e_2 k} = 2 \times \overline{e_2 a_2{}^0} = \overline{ab}$ ist, so ist $\overline{e_2 k}$ gleich der wahren Grösse der Schenkel des Dreiecks cde, s. Fig. 192. Mit dieser Strecke als Höhe und der Länge $2 \times \overline{e a_2{}^0}$ als Grundlinie zeichne man das Dreieck $c'' d'' e''$ so, dass $c'' d''$ parallel $e'' h_1$ läuft, so hat man in $c'' d'' e''$ die Umlegung, d. h. die wahre Gestalt des Dreiecks cde. Bestimme nunmehr aus c'' und d'' die ersten und zweiten Projektionen c_1, d_1 bezw. c_2, d_2 der Punkte c und d, siehe Erkl. 93 und 245, und verbinde dieselben mit den Punkten a_1 und b_1 bezw. a_2 und b_2, so sind damit die Projektionen des Tetraëders gezeichnet.

Wie viele Tetraëder der verlangten Art gibt es?

---

z) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 105. In einer durch ihre Spuren S und T gegebenen, zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechten Ebene ist ein Punkt m_1, m_2 als Mittelpunkt einer Kreislinie K von bekanntem Halbmesser gegeben. Man soll die Projektionen der Kreislinie zeichnen.

Andeutung. Lege die Ebene ST um ihre zweite Spur T_2 samt dem Punkte m in die **Pr. Eb.** E_2 um, zeichne um die Umlegung von m als Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser den Kreis und konstruiere hieraus dessen Projektionen auf E_1 und E_2.

Aufgabe 106. Die Aufgaben 17, 20—31 und 34—40 sind zu lösen für das Projektionssystem I—II.

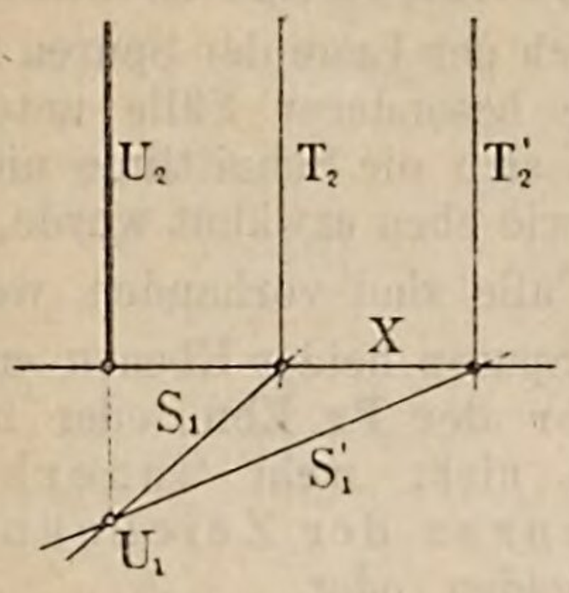
---

e) Ueber die Lagen zweier Ebenen.

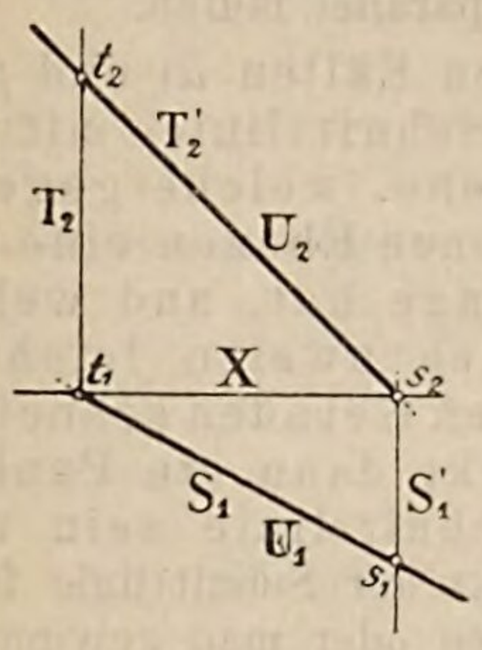
(Bestimmung der Schnittlinie zweier Ebenen.)

Frage 82. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die in der Antwort auf die Frage 39 genannten Lagen zweier Ebenen und wie bestimmt man ihre Schnittlinie?

Figur 194.



Figur 195.



Erkl. 247. Das in nebenstehender Antwort unter a) bis c) Gesagte lässt sich kurz als Satz wie folgt zusammenfassen:

„Man erkennt in der Projektionszeichnung die Lage zweier Ebenen zu einander unmittelbar, wenn die Ebenen durch ihre Spuren gegeben sind; die Ebenen **schneiden sich nämlich oder sind zu einander parallel, wenn ihre gleichnamigen Spuren sich schneiden oder zu einander parallel laufen.**

Sind dagegen die Ebenen durch anderweitige Bestimmungsstücke gegeben, so erhält man über die Lagen beider Ebenen Aufschluss nach Durchführung der Konstruktion ihrer Schnittlinie."

Antwort. Bezüglich der Lagen zweier Ebenen zu den **Pr. Ebn.**, lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

a) die **beiden** Ebenen sind **projizierende** Ebenen und zwar stehen sie

α) beide zur gleichen **Pr. Eb.**,

β) beide auf verschiedenen **Pr. Ebn.** senkrecht,

b) **eine** der Ebenen ist eine **projizierende** Ebene, die andere nicht,

c) **beide** Ebenen sind beliebig gegen die **Pr. Ebn.** geneigt.

Im Falle a) lässt sich die Lage zweier Ebenen stets unmittelbar erkennen; denn stehen die beiden in Frage kommenden Ebenen

im Falle α), etwa auf der **Pr. Eb.** E_1 senkrecht, siehe Figur 194, so werden sie sich **schneiden** oder **parallel** sein, je nachdem die Projektionen der gegebenen Ebenen, siehe Erkl. 65, sich **schneiden** oder **parallel** laufen.

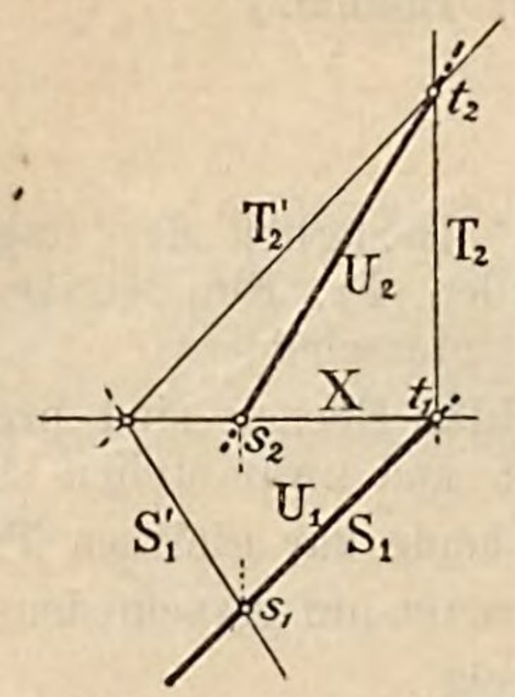
In der Figur 194 gibt der Schnittpunkt U_1 von S_1 und S_1' die erste Spur und zugleich die erste Projektion der Schnittgeraden U beider Ebenen an; die zweite Projektion steht senkrecht zur X-Achse.

Im Falle β) findet stets ein Schneiden beider Ebenen statt und es fallen die Projektionen der Schnittgeraden mit den entsprechenden Projektionen der Ebenen zusammen, siehe Figur 195; die Schnittgerade heisst U und es fällt U_1 mit S_1, U_2 mit T_2 zusammen.

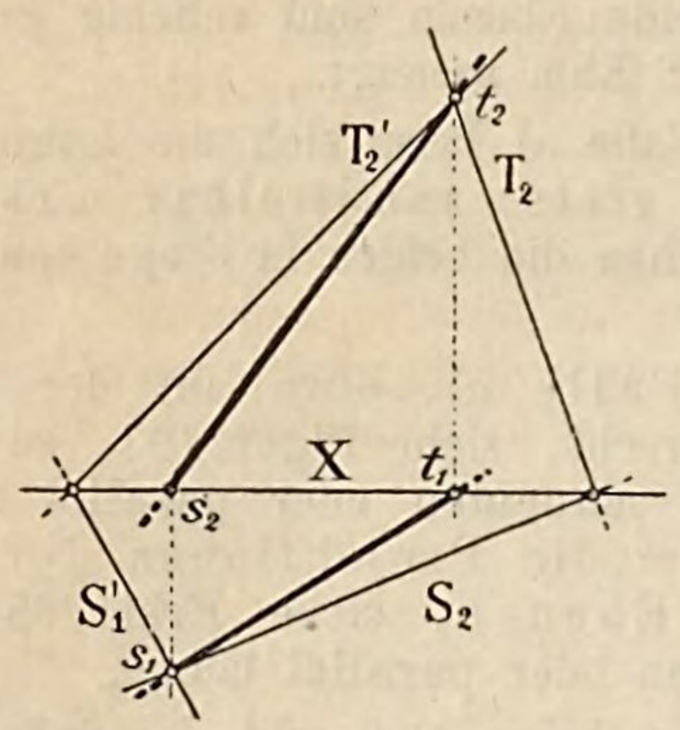
Im Falle b) findet gleichfalls stets ein Schneiden beider Ebenen statt, und es geben die Schnittpunkte der Spuren der Ebenen die Spuren der Durchschnittslinie. In der Figur 196 ist die Gerade U die Schnittlinie beider Ebenen; U_1 fällt mit der Projektion S_1 der projizierenden Ebene ST zusammen.

Ist die zu den **Pr. Ebn.** beliebig geneigte Ebene nicht durch ihre Spuren, sondern durch andere Bestimmungsstücke, etwa zwei sich schneidende Gerade A und B, gegeben und steht die zweite Ebene ST etwa auf der **Pr. Eb.** E_2 senkrecht, so fällt die zweite Projektion U_2 der Schnittlinie U mit T_2 zu-

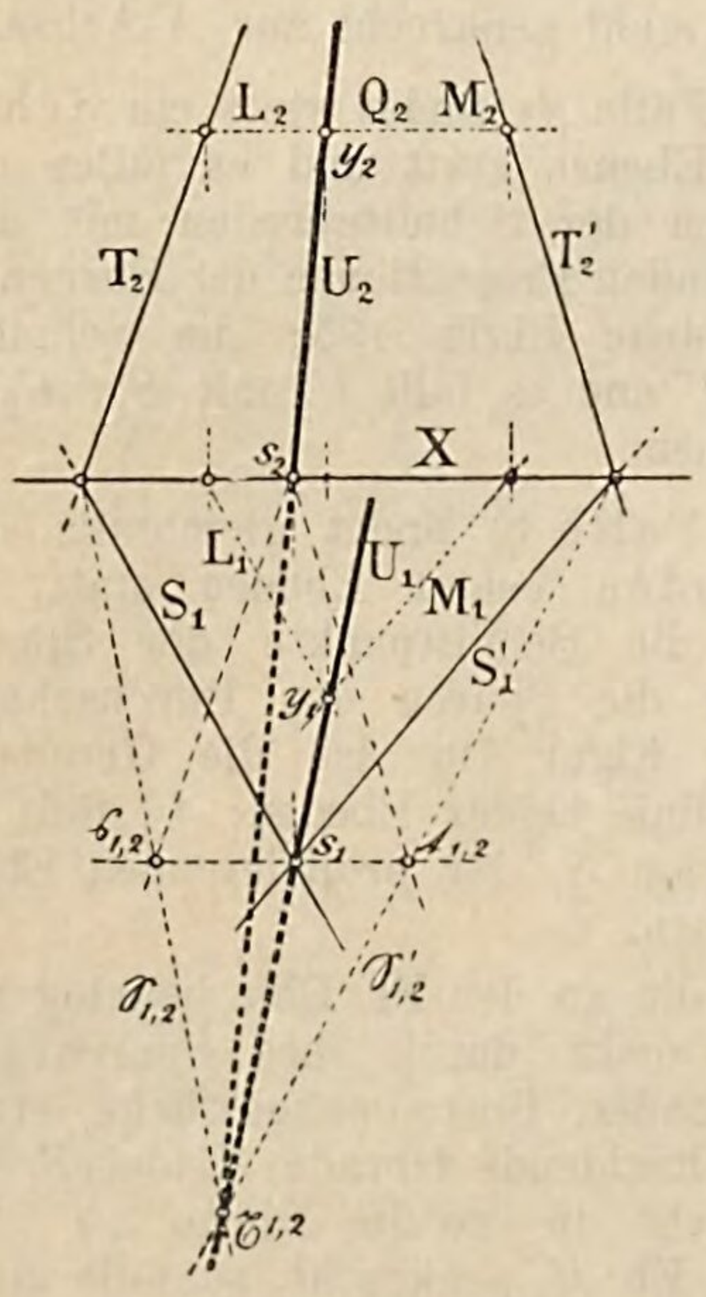
Figur 196.



Figur 197.



Figur 198.



sammen; die erste Projektion bestimmt sich als eine Gerade der Ebene AB, wie früher.

Im Falle c) lässt sich aus der Projektionszeichnung nur dann unmittelbar erkennen, ob zwei Ebenen sich schneiden, wenn sie **durch ihre Spuren** gegeben sind, denn es sind dann die Durchschnittspunkte der Spuren die Spuren der Durchschnittslinie; in Figur 197 ist U die Schnittlinie beider Ebenen. Sind dagegen die gleichnamigen Spuren beider Ebenen parallel, so sind es auch die Ebenen.

Bezüglich der Lage der Spuren lassen sich eine Reihe besonderer Fälle unterscheiden, in welchen sich die Schnittlinie nicht so unmittelbar, wie eben erwähnt wurde, bestimmt.

Diese Fälle sind vorhanden, wenn

α) die Spuren beider Ebenen entweder in einer der **Pr. Ebn.** oder in beiden sich nicht mehr innerhalb der Grenzen der Zeichnungsebene schneiden, oder

β) wenn die Spuren beider Ebenen sich in einem Punkte der X-Achse begegnen oder aber sämtlich zu letzterer Linie parallel laufen.

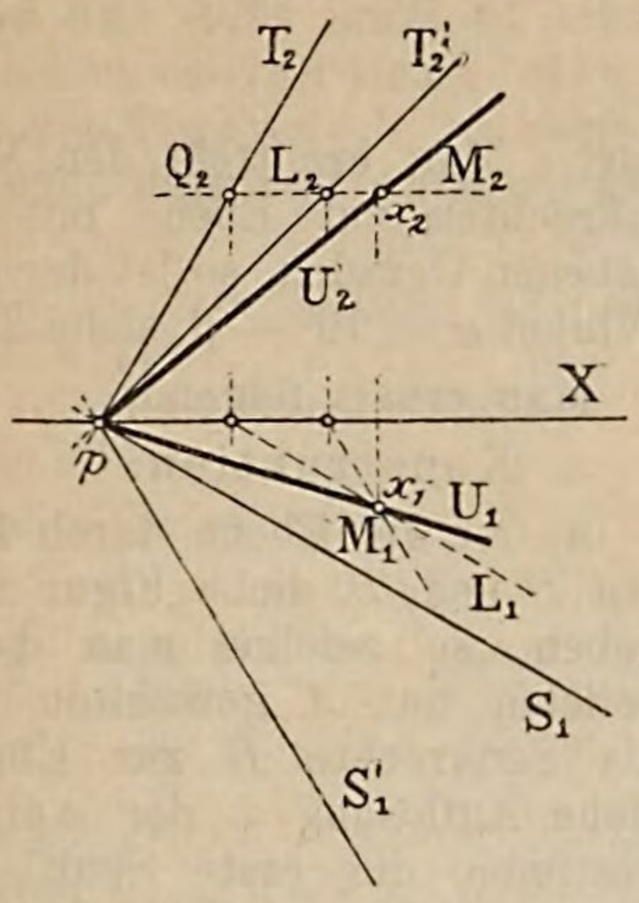
In beiden Fällen α) und β) gelangt man zur Schnittlinie mittels einer dritten Ebene, welche gegen die beiden gegebenen Ebenen eine möglichst bequeme Lage hat, und welche diese Ebenen nach zweien leicht zu konstruierenden Geraden schneidet, deren Schnittpunkt dann ein Punkt der gesuchten Schnittlinie sein muss. Ein zweiter Punkt der Schnittlinie ist entweder schon gegeben oder man gewinnt ihn durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens.

Fall α) Sind durch ST und $S'T'$, siehe Figur 198, die Spuren beider Ebenen gegeben, so kann man als Hilfsebene gleich die Coïncidenzebene, siehe Erkl. 194, benützen und die Affinitätsachsen beider Ebenen, siehe Erkl. 226, konstruieren; ihr Schnittpunkt ist ein Punkt der Schnittlinie beider Ebenen.

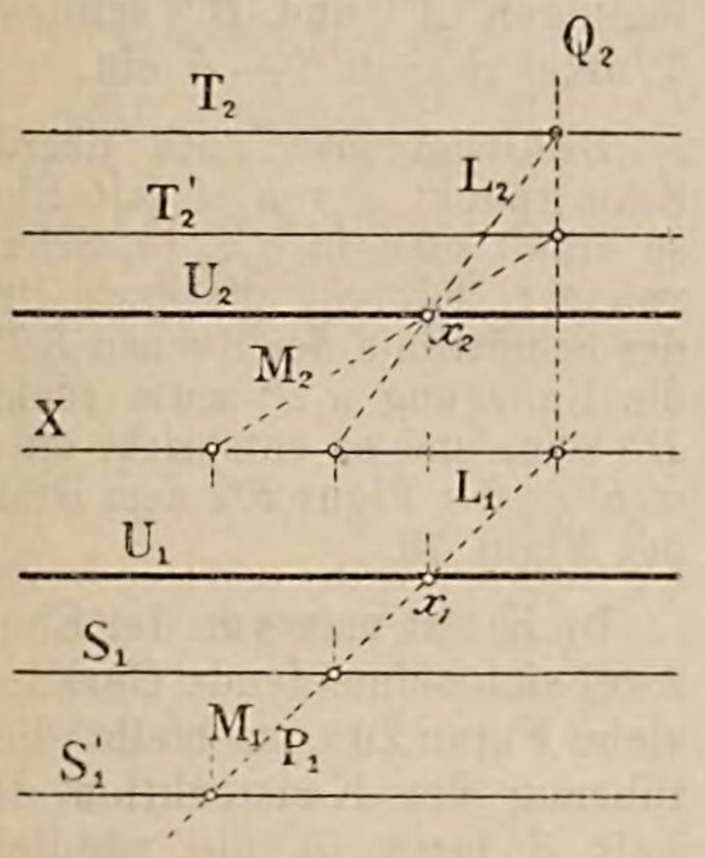
Am einfachsten ergeben sich diese Affinitätsachsen durch Ziehen von Spurparallelen zu T bezw. T' durch den Punkt s, siehe Figur 198. Die Projektionen dieser Parallelen treffen sich in den Punkten $\mathfrak{s}_{1,2}$ u. $\mathfrak{t}_{1,2}$, durch welche die Affinitätsachsen $\mathfrak{S}_{1,2}$ u. $\mathfrak{S}'_{1,2}$ hindurch gehen; ihr Schnittpunht $\mathfrak{x}_{1,2}$ gehört den beiden Projektionen der Schnittlinie U an.

Man hätte aber auch eine beliebige andere Ebene als Hilfsebene wählen können, etwa

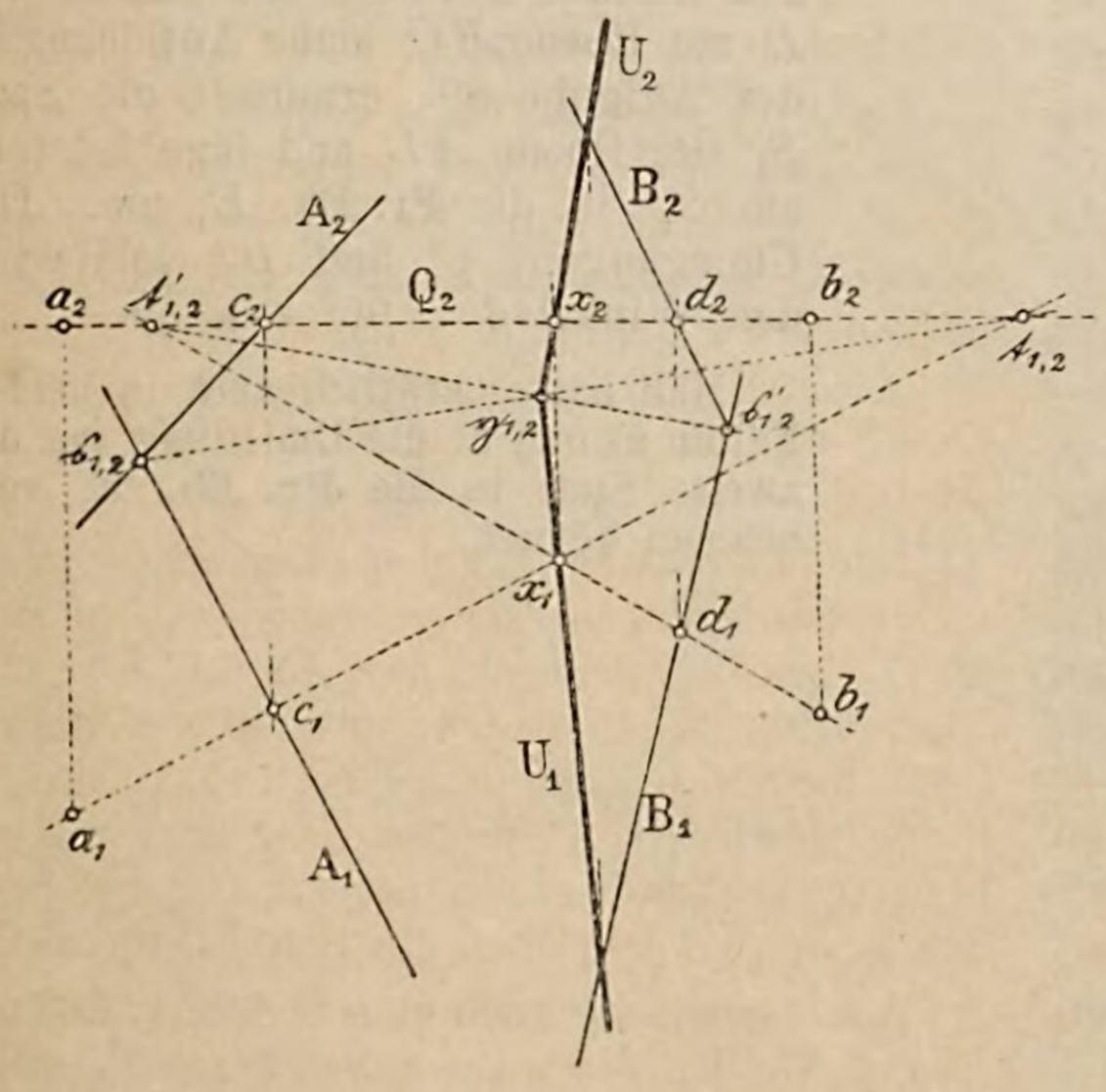
Figur 199.



Figur 200.



Figur 201.



die projizierende Ebene Q_2; sie schneidet die beiden gegebenen Ebenen nach den Linien L und M und der Schnittpunkt y der letzteren ist ebenfalls ein Punkt der Schnittlinie U.

Fall β) Treffen sich die Spuren beider Ebenen in dem nämlichen Punkte p, siehe Figur 199, der x-Achse, so ist das zuletzt angegebene Verfahren gleichfalls anwendbar. Die projizierende Ebene Q_2 liefert in den gegebenen Ebenen die Schnittlinien L und M, und letztere den Punkt x der Schnittlinie U, welche ausserdem durch p geht.

Sind dagegen die Spuren der gegebenen Ebenen sämtlich parallel zur X-Achse, siehe Figur 200, so wählt man zweckmässig eine projizierende Ebene PQ als Hilfsebene. Ihre Schnittlinien L und M mit den gegebenen Ebenen bestimmen den Punkt x der zur X-Achse parallelen Schnittlinie U.

Sind von den beiden Ebenen nicht ihre Spuren, sondern andere Bestimmungsstücke, siehe Frage und Antwort 26, gegeben, so kann man in der Projektionszeichnung, wie schon gesagt, nicht unmittelbar erkennen, ob die Ebenen sich schneiden oder nicht. Man erhält hierüber Aufschluss, wenn man die Schnittpunkte von zweien Geraden der einen Ebene mit der anderen Ebene, siehe Aufgabe 85 ermittelt; erhält man solche Schnittpunkte, so haben die Ebenen eine Gerade gemein, im anderen Falle nicht.

Man kann aber auch hier mit Zuhilfenahme einer dritten Ebene zur Schnittlinie beider Ebenen gelangen.

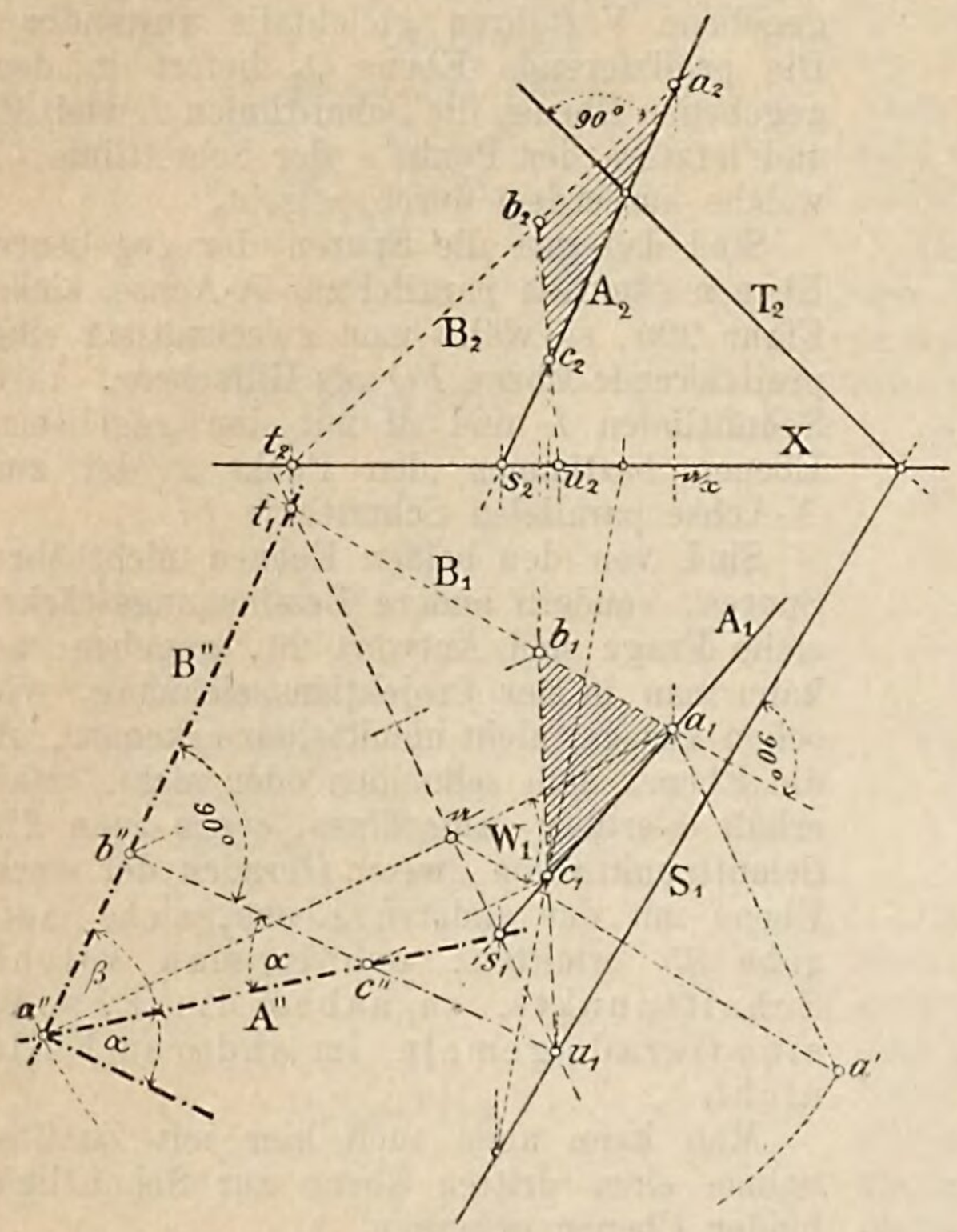
Sind z. B. die Ebenen je durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt gegeben, wie die Ebenen Aa und Bb, siehe Figur 201, so wählt man zweckmässig die durch a und b gehende projizierende Ebene Q_2, bestimmt die ersten Projektionen $a_1 c_1$ u. $b_1 d_1$ ihrer Schnittlinien mit den Ebenen Aa und Bb, welche sich in einem Punkte x_1, der ersten Projektion eines Punktes der Schnittlinie U treffen.

Mittels der Affinitätsachsen $\mathfrak{s}_{1,2}\mathfrak{t}_{1,2}$ und $\mathfrak{s}'_{1,2}\mathfrak{t}'_{1,2}$ beider Ebenen erhält man noch einen zweiten Punkt $\mathfrak{y}_{1,2}$, durch welchen beide Projektionen von U hindurchgehen.

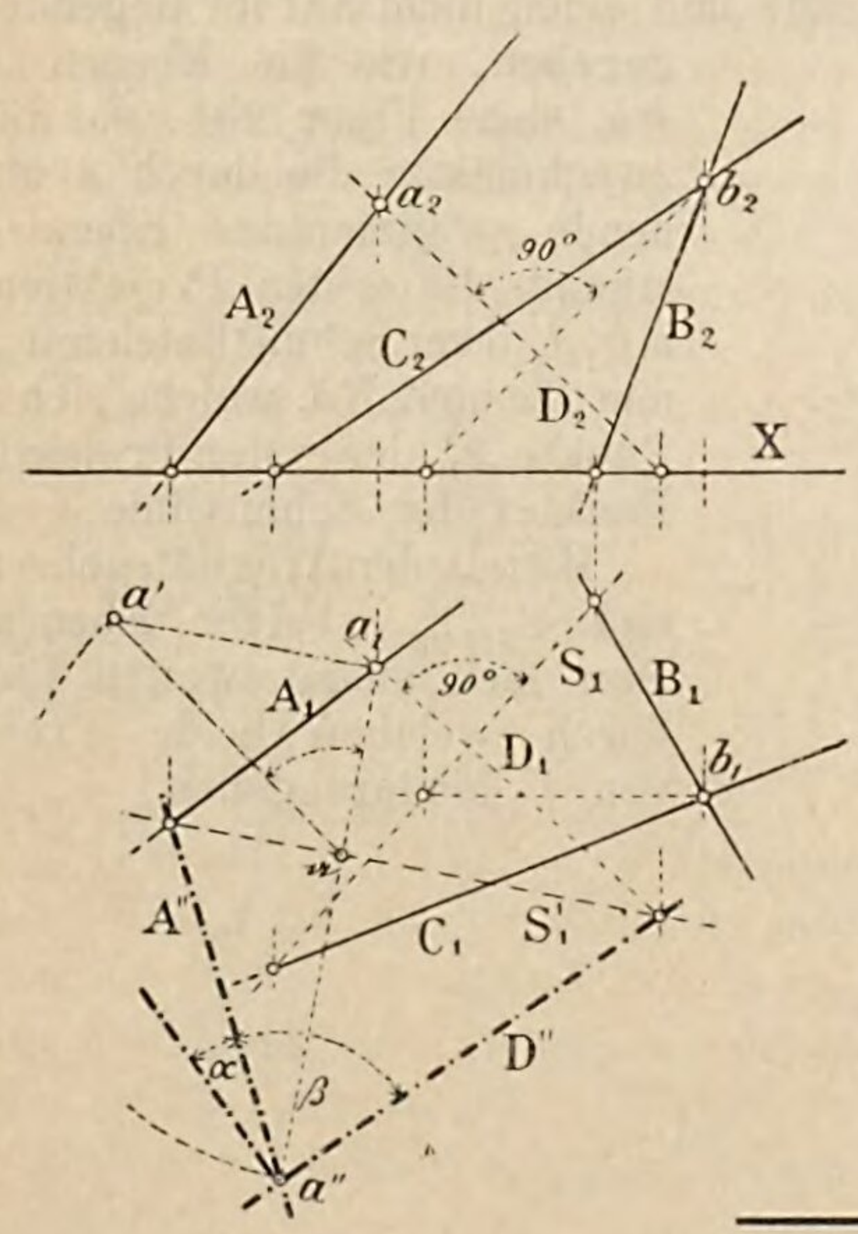
f) Ueber die Bestimmung des Winkels einer Geraden mit einer Ebene.

Frage 83. Wie ermittelt man in der Projektionszeichnung die wahre Grösse des Winkels α, siehe Frage und Antwort 42, einer Geraden mit einer Ebene?

Figur 202.



Figur 203.



Antwort. Man ermittele den Winkel β einer Senkrechten zur Ebene mit der gegebenen Geraden, so ist der gesuchte Winkel $\alpha = 90^0 - \beta$, siehe Erkl. 121.

Man erhält folgende

Konstruktion:

a) Ist die Ebene durch ihre Spuren S und T, siehe Figur 202, gegeben, so zeichne man durch den beliebig auf A gewählten Punkt a die Senkrechte B zur Ebene ST, siehe Auflösung a. der Aufgabe 89, bestimme die erste Spur $s_1 t_1$ der Ebene AB und lege letztere um $s_1 t_1$ in die **Pr. Eb.** E_1 um; die Umlegungen A'' und B'' schliessen den Winkel $\beta = 90^0 - \alpha$ ein.

Bestimmt man noch überdies den Schnittpunkt c von A mit Ebene ST, so erhält man in $c_1 u_1$ (u_1 Schnittpunkt von $s_1 t_1$ mit S_1) die erste Projektion der Schnittlinie der Ebenen ST u. AB; die Umlegung $u_1 c''$ muss senkrecht zu B'' sein, und es entspricht das Dreieck $a'' b'' c''$ der Figur 202 dem Dreieck $a b c$ der Figur 78.

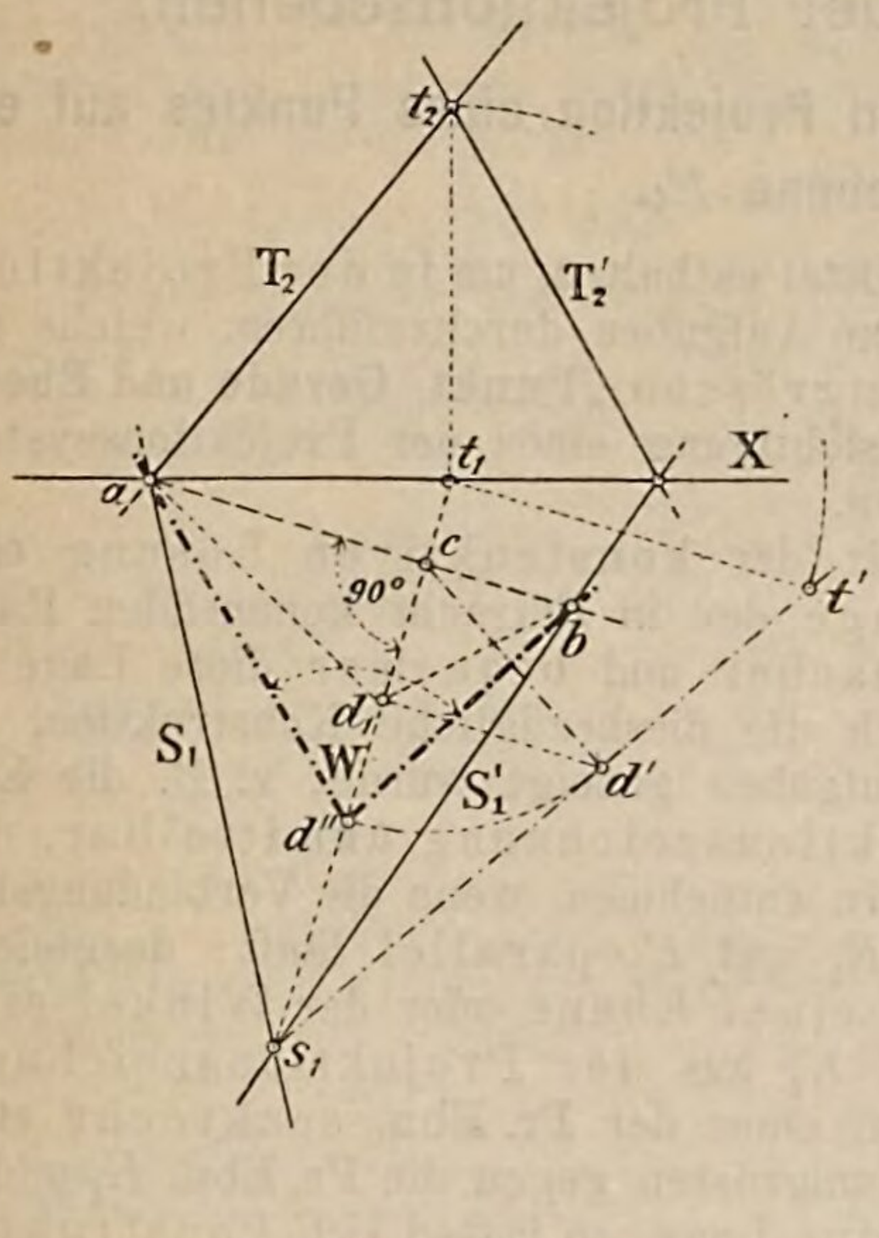
b) Kennt man von der Ebene etwa zwei sich schneidende Gerade B u. C, siehe Figur 203, so bleibt die Durchführung der Konstruktion des Winkels β bezw. α die nämliche, wie vorhin: Man fälle von einem beliebigen Punkte a von A die Senkrechte D zur Ebene BC, siehe Auflösung b. der Aufgabe 89, ermittele die Spur S_1' der Ebene AD und lege letztere um S_1' in die **Pr. Eb.** E_1 um. Die Umlegungen A'' und B'' schliessen den Winkel $\beta = 90^0 - \alpha$ ein.

Man hätte natürlich auch in beiden Fällen a) und b) die Umlegung um die zweite Spur in die **Pr. Eb.** E_2 vornehmen können.

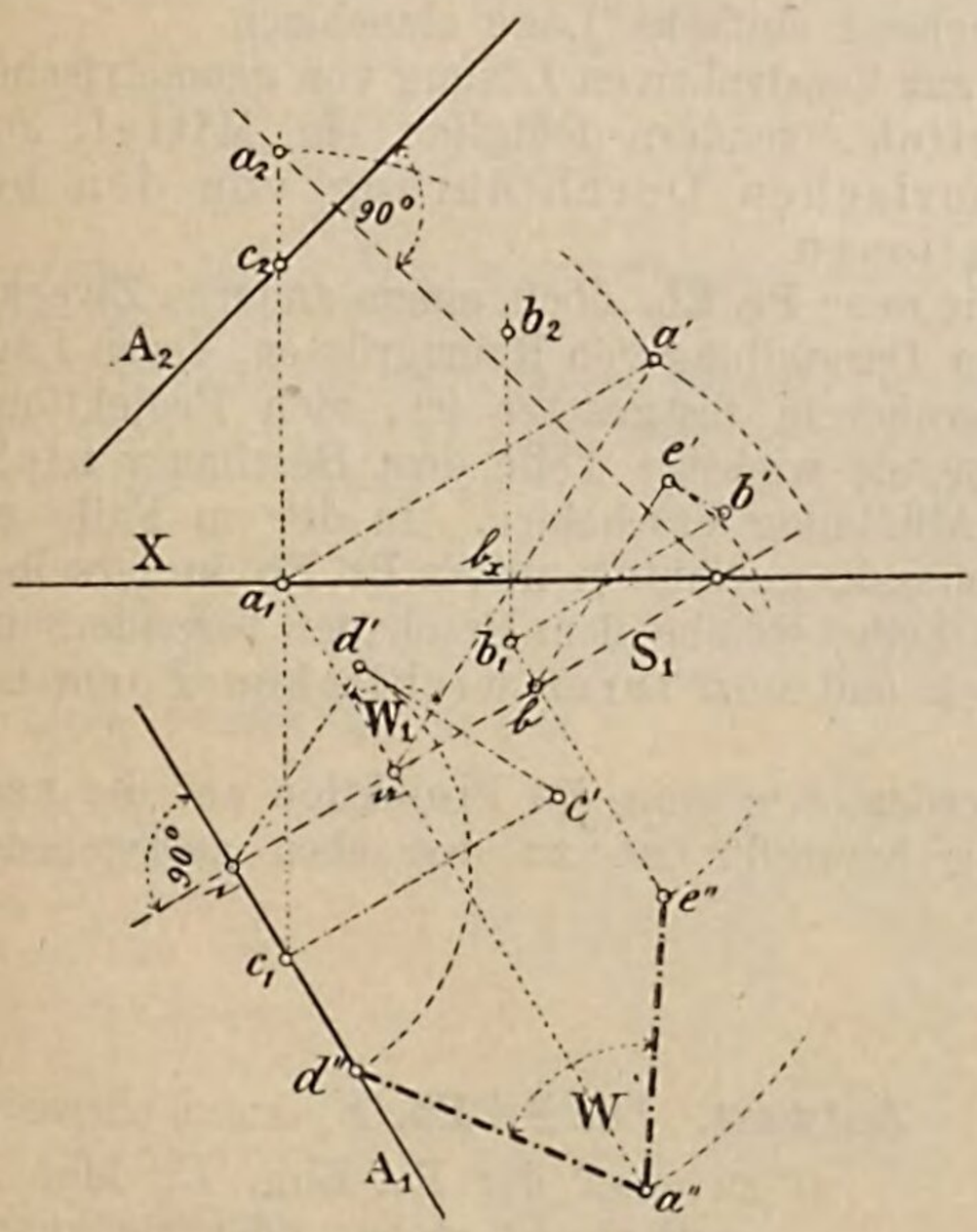
g) Ueber die Bestimmung des Winkels zweier Ebenen.

Frage 84. Wie ermittelt man in der Projektionszeichnung die wahre Grösse des Winkels W zweier Ebenen? Siehe auch Frage und Antwort 45.

Figur 204.



Figur 205.



Antwort. Man kann zur Bestimmung des gesuchten Winkels die beiden in der Antwort der Frage 45 genannten Wege einschlagen. In der Regel verdient aber das daselbst unter a) genannte Verfahren den Vorzug.

Man erhält folgende

Konstruktion:

a) Sind die Ebenen durch ihre Spuren ST, $S'T'$, siehe Figur 204, gegeben, so bestimme man zunächst ihre Schnittlinie st, siehe Antwort c) der Frage 82, und zeichne die Linie ab senkrecht zu s_1t_1 als Spur einer zur Schnittlinie st senkrechten Ebene E'. Letztere schneidet die Linie st in einem Punkte d, der sich wie folgt ergibt. Legt man die projizierende Ebene s_1t_1 samt der Geraden st nach s_1t' in die **Pr. Eb.** E_1 um, so ist die von c auf s_1t' gefällte Senkrechte die umgelegte Schnittlinie der Ebenen E' und s_1t_1, daher d' die Umlegung von d. Nach der Umlegung der Ebene E' um ihre Spur ab in die **Pr. Eb.** E_1 kommt der Punkt d nach d'', so dass $\overline{cd'} = \overline{cd''}$ ist; die Linien ad'' und bd'' schliessen den Winkel W beider Ebenen in wahrer Grösse ein.

Die erste Projektion von d ist d_1, daher die erste Projektion des Winkels W der Winkel ad_1b.

Man führe die obige Konstruktion für den Fall durch, dass die gegebenen Ebenen beide auf den ungleichen **Pr. Ebn.** senkrecht stehen.

b) Kennt man von den beiden Ebenen andere Bestimmungsstücke, z. B. ihre Schnittgerade A und ausserdem von jeder Ebene noch einen Punkt a bezw. b, siehe Figur 205, so gelangt man zu dem Winkel W der Ebenen aA und bA wie folgt: Ziehe durch den Punkt a eine zu A senkrechte Ebene E' und bestimme deren Schnittlinien mit den gegebenen Ebenen. Man erhält folgende

Konstruktion: Bestimme zunächst die Spur S_1 der Ebene E'; (der Einfachheit wegen wurde die X-Achse durch a_1 gezogen, siehe die Auflösung zu Aufgabe 90), lege E' in die **Pr. Eb.** E_1 um und konstruiere die Umlegung a'' von a. Nimmt man auf A einen beliebigen Punkt c an und fällt von ihm eine Senkrechte cd auf E', so gehört der Punkt d der Schnittlinie von E' mit Ebene aA an. Zu diesem Zwecke ziehe man cd' parallel aa', ferner $\overline{c_1c'}$ senkrecht zu A und gleich $\overline{a_1c_2}$ und fälle $c'd'$ senkrecht cd'. Wird nun $\overline{cd''} = \overline{cd'}$ gemacht, so ist d'' die Umlegung

von d und $a''d''$ die umgelegte Schnittlinie der Ebenen E' und aA.

Auf die gleiche Weise fälle von b die Senkrechte be zu E' und bestimme e''. Die Verbindungslinien $a''d''$ und $e''d''$ schliessen den Winkel W in wahrer Grösse ein.

G) Ueber die Einführung neuer Projektionsebenen.

a) Ueber die Bestimmung der rechtwinkligen Projektion eines Punktes auf eine vierte Projektionsebene E_4.

Anmerkung 15. In dem Vorhergehenden sind die Mittel enthalten, um in der Projektionszeichnung die Konstruktionen für alle jene Aufgaben durchzuführen, welche sich auf die gegenseitigen Lagen der Raumgrössen „**Punkt, Gerade** und **Ebene**“ beziehen und zwar lediglich unter Berücksichtigung eines der Projektionssysteme I—II, I—III oder II—III, siehe Erkl. 186a.

Die Einfachheit und Genauigkeit der konstruktiven Lösung einer Aufgabe hängt nun wesentlich von der Lage der in Betracht kommenden Raumgrössen gegen die **Pr. Ebn.** ab; je einfacher und bequemer diese Lage ist, desto rascher und genauer erledigt sich die diesbezügliche Konstruktion. So kann man, wie in den vorhergehenden Aufgaben gezeigt wurde, z. B. die Entfernung zweier Punkte aus der Projektionszeichnung unmittelbar, d. h. ohne jede vorhergehende Konstruktion entnehmen, wenn die Verbindungslinie der beiden Punkte zu einer der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 parallel läuft; desgleichen ist die Entfernung eines Punktes von einer Ebene oder der Winkel einer Ebene mit einer der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 aus der Projektionszeichnung direkt erkenntlich, wenn die Ebene auf einer der **Pr. Ebn.** senkrecht steht.

Haben aber die in Rede stehenden Raumgrössen gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 eine ganz beliebige, d. h. eine allgemeine Lage, so lassen sich konstruktive Vereinfachungen erzielen durch Einführung neuer **Pr. Ebn.**, welche gegen die fraglichen Raumgrössen eine entsprechend einfache Lage einnehmen.

Die Wahl neuer **Pr. Ebn.** ist also zur konstruktiven Lösung von geometrischen Aufgaben nicht unbedingt erforderlich, sondern lediglich ein Mittel zur rascheren und einfacheren zeichnerischen Durchführung von den bestimmten geometrischen Konstruktionen.

In manchen Fällen dient jedoch die neue **Pr. Eb.** noch einem anderen Zwecke. Es kann nämlich vorkommen, dass bei der Darstellung von Raumgrössen, deren Lage gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 von vornherein festgesetzt ist, sich Projektionszeichnungen ergeben, in welchen einzelne oft wichtige Teile dem Beschauer nicht sichtbar oder doch in ungünstiger Abbildung erscheinen. In diesem Falle erhält man durch Einführung einer zweckmässig gewählten neuen **Pr. Eb.** in derselben eine solche Abbildung, dass gerade jene Teile, welche dem Beschauer besonders ins Auge fallen sollen, möglichst deutlich und von ihrer wirklichen Form nur wenig abweichend, sich darstellen.

Im Nachfolgenden soll gezeigt werden, wie man die Projektion auf die neue **Pr. Eb.** E_4 in der Projektionszeichnung herstellt und zu den eben angegebenen Zwecken benützt.

Frage 85. Welche Lagen kann die neue **Pr. Eb.** E_4 gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 einnehmen?

Erkl. 248. Die Bezeichnungen der in der **Pr. Eb.** E_4 hergestellten Projektionen einer Raumgrösse erhalten den Zeiger 4 rechts unten,

Antwort. Die **Pr. Eb.** E_4 kann entweder

a) zu einer der **Pr. Ebn.** E_1 oder E_2 senkrecht stehen oder sie kann

b) gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 eine beliebige Lage einnehmen.

so heisst z. B. die vierte Projektion eines Punktes a, a_4, einer Linie B, B_4 etc.

Erkl. 249. Die **Pr. Eb.** E_4 bildet mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 je ein Projektionssystem I—IV bezw. II—IV. Steht E_4 auf E_1 oder E_2 senkrecht, so heisst das neue Projektionssystem ein rechtwinkliges, im anderen Falle ein schiefwinkliges.

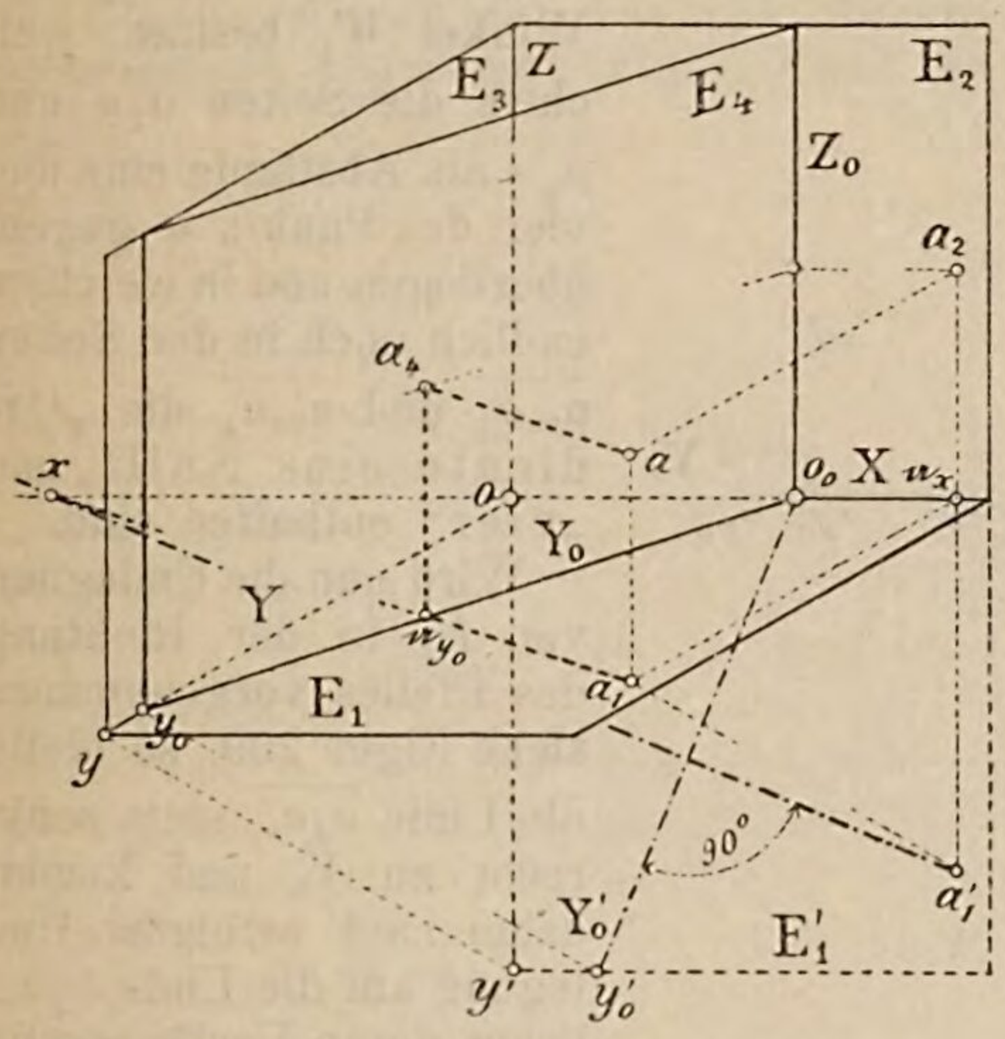
Frage 86. Wie erhält man die Projektion eines Punktes auf die **Pr. Eb.** E_4 unter der Voraussetzung, dass das neue Projektionssystem I—IV bezw. II—IV

a) ein rechtwinkliges,

b) ein schiefwinkliges

sei?

Figur 206.



Erkl. 250. Aus nebenstehender Antwort folgt der Satz:

„Für ein rechtwinkliges Projektionssystem I—IV liegen die erste und vierte Projektion eines Punktes in einer Senkrechten zu der zum Projektionssystem gehörigen Projektionsachse Y_0. Ausserdem ist die Entfernung der **vierten Projektion von Y_0** gleich der Entfernung der **zweiten Projektion von X.**“

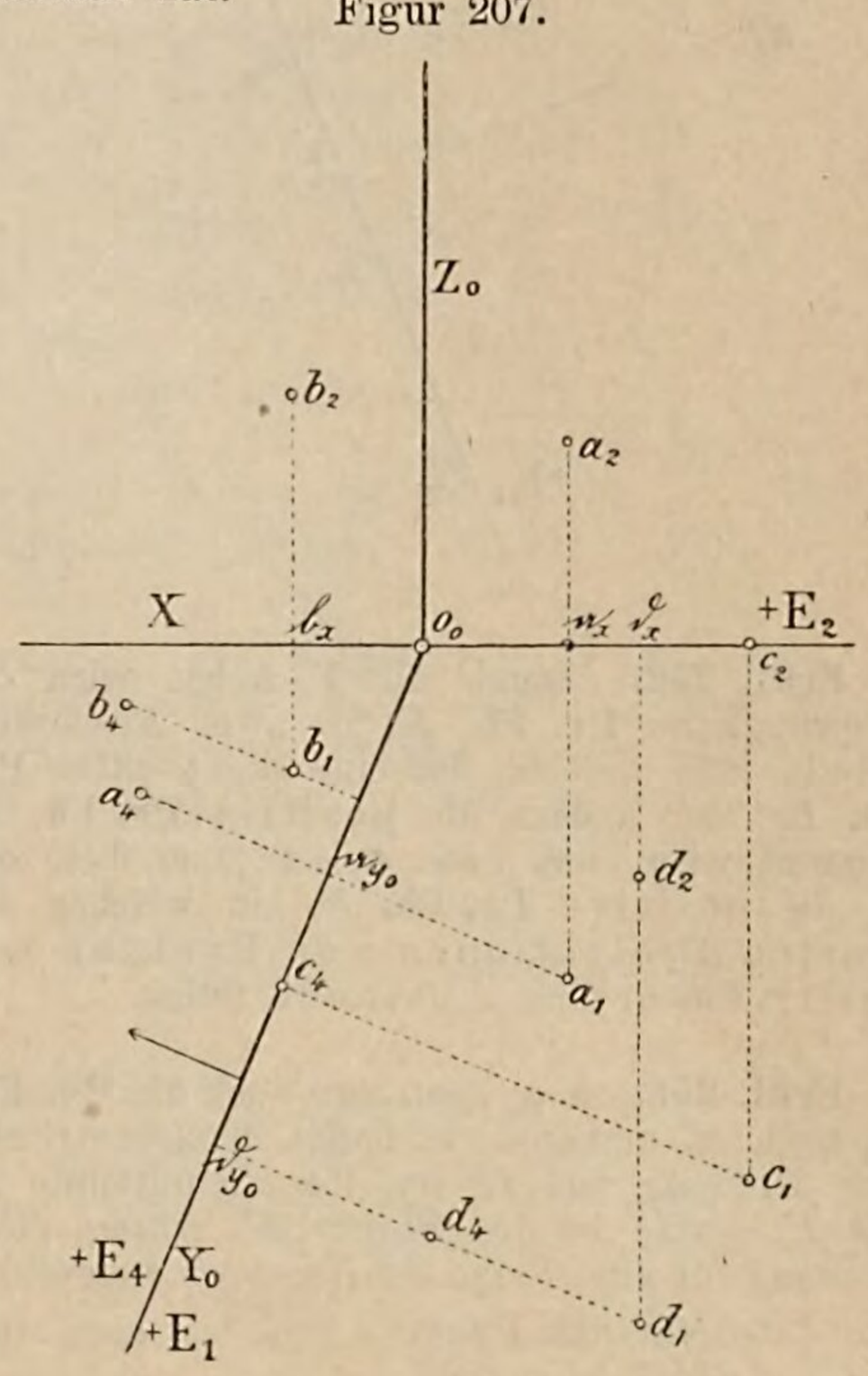
Erkl. 251. Wählt man auf Y_0 einen beliebigen Punkt, etwa gleich den Schnittpunkt o_0 von X und Y_0, so ist die Lage des Punktes a im Raume wieder vollständig bestimmt, sobald die drei Längen $\overline{o_0 a_{y_0}}$, $\overline{a_{y_0} a_1}$ u. $\overline{a_{y_0} a_4}$ der Grösse und dem Vorzeichen nach bekannt sind. Man nennt diese Längen die Coordinaten des Punktes a für das Projektionssystem I—IV und zwar heisst $\overline{o_0 a}$ die Abscisse, $\overline{a_{y_0} a_1}$ die „erste Ordinate mit dem Zeiger Null“ oder „Ordinate eins Null“, $\overline{a_y a_4}$ die vierte Ordinate oder „Ordinate vier“ des Punktes a.

Antwort a. Ist, siehe Figur 206, E_4 die neue zu E_1 senkrechte **Pr. Eb.** und fällt man vom Punkte a aus eine Senkrechte $a a_4$, siehe Anmerkung 16, (Projizierende) auf E_4, so ist ihr Fusspunkt a_4 die gesuchte Projektion a_4. Die durch a_1 und a_4 zu $a a_4$ bezw. $a a_1$ gezogenen Parallelen schneiden sich in einem Punkte a_{y_0}, der neuen Projektionsachse Y_0, derart, dass die vier Punkte $a a_1 a_{y_0} a_4$ ein Rechteck bilden.

Legt man nun die **Pr. Eb.** E_4 um Y_0 so in die **Pr. Eb.** E_1 um, dass a_1 und a_4 auf verschiedenen Seiten von Y_0 liegen, so bleibt die Linie $a_4 a_{y_0}$ stets senkrecht zu Y_0, d. h. a_1 und a_4 fallen nach erfolgter Umlegung in eine Senkrechte zu Y_0.

Man erhält daher die Projektionszeichnung, s. Figur 207, in welcher $\overline{a_{y_0} a_4} = \overline{a_x a_2}$ gemacht wurde. Der Pfeil gibt die Richtung an, in welcher die Umlegung von E_4 stattzufinden hat.

Figur 207.

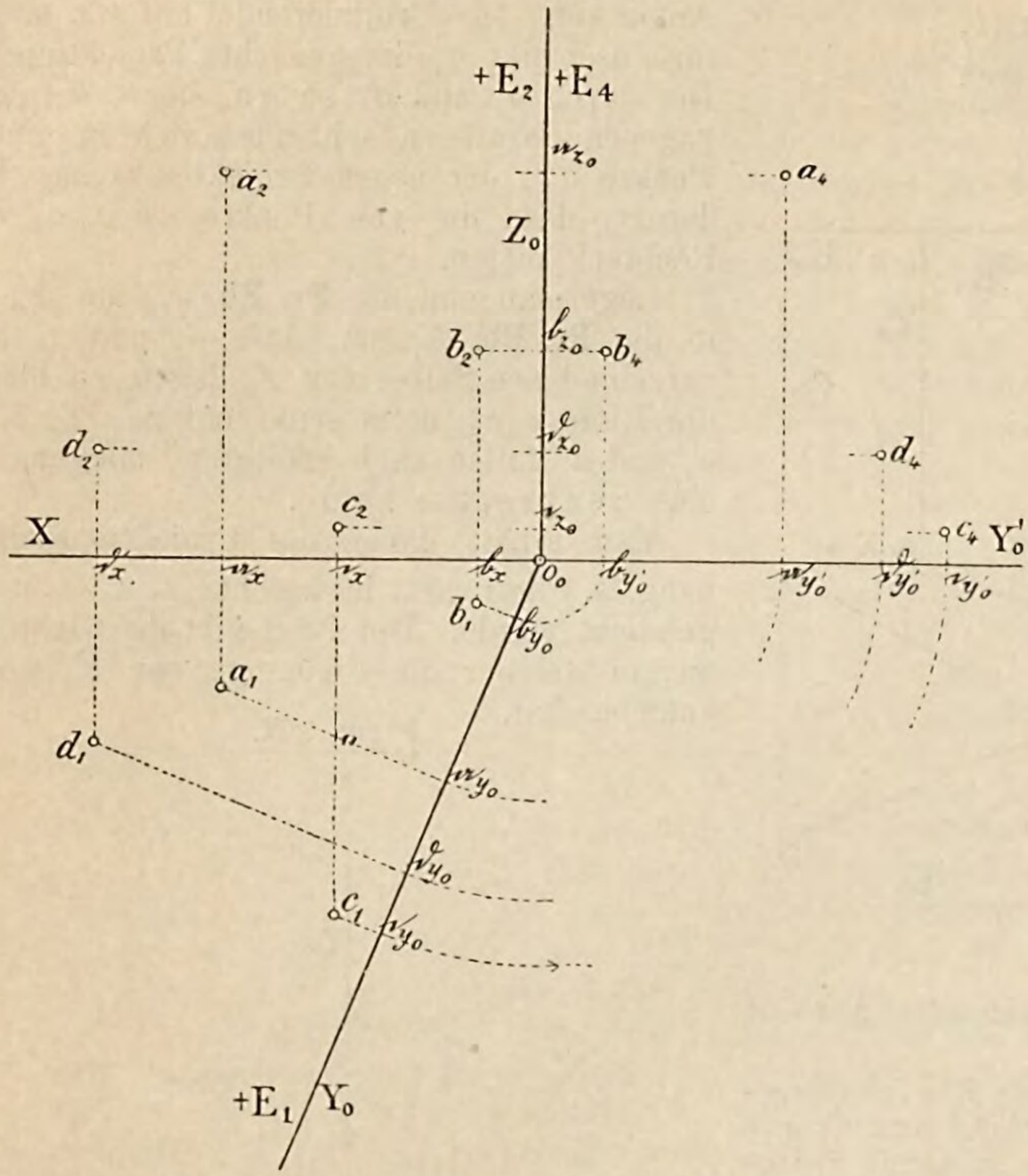


Der in Erkl. 250 enthaltene Satz lässt sich in Rücksicht auf das eben Gesagte nunmehr wie folgt aussprechen:

„Bei einem rechtwinkligen Projektionssystem I—IV ist stets die **Ordinate vier** eines Punktes **gleich der Ordinate zwei** und zwar sowohl der **Länge** wie dem **Sinne** nach.“

Auf Grund des eben genannten Satzes wurden in Figur 207 die vierten Projektionen a_4, b_4, c_4, d_4 der Punkte a, b, c, d konstruiert.

Figur 208.



Erkl. 252. Durch die Y_0-Achse wird die ursprüngliche **Pr. Eb.** E_1 in zwei Abschnitte geteilt, von welchen der eine die positive **Pr. Eb.** E_1, der andere die positive **Pr. Eb.** E_4 genannt wird, und zwar heisst jener Teil von E_1 die positive **Pr. Eb.** E_4, in welchen die vierten Projektionen von Punkten mit positivem ersten Abstande fallen.

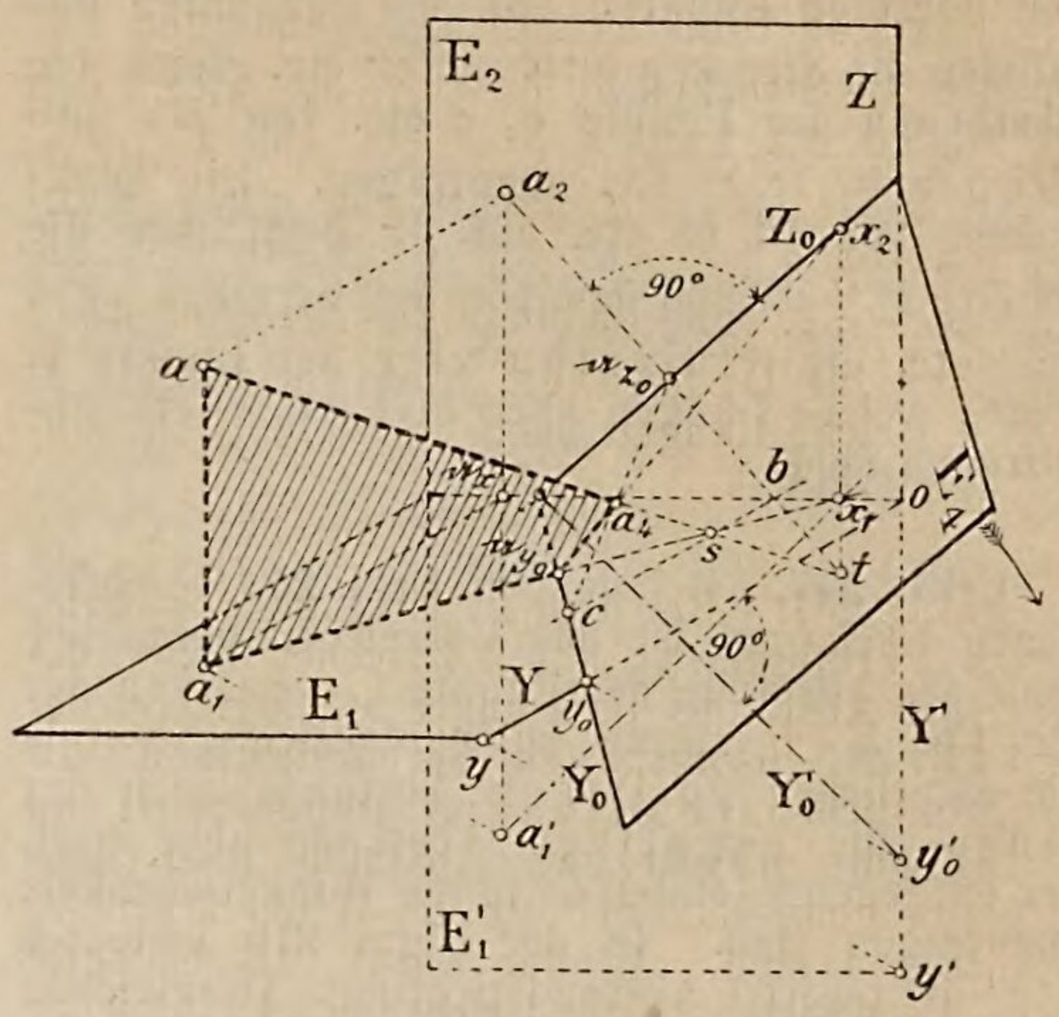
Erkl. 253. Man kann nun auch die **Pr. Eb.** E_4 nach E_2 umlegen; es findet in diesem Falle eine Drehung von E_4 um ihre Schnittlinie Z_0 mit E_2 statt: in der Figur 208 wurde diese Drehung für eine Reihe von Punkten ausgeführt und dabei für den Punkt a $\overline{o_0 a_{y_0}'} = \overline{o_0 a_{y_0}}$ und $\overline{a_{y_0}' a_4} = \overline{a_x a_2}$ gemacht.

Antwort b. Steht die **Pr. Eb.** E_4 schief auf E_1 bezw. E_2, so muss zu ihrer Bestimmung ihre Schnittlinie Y_0 bezw. Z_0, mit E_1 bezw. E_2, sowie ihr Neigungswinkel W_1 bezw. W_2 gegeben sein, je nachdem ein Projektionssystem I—IV oder II—IV benützt werden soll. Das erstere sei vorausgesetzt. Man erhält die rechtwinklige Projektion a_4 eines Punktes a auf E_4 als Fusspunkt, der von a auf E_4 gefällten Senkrechten, siehe Fig. 209; die drei Punkte a, a_1 und a_4 bestimmen eine zu E_1 und E_4, daher auch zu Y_0 senkrechte Ebene und ihr Schnittpunkt a_{y_0} mit Y_0 bildet die vierte Ecke eines Vierecks $a\,a_1\,a_{y_0}\,a_4$, (Konstruktionsviereck des Punktes a), das bei a_{y_0} den Winkel W_1 besitzt, welchem die Seiten $\overline{a_1 a}$ und $\overline{a_4 a}$ als Abstände eins und vier des Punkts a gegenüberliegen und in welchem endlich noch in den Seiten $\overline{a_{y_0} a_1}$ und $\overline{a_{y_0} a_4}$ die „Ordinate eins Null“ und „vier“ enthalten sind.

Wird nun die Umlegung von E_4 in der Richtung des Pfeiles vorgenommen, siehe Figur 209, so bleibt die Linie $\overline{a_4 a_{y_0}}$ stets senkrecht zu Y_0 und kommt daher nach erfolgter Umlegung auf die Linie $a_1 a_{y_0}$ bezw. deren Verlängerung zu liegen; die erste und vierte Projektion eines Punktes liegen somit wieder in einer Senkrechten zur Projektionsachse Y_0 des Systemes I—IV.

In der Projektionszeichnung, s. Fig. 210, ist das Konstruktionsviereck $a_1 a' a'' a_{y_0}$ in der Umlegung um die Linie $a_1 a_{y_0}$, welch letztere senkrecht zu Y_0 durch a_1 gezogen wurde, gezeichnet. Soll nun die Umlegung in die **Pr. Eb.** E_1 in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung geschehen, so hat man nur $a_1 a_{y_0}$ zu verlängern und $\overline{a_{y_0} a_4} = \overline{a_{y_0} a''}$ abzutragen. a_4 ist die vierte Projektion von a nach erfolgter Umlegung.

Figur 209.

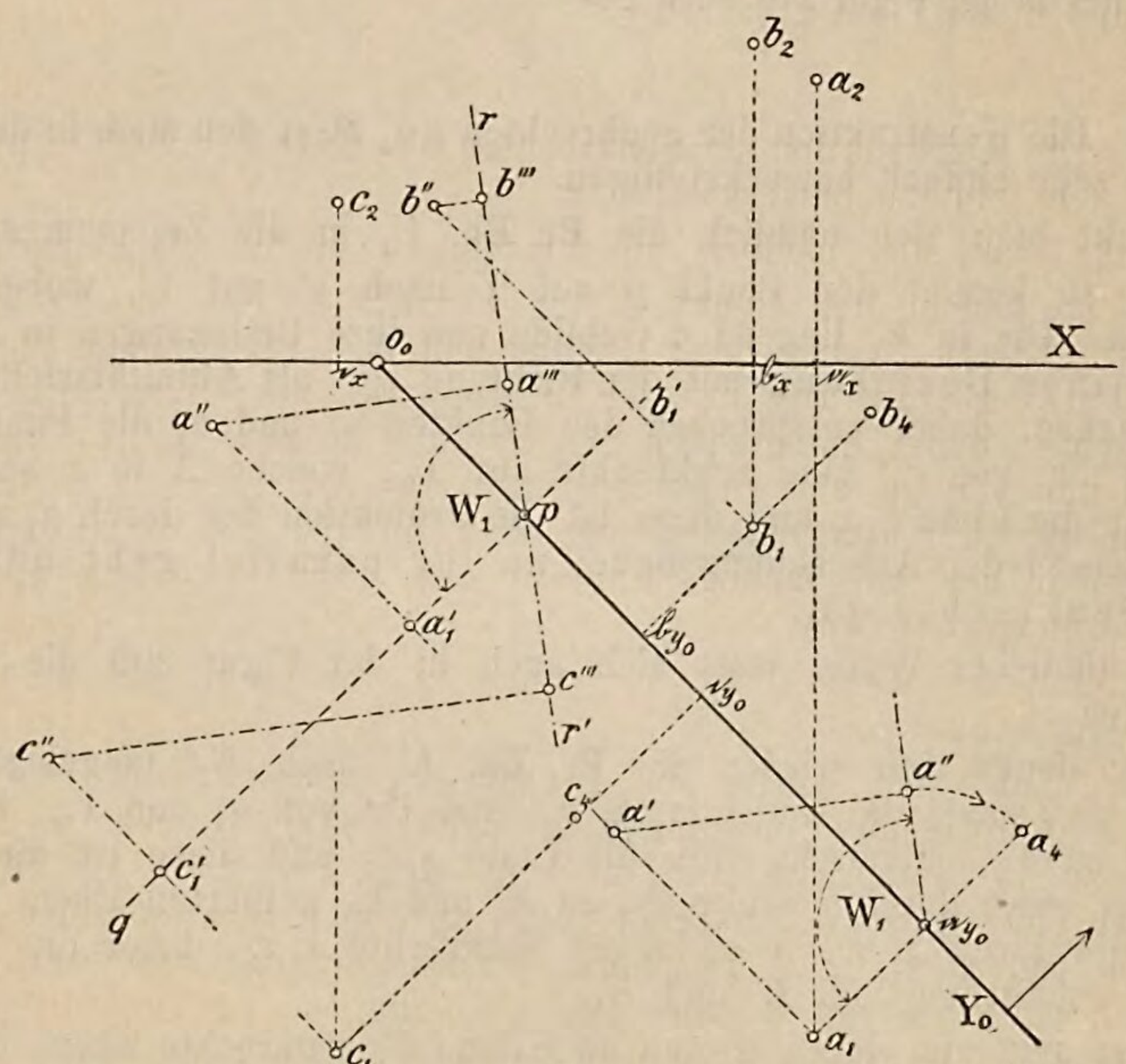


Erkl. 254. Steht die **Pr. Eb.** E_4 zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht, d. h. hat man ein Projektionssystem II—IV, so bleiben die in den Erkl. 250 und 251 angeführten Sätze in Gültigkeit, nur ist überall statt „erste Projektion“ bezw. „Ordinate zwei“ zu setzen: „zweite Projektion“ bezw. „Ordinate eins“.

Erkl. 255. Nebenstehende Antwort enthält folgenden Satz:

„Bei einem schiefwinkligen Projektionssystem I—IV (II—IV) liegen die erste (zweite) und vierte Projektion eines Punktes in einer Senkrechten zur neuen Projektionsachse Y_0 (Z_0). Die Entfernung der vierten Projektion von Y_0 (Z_0) bestimmt sich aus dem **Konstruktionsviereck** des zugehörigen Punktes.“

Figur 210.



Erkl. 256. Sind von mehreren Punkten b, c etc. die Projektionen auf E_4 herzustellen, so gehört zu jedem Punkte ein Konstruktionsviereck mit dem Winkel W_1 an der auf Y_0 liegenden Ecke. Bei einer Parallelverschiebung dieser Vierecke längs der Y_0-Achse nach einem beliebig auf letztere Linie gewählten Punkte p decken sich die den Winkel W_1 einschliessenden Seiten mit den Linien pq und pr.

Behufs Konstruktion der Ordinaten vier hat man nur durch die ersten Projektionen b_1,

c_1 etc. der Punkte b, c etc. Parallele zu Y_0 bis zum Schnitt b_1', c_1' etc. mit pq zu ziehen und von letzteren Punkten auf den genannten Parallelen die Strecken $\overline{b_1'b''}$, $\overline{c_1'c''}$ etc. gleich den Abständen der Punkte b, c etc. von E_1, also gleich $\overline{\mathfrak{b}_x b_2}$, $\overline{\mathfrak{c}_x c_2}$ etc. abzutragen. Die Senkrechten von b'', c'' etc. auf pr bestimmen die Punkte b''', c''' und damit in den Strecken $\overline{pb'''}$, $\overline{pc'''}$ etc. die Ordinaten vier der Punkte b, c etc., welche Längen nach $\mathfrak{b}_{y_0} b_4$, $\mathfrak{c}_{y_0} c_4$ etc. abzutragen sind.

Erkl. 257. Bei dem in Erkl. 254 beschriebenen Verfahren ist das Vorzeichen bezw. der Sinn der Abstände der Punkte b, c etc. von der **Pr. Eb.** E_1 insoferne zu berücksichtigen, als die sämtlichen positiven Abstände nach der einen, die negativen Abstände aber nach der entgegengesetzten Seite des Winkelschenkels abzutragen sind. In der Figur 210 bedeutet $c_1'c''$ die positive Abstandsrichtung. Desgleichen gehören auch die auf pr liegenden Punkte nach der gleichen, die auf pr' liegenden Punkte aber nach der entgegengesetzten Seite von Y_0 abgetragen, wie dies in der Figur 210 auch geschehen ist.

Anmerkung 16. Die Konstruktion der Senkrechten aa_4 lässt sich auch in der Anschauungsfigur 206 sehr einfach bewerkstelligen.

Denkt man sich nämlich die **Pr. Eb.** E_1 in die Zeichnungsebene nach E_1' umgelegt, so kommt der Punkt y auf Y nach y' auf Y', wobei $\overline{oy} = \overline{oy'}$ zu machen ist. Die in E_1 liegenden Gebilde und ihre Umlegungen in E_1 stehen offenbar in affiner Beziehung mit der Richtung yy' als Affinitätsrichtung und X als Affinitätsachse, daher entsprechen den Punkten y_0 und a_1 die Punkte y_0' und a_1'. Fällt man nun von a_1' eine Senkrechte auf Y_0', welche X in x schneidet, so entspricht ihr die Linie a_1x und diese ist die Projektion der durch a_1 zu Y_0 gezogenen Senkrechten in der Anschauungsfigur; zu ihr parallel geht durch a die gesuchte Senkrechte aa_4.

In ähnlicher Weise lässt sich auch in der Figur 209 die Senkrechte aa_4 konstruieren.

Man denkt sich wieder die **Pr. Eb.** E_1 nach E_1' umgelegt, ermittelt die Richtung yy' sowie die Umlegungen a_1' und Y_0' von a_1 und Y_0. Der Senkrechten durch a_1' zu Y_0' entspricht affin die Linie a_1x_1 und diese ist die Projektion der ersten Spur einer durch a senkrecht zu E_1 und E_0 geführten Ebene E'; ihre zweite Spur ist die durch x_1 zu X gezogene Senkrechte x_1x_2, daher die Verbindungslinie $\mathfrak{a}_{y_0}x_2$ die Schnittlinie von E' und E_4.

Legt man nun durch a eine zu E_2 und E_4 senkrechte Ebene E'', so schneidet dieselbe die E_2 nach der durch a_2 zu Z_0 gezogenen Senkrechten a_2b, die E_1 nach der zu Y parallelen Linie bc, daher die E_4 nach der Linie $c\mathfrak{a}_{z_0}$ und letztere trifft die $\mathfrak{a}_{y_0}x_2$ in dem Fusspunkte a_4 der gesuchten Senkrechten aa_4.

Die Linien aa_4 und $a_1\mathfrak{a}_{y_0}$ begegnen sich in einem Punkte s auf cd liegend, die Linien aa_4 und $a_2\mathfrak{a}_{z_0}$ haben den Punkt t auf x_1x_2 gemein.

Mit Benützung des eben Gesagten ergibt sich eine noch einfachere Konstruktion der Linie aa_4. Welche?

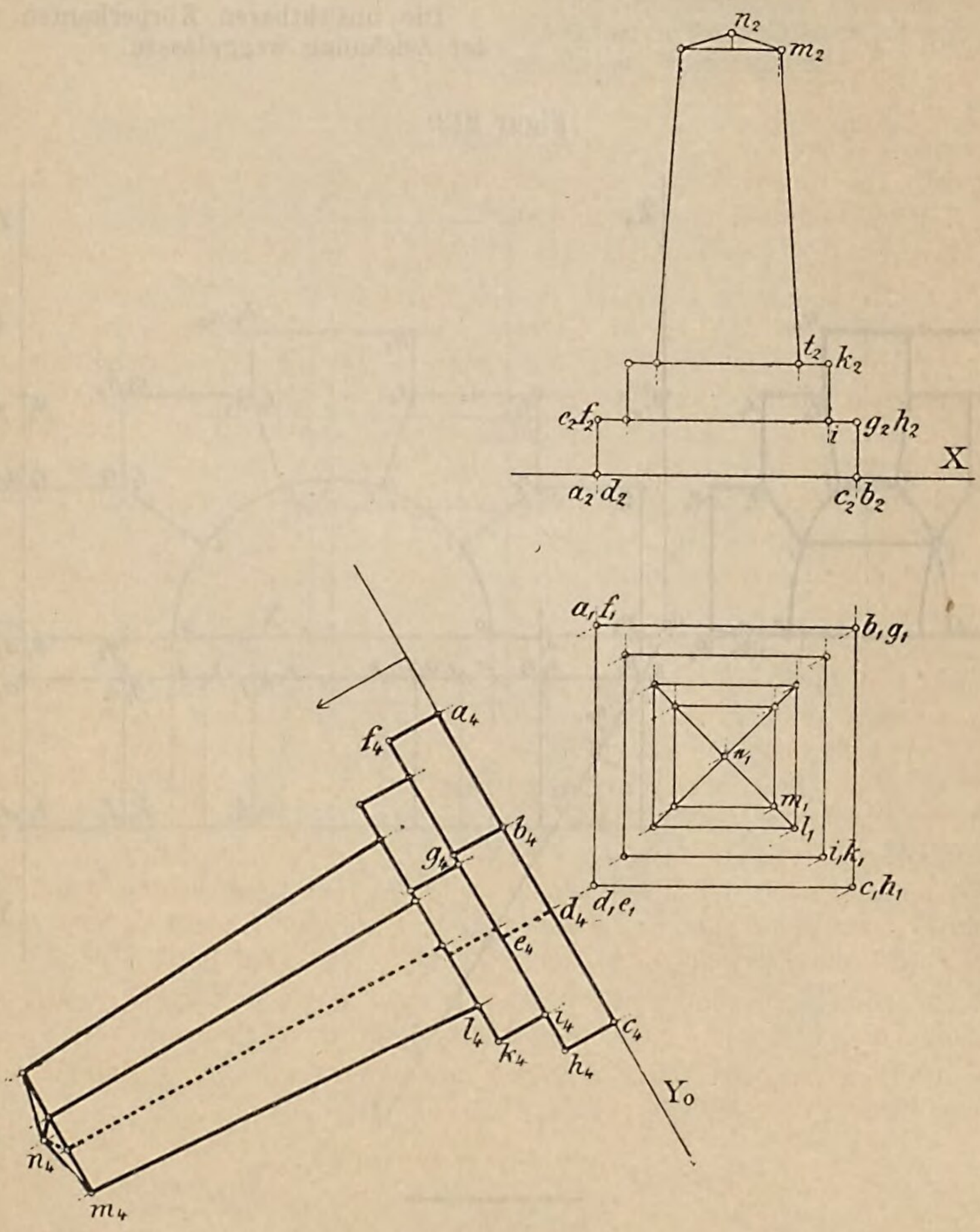
b) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 107. Ein Körpersystem, siehe Figur 211, ist durch seine rechtwinkligen Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 dargestellt. Man soll das Körpersystem auf eine zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechte **Pr. Eb.** E_4 projizieren, welche die E_1 nach der Geraden Y_0 schneidet.

Auflösung. Nach dem in der Antwort a. der Frage 86 Gesagten hat man, um die gesuchte Projektion zu erhalten, nur von den ersten Projektionen a_1, b_1, $c_1 \cdots n_1$ Senkrechte auf Y_0 zu fällen und von Y_0 aus auf diesen Senkrechten in der Richtung des Pfeiles die ersten Abstände der zugehörigen Punkte abzutragen. So ist z. B.: $\overline{a_4 f_4} = \overline{a_2 f_2}$.

Mit Bezugnahme auf Erkl. 179a wird die Unterscheidung zwischen sichtbaren und unsichtbaren Kanten so, wie in der Figur geschehen, vorgenommen werden müssen.

Figur 211.



Aufgabe 108. Ein cylindrischer Mauerbogen ist durch seine rechtwinkligen Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 dargestellt. Es sollen seine rechtwinkligen Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_3 und E_4 gezeichnet werden, welche beide auf der **Pr. Eb.** E_1 senkrecht stehen und letztere Ebene nach den Geraden Y und Y_0 schneiden.

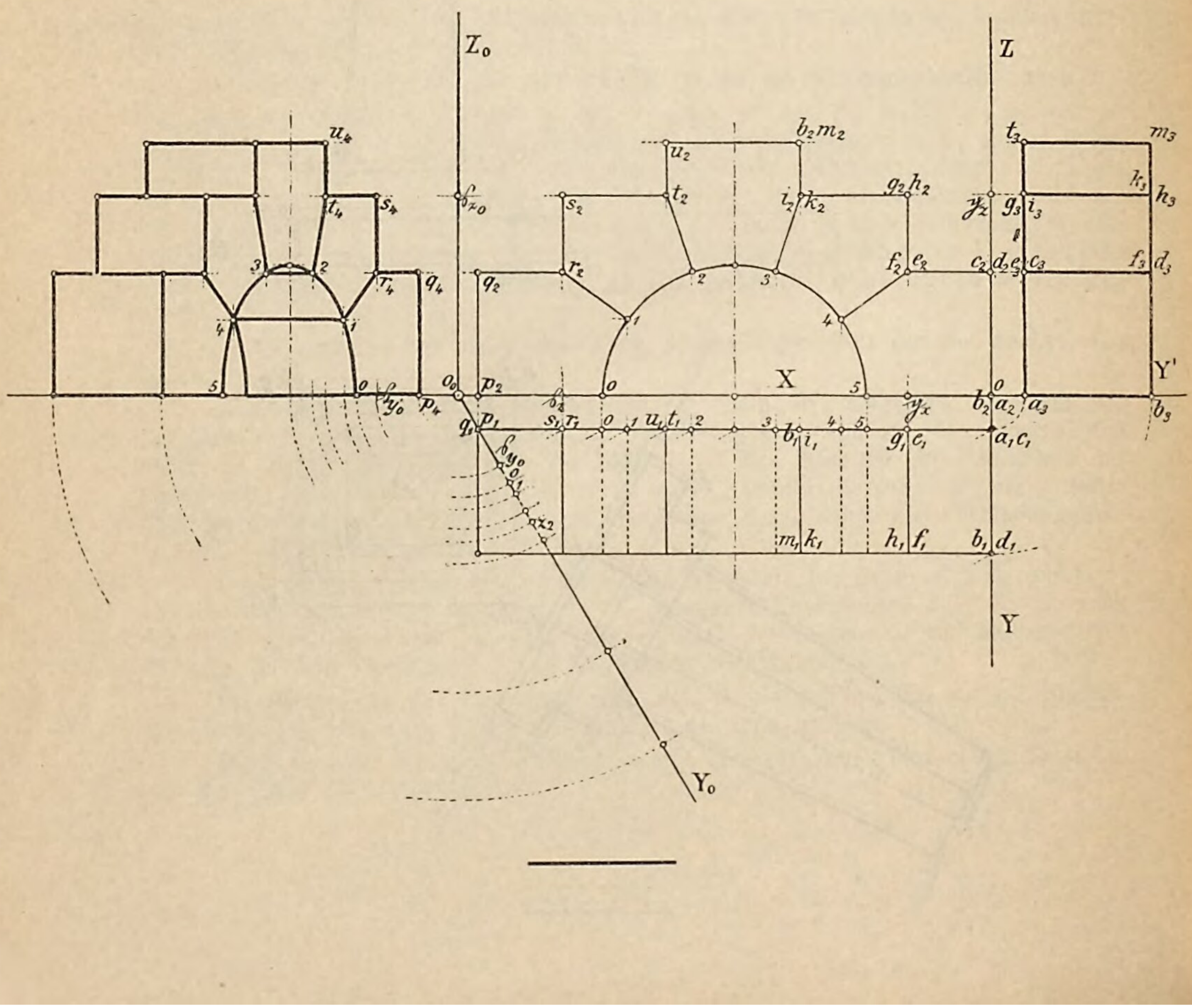
Auflösung a. Unter der Voraussetzung, dass die **Pr. Eb.** E_3 um die Achse Z in die **Pr. Eb.** E_2 umgelegt werden soll, hat man nur von den zweiten Projektionen Senkrechte zu Z, d. h. Parallele zur X-Achse zu ziehen und die Abstände der dritten Projektionen von Z gleich jenen der ersten Projektionen von A zu machen, so ist z. B. $\overline{\mathfrak{g}_z g_3} = \overline{\mathfrak{g}_x g_1}$.

Auflösung b. Es soll wieder E_4 um die Achse Z_0 in die **Pr. Eb.** E_2 umgelegt werden. Mit Bezugnahme auf Erkl. 253 gelten dann für den Punkt s die Beziehungen:

$$\overline{o_0 \mathfrak{S}_{y_0}'} = \overline{o_0 \mathfrak{S}_{y_0}} = \overline{\mathfrak{S}_{z_0} s_4};\ \overline{\mathfrak{S}_{y_0}' s_4} = \overline{\mathfrak{S}_z s_2}$$

Die unsichtbaren Körperkanten wurden in der Zeichnung weggelassen.

Figur 212.



Aufgabe 109. Der durch seine Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 dargestellte Würfel ist auf eine gegen die **Pr. Eb.** E_1 unter dem Winkel W_1 geneigte und diese nach der Geraden Y_0 schneidende **Pr. Eb.** E_4 zu projizieren. Die E_4 ist in die E_1 umzulegen.

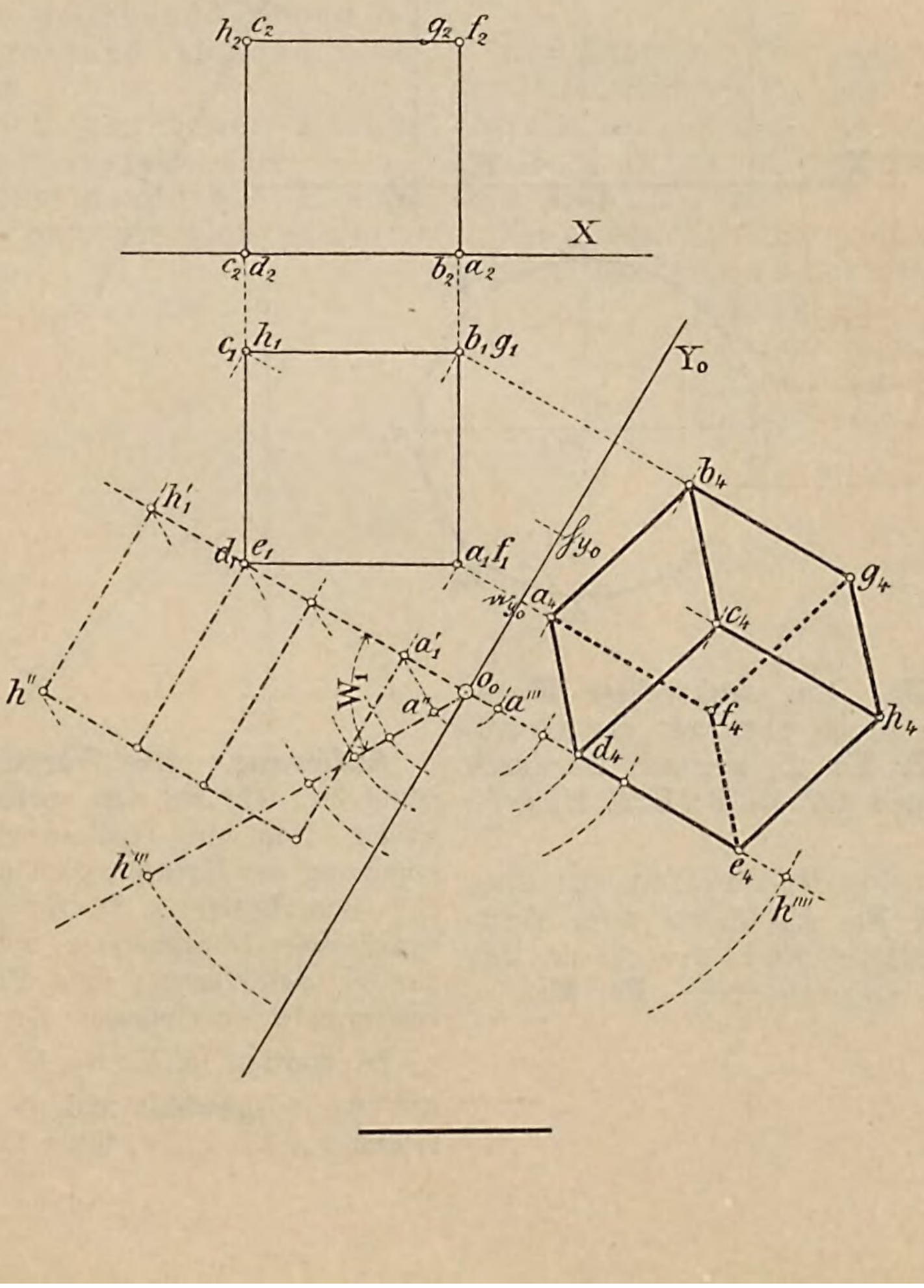
Auflösung. Mit Bezugnahme auf die Antwort b. der Frage 86 bestimmen sich die vierten Projektionen der Würfelecken wie folgt:

Für die vier in E_1 liegenden Punkte a, b, c, d gehen die Konstruktionsvierecke in Dreiecke über; für den Punkt a heisst dieses Dreieck $o_0 a_1' a''$ und es ist $\overline{o_0 a''}$, $\overline{\mathfrak{a}_{y_0} a_4}$ abzutragen.

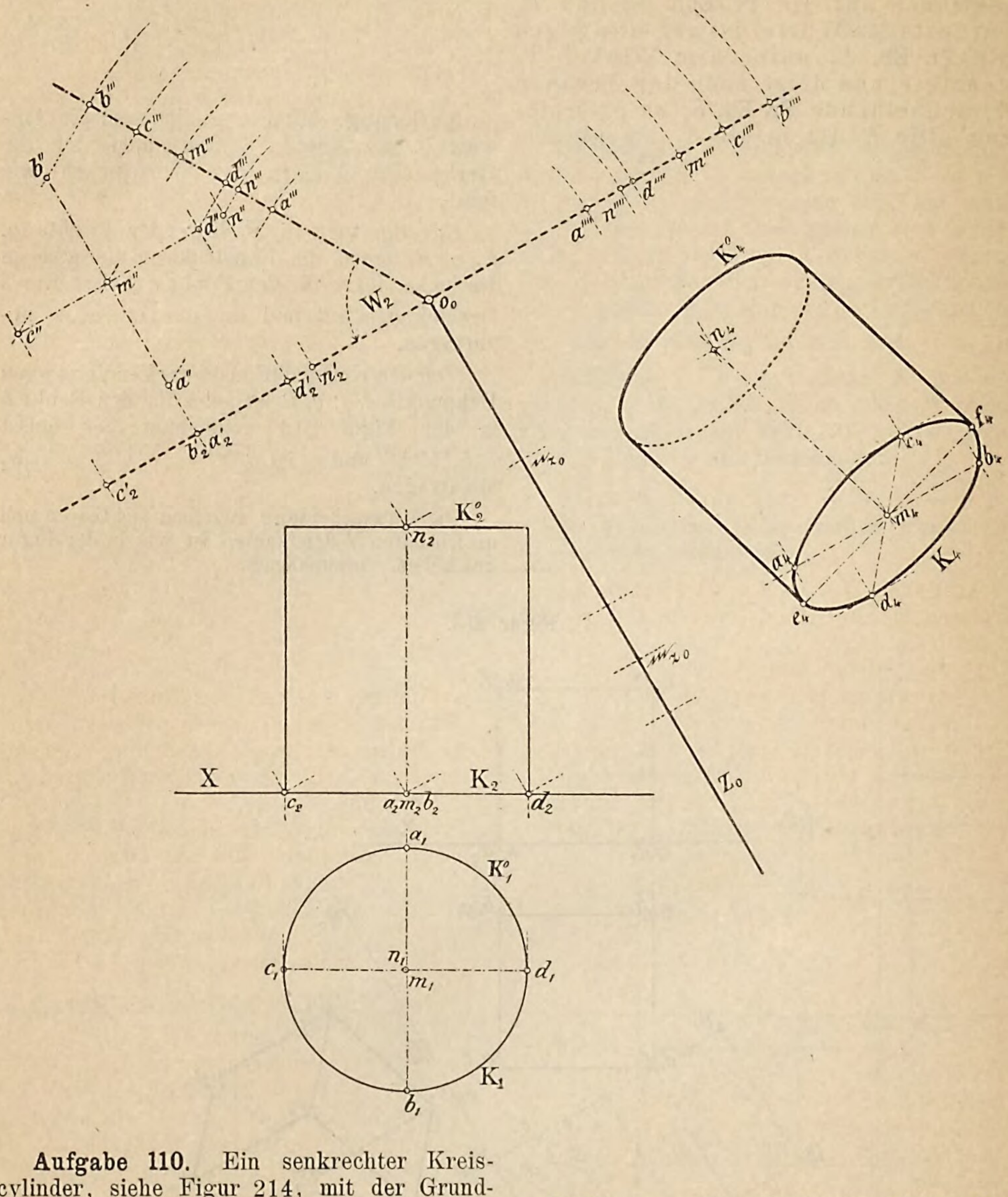
Von den Konstruktionsvierecken der oberen Eckpunkte e, f, g, h ist jenes für den Punkt h in der Figur 213 gezeichnet; es heisst $o_0 h_1' h'' h'''$ und es ist $\overline{o_0 h'''} = \overline{o_0 h''''} = \overline{\mathfrak{h}_{y_0} h_4}$ abzutragen.

Die Unterscheidung zwischen sichtbaren und unsichtbaren Würfelkanten ist wie in der Figur geschehen, vorzunehmen.

Figur 213.



Figur 214.



Aufgabe 110. Ein senkrechter Kreiscylinder, siehe Figur 214, mit der Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegend, ist durch seine Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 u. E_2 dargestellt.

Man soll seine Projektion auf eine gegen die **Pr. Eb.** E_2 unter dem Winkel W_2 geneigte und sie nach der Geraden Z_0 schneidende **Pr. Eb.** E_4 zeichnen.

Auflösung. Das Verfahren bleibt das nämliche, wie bei den vorhergehenden Aufgaben. Nur wird man zweckmässig zur Bestimmung der Kreisprojektionen in dem einen der Grundkreise, z. B. K, zwei aufeinander senkrechte Durchmesser wählen und diese auf E_4 projizieren; ihre Projektionen sind conjugierte Durchmesser der Ellipse K_4.

So wurden im Kreise K die Durchmesser $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ gewählt und die vierten Projektionen a_4, b_4, c_4, d_4 ihrer Endpunkte mittels

der zugehörigen Konstruktionsvierecke gezeichnet. Für den Mittelpunkt m ist $\overline{o_0 m'''} = \overline{o_0 m''''} = \overline{\mathfrak{m}_{z_0} m_4}$ zu machen. In ähnlicher Weise ergibt sich auch die vierte Projektion n_4 des Mittelpunktes n des zweiten Begrenzungskreises K^0.

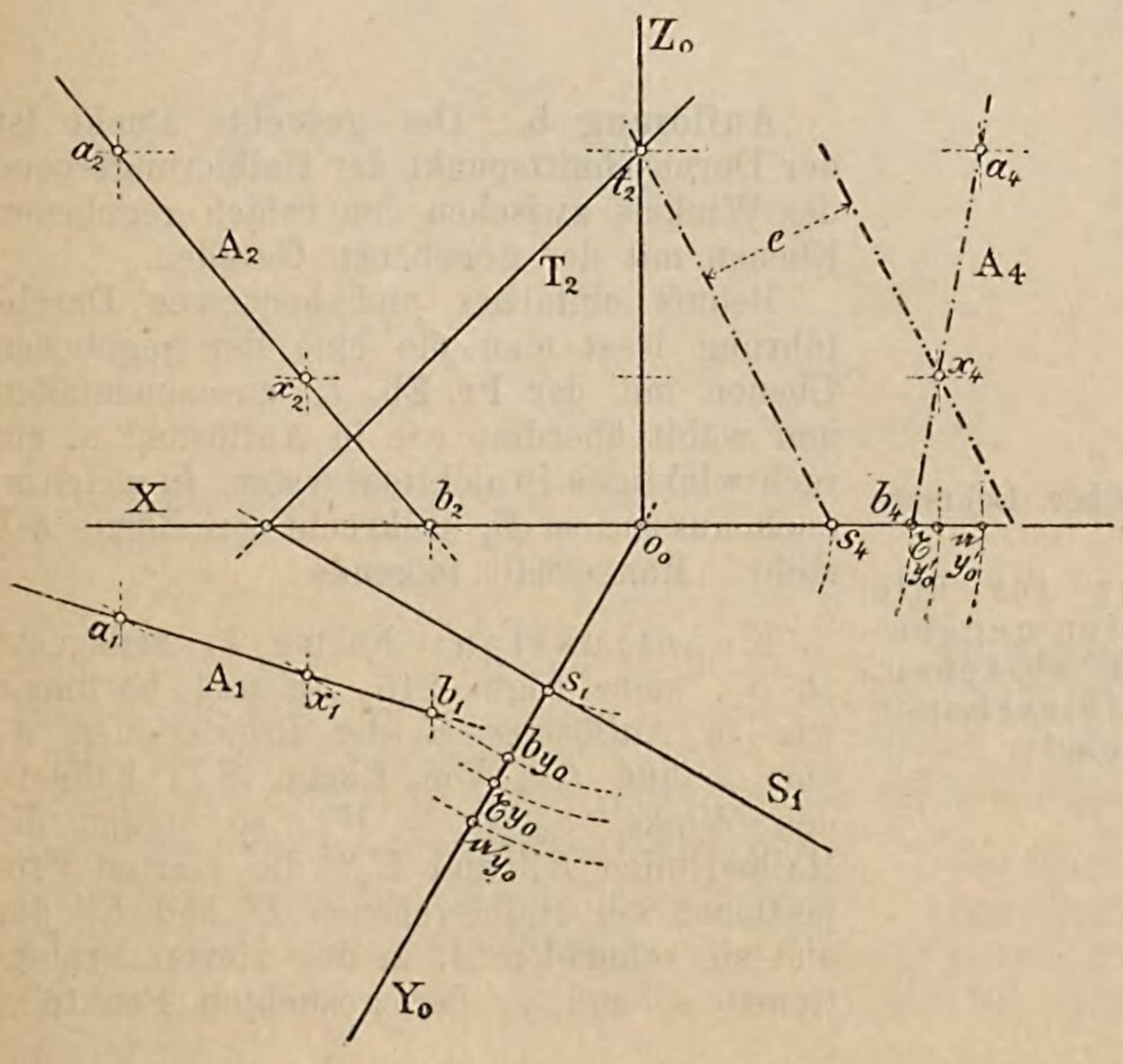
Man kann nunmehr die Ellipse K_4 mit Bezugnahme auf Frage und Antwort 54 konstruieren. Berücksichtigt man aber, dass die grosse Achse $\overline{e_4 f_4}$ von K_4 auf $m_4 n_4$ senkrecht steht und ihrer Länge nach dem Durchmesser von K gleich ist, die kleine Achse aber mit $m_4 n_4$ sich deckt, so lässt sich die Ellipse auch mit Bezugnahme auf Aufgabe 63 konstruieren, da man ja von ihr die grosse Achse der Grösse und Lage nach, sowie noch die weiteren Punkte a_4, b_4, c_4, d_4 kennt.

Die zweite Begrenzungsellipse K_4^0 ist parallel und kongruent zu K_4. Die parallelen gemeinsamen Tangenten an K_4 und K_4^0 vervollständigen die vierte Projektion des Cylinders.

Aufgabe 111. Es ist ein Punkt zu konstruieren, der auf einer Geraden A liegt und ausserdem:

a) von einer gegebenen Ebene ST einen gegebenen Abstand e besitzt, oder
b) von zweien gegebenen Ebenen gleich weit absteht, oder
c) von zweien gegebenen Ebenen Abstände hat, die sich wie $m:n$ verhalten.

Figur 215.



Auflösung a. Der gesuchte Punkt ist der Durchschnittspunkt einer zur gegebenen Ebene in dem gegebenen Abstande gezogenen Parallelebene mit der gegebenen Geraden, siehe Erkl. 258.

Zur Erzielung einer einfachen und bequemen Konstruktion wählt man zweckmässig eine **Pr. Eb.** E_4 senkrecht zu E_1 und zur gegebenen Ebene ST und löst die Aufgabe im Projektionssystem I—IV.

Man erhält folgende

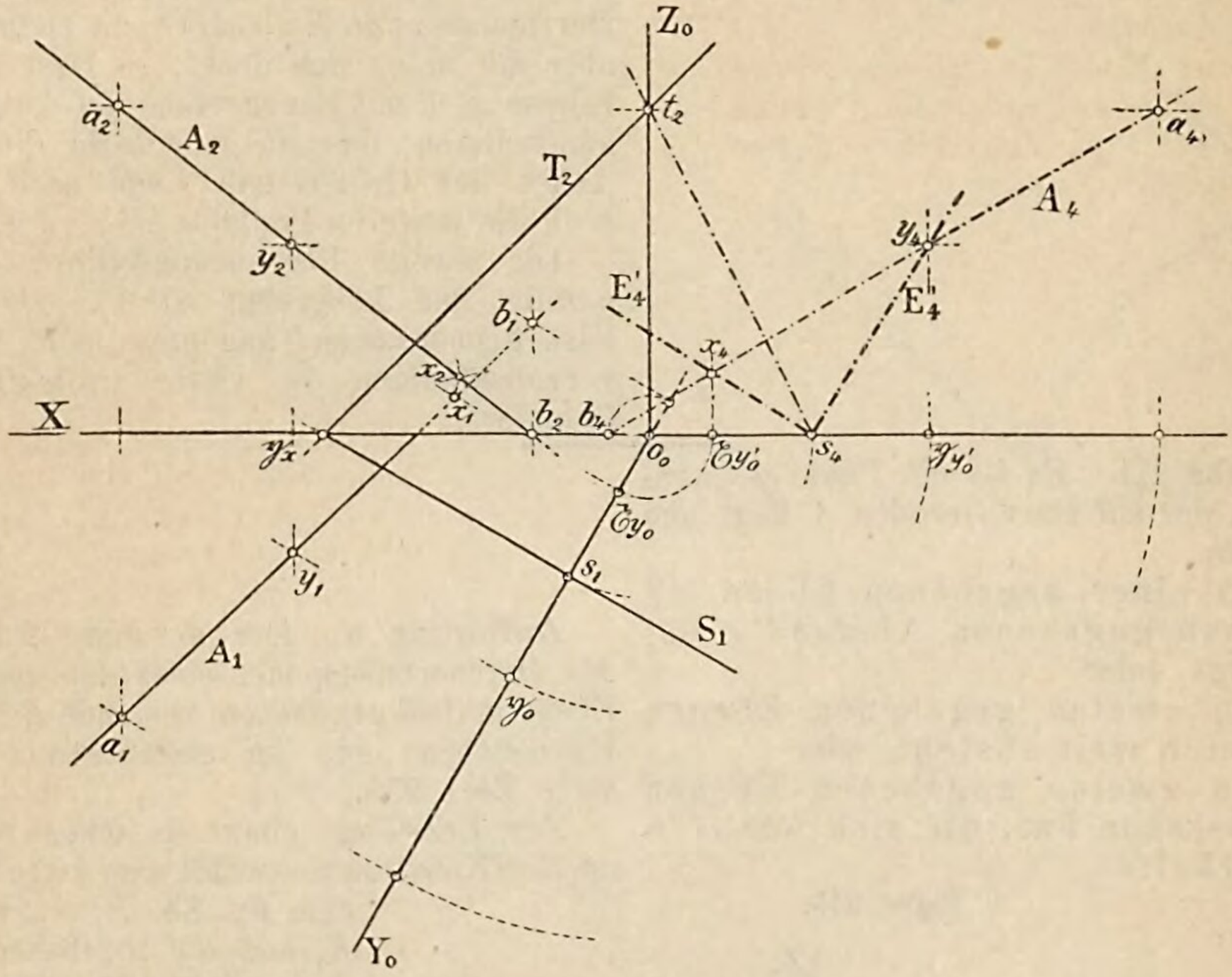
Konstruktion: Ist Y_0 (senkrecht zu S_1), siehe Figur 215, die neue Projektionsachse, so bestimme man, wie früher angegeben, die vierten Projektionen a_4 u. b_4 zweier beliebig auf A gewählten Punkte a und b, desgleichen die vierten Projektionen der Punkte s und t, so ist die Linie $s_4 t_2$ die vierte Projektion der Ebene und daher die im Abstande e zu $s_4 t_2$ gezogene Parallele die vierte Projektion der oben genannten Parallelebene; sie schneidet A_4 in der vierten Projektion x_4 des gesuchten Punktes x.

Erkl. 258. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einer Ebene gegebenen Abstand haben, ist gebildet durch die im gegebenen Abstande zur Ebene gezogenen Parallelebenen."

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Figur 216.



Auflösung b. Der gesuchte Punkt ist der Durchschnittspunkt der Halbierungsebene des Winkels zwischen den beiden gegebenen Ebenen mit der gegebenen Geraden.

Behufs einfacher und bequemer Durchführung lässt man die eine der gegebenen Ebenen mit der **Pr. Eb.** E_1 zusammenfallen und wählt überdies wie in Auflösung a. ein rechtwinkliges Projektionssystem, in welchem noch ausserdem E_4 senkrecht zur Ebene ST steht. Man erhält folgende

Konstruktion: Nehme Y_0 senkrecht zu S_1, siehe Figur 216, an und bestimme wie in Auflösung a. die Projektionen A_4 von A und $t_2 s_4$ von Ebene ST; halbiere den Winkel $o_0 s_4 t_2 = W_1$, so stellen die Halbierlinien E_4' und E_4'' die vierten Projektionen der Halbierebenen E' und E'' dar und sie schneiden A_4 in den vierten Projektionen x_4 und y_4 der gesuchten Punkte x

Erkl. 259. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zweien gegebenen Ebenen gleich weit abstehen, ist gebildet durch die Halbierebenen der Winkel beider Ebenen."

Aus x_4 ergeben sich durch Zurückprojizieren auf A_2 und A_1 die Projektionen x_2 und x_1 von x.

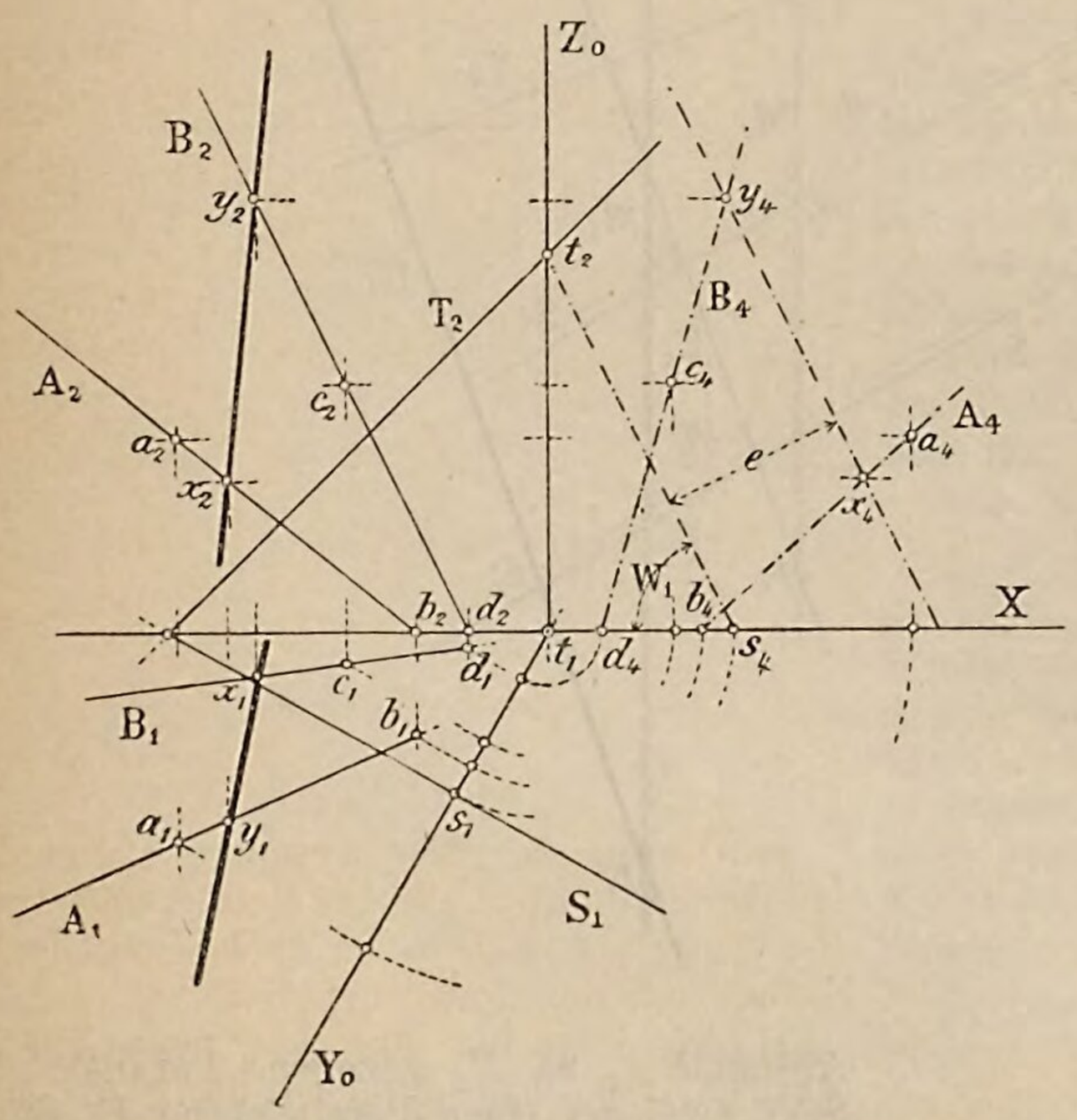
Da es zwei Parallelebenen zu ST in gegebenem Abstande e gibt, so sind auch zwei Punkte der verlangten Art vorhanden.

Erkl. 260. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zweien gegebenen Ebenen gegebenes Abstandsverhältnis besitzen, ist gebildet durch jene Ebenen, welche die Winkel bezw. Nebenwinkel beider Ebenen in dem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$ teilen."

Aufgabe 111 a. Es ist eine Gerade zu zeichnen, welche in gegebenem Abstande e zu einer Ebene ST parallel läuft und zwei Gerade A und B schneidet.

Figur 217 a.



Auflösung. Die gesuchte Gerade ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte einer im gegebenen Abstande e zu ST geführten Parallelebene E' mit den Geraden A und B.

Man erhält folgende

Konstruktion: Wähle eine **Pr. Eb.** E_4 senkrecht zur gegebenen Ebene ST und zur **Pr. Eb.** E_1 (Y_0 senkrecht S_1), bestimme die vierte Projektion $t_2 s_4$ der Ebene und der im gegebenen Abstande e zu $t_2 s_4$ geführten Parallelebene E' sowie die vierten Projektionen A_4 und B_4 von A und B, wodurch man die vierten Projektionen x_4 und y_4 der Schnittpunkte x und y_1 erhält. Durch Zurückprojizieren findet man x_2, y_2 bezw. x_1 und y_1. Die Gerade xy ist die gesuchte.

Da zwei Parallelebenen im gegebenen Abstande zur Ebene ST vorhanden sind, so gibt es auch zwei Ebenen der gesuchten Art.

Aufgabe 112. Es ist ein Punkt zu konstruieren, der

a) von dreien Ebenen MN, ST, UV gegebene Abstände e_1, e_2 und e_3 hat, oder

b) von vier gegebenen Ebenen gleich weit absteht, oder endlich

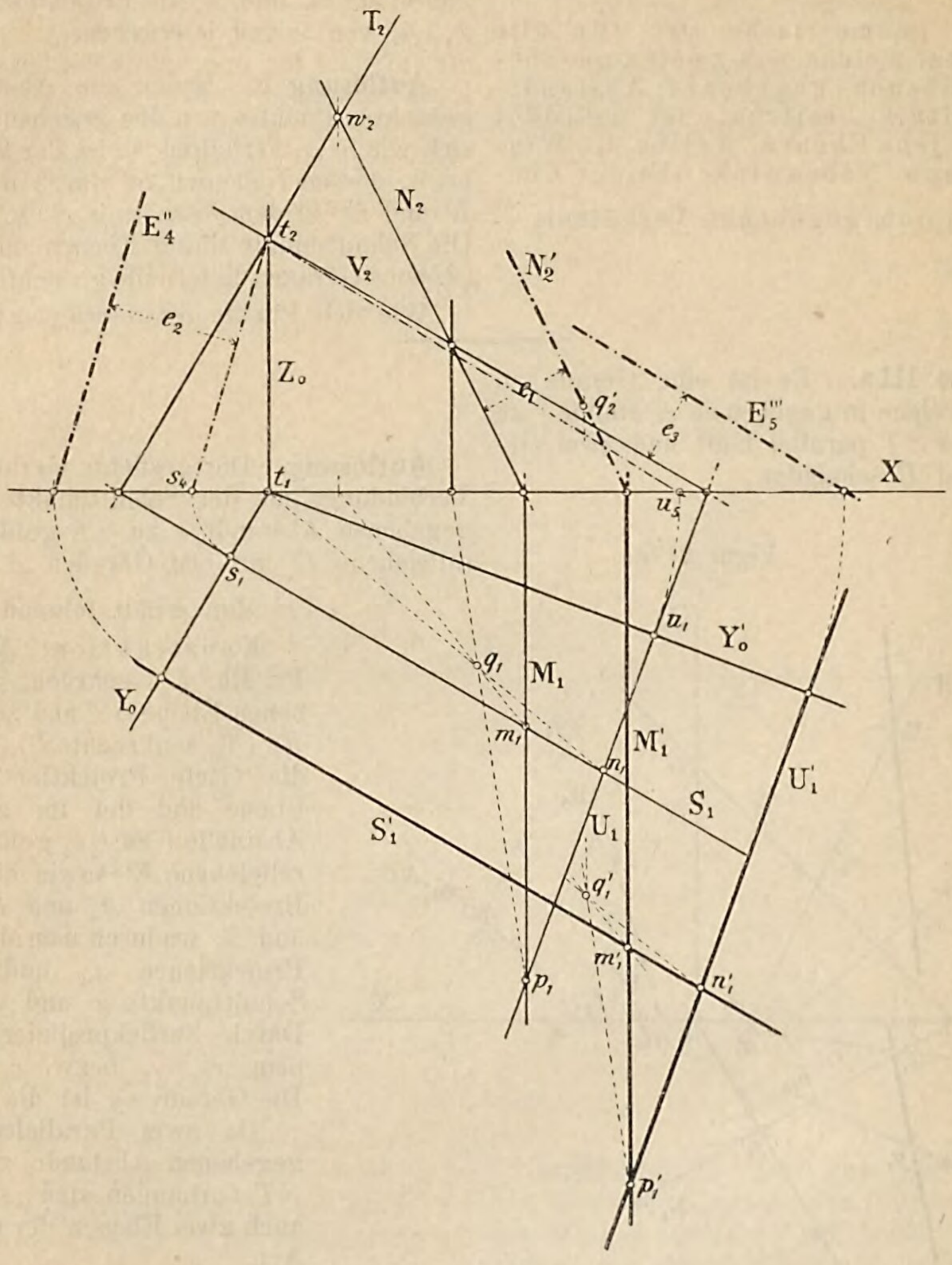
c) von vier gegebenen Ebenen Entfernungen besitzt, welche sich wie $m:n:p:q$ verhalten.

Auflösung a. Der gesuchte Punkt ist nach Erkl. 258 der Durchschnittspunkt dreier in den gegebenen Entfernungen zu den gegebenen Ebenen geführten Parallelebenen.

Man erhält folgende

Konstruktion: Nehme der Einfachheit halber die **Pr. Eb.** E_2 senkrecht zur Ebene MN an, siehe Figur 217, so wird eine im

Figur 217.



Abstande e_1 zu N_2 gezogene Parallele die Spur zwei der einen Parallelebene E' sein.

Zur weiteren konstruktiven Lösung wähle man zunächst eine **Pr. Eb.** E_4 senkrecht zu E_1 und Ebene ST, bestimme die vierte Projektion $t_2 s_4$ von Ebene ST, ziehe im Abstande e_2 von $s_4 t_2$ zu letzterer Linie die Parallele E_4'' und ermittele durch Zurückprojizieren die erste Spur S_1' der Ebene E''. In gleicher Weise bestimme mit Zuhilfenahme einer **Pr. Eb.** E_5, senkrecht zu E_1 und Ebene UV, die erste Spur U_1' der zur Ebene UV im Abstande e_3 geführten Parallelebene E'''.

Nun schneiden sich die drei gegebenen Ebenen in einem Punkte q, die drei Parallelebenen in einem Punkte q' und man erhält q_1'

als Schnittpunkt der durch die Ecken des Spurendreiecks $m_1' n_1' p_1'$ zu den Linien $m_1 q_1$, $n_1 q_1$, $p_1 q_1$, den ersten Projektionen der Schnittlinien der gegebenen Ebenen, geführten Parallellinien. q_2' liegt auf N_2'.

Wie viele Punkte der gesuchten Art gibt es und welche Lagen haben dieselben zu einander?

Auflösung b. Die vier Ebenen sollen bestimmt sein durch die Ecken eines Vierflächners, sie heissen dann Ebene abc, abd, bcd und acd.

Der Einfachheit halber wähle man die **Pr. Eb.** E_1 zusammenfallend mit Ebene abc, die **Pr. Eb.** E_2 aber senkrecht zur Linie ab.

Der gesuchte Punkt ist nun der Durchschnittspunkt der Halbierebene der Winkel zwischen je zweien der gegebenen Ebenen, siehe auch Erkl. 259.

Man erhält folgende

Konstruktion: Halbiere zunächst die Winkel der beiden Ebenen abc und abd, die beiden Halbierebenen E' und E'' stehen senkrecht zu E_2. Hierauf mittels Zuhilfenahme einer **Pr. Eb.** E_4 bezw. E_5 senkrecht zu den Linien bc und ac die Winkel der Ebenen abc und bcd bezw. abc und acd.

Die Schnittlinien dieser Halbierebenen mit den Halbierebenen E' und E'', liefern die gesuchten Punkte.

Wie viele Punkte der gesuchten Art gibt es?

Auflösung c. Die Lösung der Aufgabe ist analog der Auflösung b., nur sind die Winkel von je zweien der gegebenen Ebenen in dem betreffenden gegebenen Verhältnis zu teilen.

Behufs einfacher konstruktiver Durchführung der Aufgabe verfahre man bezüglich der Wahl der nötigen **Pr. Ebn.** wie in Auflösung b.

Wie viele Punkte der verlangten Art gibt es?

Aufgabe 113. Ein Punkt a ist eine Ecke der Grundfläche eines regelmässigen sechsseitigen Prismas, dessen Achse in eine gegebene Gerade B fällt; der dem Punkte a entsprechende Punkt a' der zweiten Grundfläche liege in E_2.

Man soll:

a) die Projektionen des Prismas auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 darstellen,

b) seinen Schnitt mit einem durch seine Ecken gegebenen Dreieck bcd zeichnen.

Auflösung a. Man lege durch den gegebenen Punkt a eine neue **Pr. Eb.** E_4 senkrecht zur Geraden B (E_4 steht senkrecht zu E_1, da Gerade B parallel zu E_1 ist) und bestimme den Schnittpunkt m von E_4 mit B.

Denkt man sich nun das Prisma konstruiert und auf E_4 projiziert, so wird sich diese Projektion als ein regelmässiges Sechseck mit m als Mittelpunkt und a als einer Ecke darstellen.

Legt man daher die **Pr. Eb.** E_4 um Y_0 in die **Pr. Eb.** E_1 um, bestimmt die Um-

legungen a_4 und m_4 von a und m und zeichnet um m_4 als Mittelpunkt das regelmässige Sechseck $a_4 e_4 f_4 g_4 h_4 i_4$, so stellt dieses die vierte Projektion des Prismas dar. Aus der Umlegung folgen nun unmittelbar auf Y_0 die ersten Projektionen $a_1 \cdots i_1$ der Sechsecksecken und hieraus auch die zweiten Projektionen $a_2 \cdots i_2$ ($\overline{e_1 e_4} = \overline{e_x e_2}$ etc.). Die ersten bezw. zweiten Projektionen der Prismenseitenkanten laufen parallel zu B_1 und B_2 und die durch a gehende Seitenkante trifft die **Pr. Eb.** E_2 in einem Punkte a' der zweiten Grundfläche des Prismas, deren Seiten zu den Seiten der ersten Grundfläche bezw. parallel laufen.

Figur 218.

Auflösung b. Behufs Konstruktion des Schnittes der Ebene $b\,c\,d$ mit dem Prisma ermittele man die vierten Projektionen der Dreieckspunkte, wodurch sich in den Schnittpunkten der Dreiecks- und Sechsecks-

seiten unmittelbar die vierten Projektionen der Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit den Prismenflächen ergeben. Die zugehörigen ersten und zweiten Projektionen liegen auf den diesbezüglichen Projektionen der Dreiecksseiten, siehe die Punkte 2, 3, 4, 6, 7, 8. Die innerhalb der von dem Dreieck $b_4 c_4 d_4$ begrenzten Fläche befindlichen Sechseckspunkte e_4 und i_4 gehören Seitenkanten ee' und ii' an, welche die Dreiecksfläche durchdringen.

Man erhält die betreffenden Durchdringungspunkte durch Ermittelung der Schnittlinien der die Kanten $\overline{ae}$ und $\overline{hi}$ enthaltenden Prismenflächen mit der Dreiecksfläche, denn diese Schnittlinien treffen die bezüglichen Kanten $\overline{ee'}$ und $\overline{ii'}$ in den gesuchten Durchdringungspunkten.

Die Konstruktion ist für den auf ee' liegenden Punkt ersichtlich gemacht; Ebene $aa'e'e$ schneidet die Dreiecksebene nach der Linie xy, deren vierte Projektion $x_4 y_4$ unmittelbar im Schnitt von $a_4 e_4$ mit $b_4 d_4$ bezw. $b_4 c_4$ gegeben ist, woraus sich $x_1 y_1$ bezw. $x_2 y_2$ auf den diesbezüglichen Projektionen der Viereckssseiten und damit die Projektionen des Schnittpunktes 1 ergeben.

Aufgabe 114. Es ist ein Punkt zu konstruieren, der von vier gegebenen Punkten a, b, c, d gleich weit absteht.

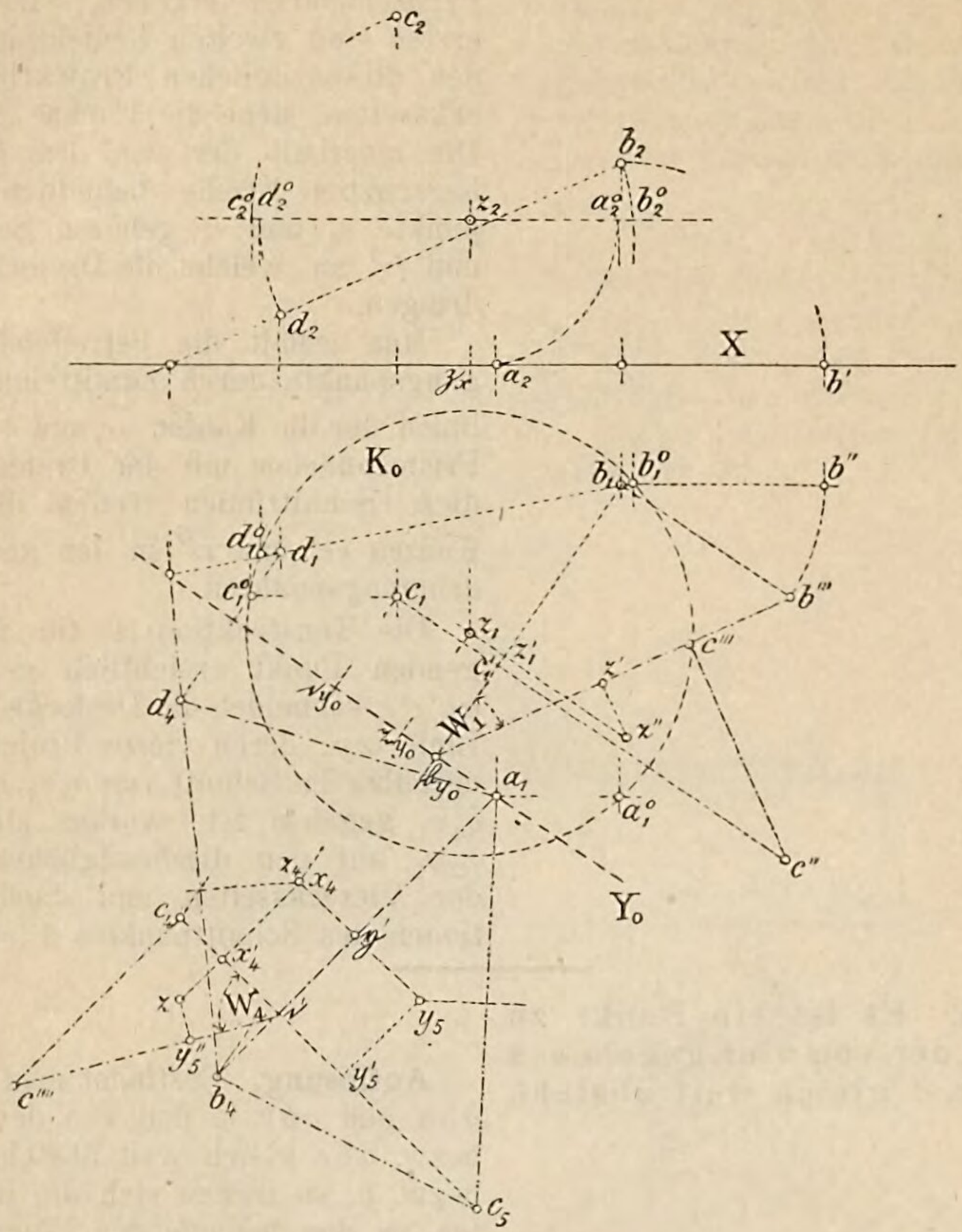
Auflösung. Bestimmt man in den Ebenen abd und abc je den von den Punkten abd bezw. abc gleich weit abstehenden Punkt x bezw. y, so treffen sich die in diesen Punkten zu den betreffenden Ebenen errichteten Senkrechten in dem gesuchten, von allen vier Punkten gleich weit abstehenden Punkt z.

Man erhält folgende

Konstruktion: Nehme zunächst, siehe Figur 219, eine mit der Ebene abd zusammenfallende **Pr. Fb.** E_4 an, lege dieselbe samt dem Dreieck abd in die **Pr. Eb.** E_1 um, ermittele den von a_1, b_4 und d_4 gleich weit abstehenden Punkt x_4 und bestimme die vierte Projektion c_4 von c (mittels des Konstruktionsvierecks $\mathfrak{b}_{y_0} c_1' c'' c'''$, $\overline{\mathfrak{b}_{y_0} c'''} = \overline{\mathfrak{c}_{y_0} c_4}$).

Lege nunmehr die Ebene abc als **Pr. Eb.** E_5 um $b_4 a_1$ in die **Pr. Eb.** E_4 (d. h. in E_1) mittels des Konstruktionsdreiecks $c_4 \mathfrak{c}' c''''$ um (W_4 gleich dem Winkel der Ebene abc mit abd, d. h. E_4, $c_4 \mathfrak{c}'$ senkrecht $b_4 a_1$, $\overline{c_4 c''''} = \overline{c'' c'''}$, gleich dem Abstand des Punktes c von der **Pr. Eb.** E_4, $\overline{\mathfrak{c}' c_5} = \overline{\mathfrak{c}' c''''}$) und zeichne den von den drei Punkten a_1, b_4 und c_5 gleich weit entfernten Punkt y_5.

Figur 219.



Die in den Punkten x und y im Raume zu den Ebenen abd und abc errichteten Senkrechten bilden eine zur Linie ab senkrechte Ebene, welche letztere Linie in einem Punkte $\mathfrak{y}$ trifft, dessen Umlegung in $\mathfrak{y}'$ gegeben ist. Ausserdem gehören die vier Punkte x, $\mathfrak{y}$, y, z zu einem Viereck, von dem man unmittelbar zwei Seiten, nämlich $\overline{x\mathfrak{y}} = \overline{x_4\mathfrak{y}'}$ und $\overline{y\mathfrak{y}} = \overline{y_5\mathfrak{y}'}$, sowie den Winkel bei $\mathfrak{y}$, d. i. W_4, kennt. Genanntes Viereck ist demnach kongruent dem Viereck $\overline{\mathfrak{c}'y_5''zx_4'}$, in welchem $\overline{\mathfrak{c}'y_5''} = \overline{\mathfrak{y}'y_5}$ und $\overline{x_4'\mathfrak{c}'} = \overline{x_4\mathfrak{y}'}$ ist.

Man hat somit in der Strecke $\overline{x_4'z}$ die Entfernung des Punktes z von der Ebene abd, d. h. von E_4; damit kennt man aber zugleich das zum Punkt z bezüglich des Projektionssystems I — IV gehörige Konstruktionsviereck; denn macht man $\overline{\mathfrak{b}_{y_0}z'} = \overline{z_4z_{y_0}}$ (z_4 deckt sich mit x_4), $\overline{z'z''}$ senkrecht zu $\mathfrak{b}_{y_0}b'''$ und gleich $\overline{x_4'z}$ und fällt $z''z_1'$

senkrecht $b_1 \mathfrak{b}_{y_0}$, so gibt die Strecke $\overline{\mathfrak{b}_{y_0} z_1'}$ die Entfernung der ersten Projektion des Punktes z von Y_0 (Ordinate eins Null), die Strecke $\overline{z_1' z''}$ aber die Entfernung der zweiten Projektion von der X-Achse (Ordinate zwei) von z an.

Ermittelt man, mit Bezugnahme auf Frage und Antwort 72, die wahren Entfernungen des Punktes z von den Punkten a, b, c, d, so müssen dieselben alle einander gleich sein, d. h. die Punkte a_1^0, b_1^0, c_1^0, d_1^0 liegen auf einem um z_1 als Mittelpunkt beschriebenen Kreise K_0.

Der gesuchte Punkt hätte sich auch ergeben, ohne Hinzufügung neuer **Pr. Ebn.,** als Schnittpunkt der in den Halbierpunkten der Verbindungslinien der gegebenen Punkte zu diesen Verbindungslinien errichteten senkrechten Ebenen, siehe Erkl. 261.

Erkl. 261. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zweien gegebenen Punkten gleich weit abstehen, ist die im Mittelpunkt der Verbindungslinie beider Punkte zu dieser errichtete senkrechte Ebene.“

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

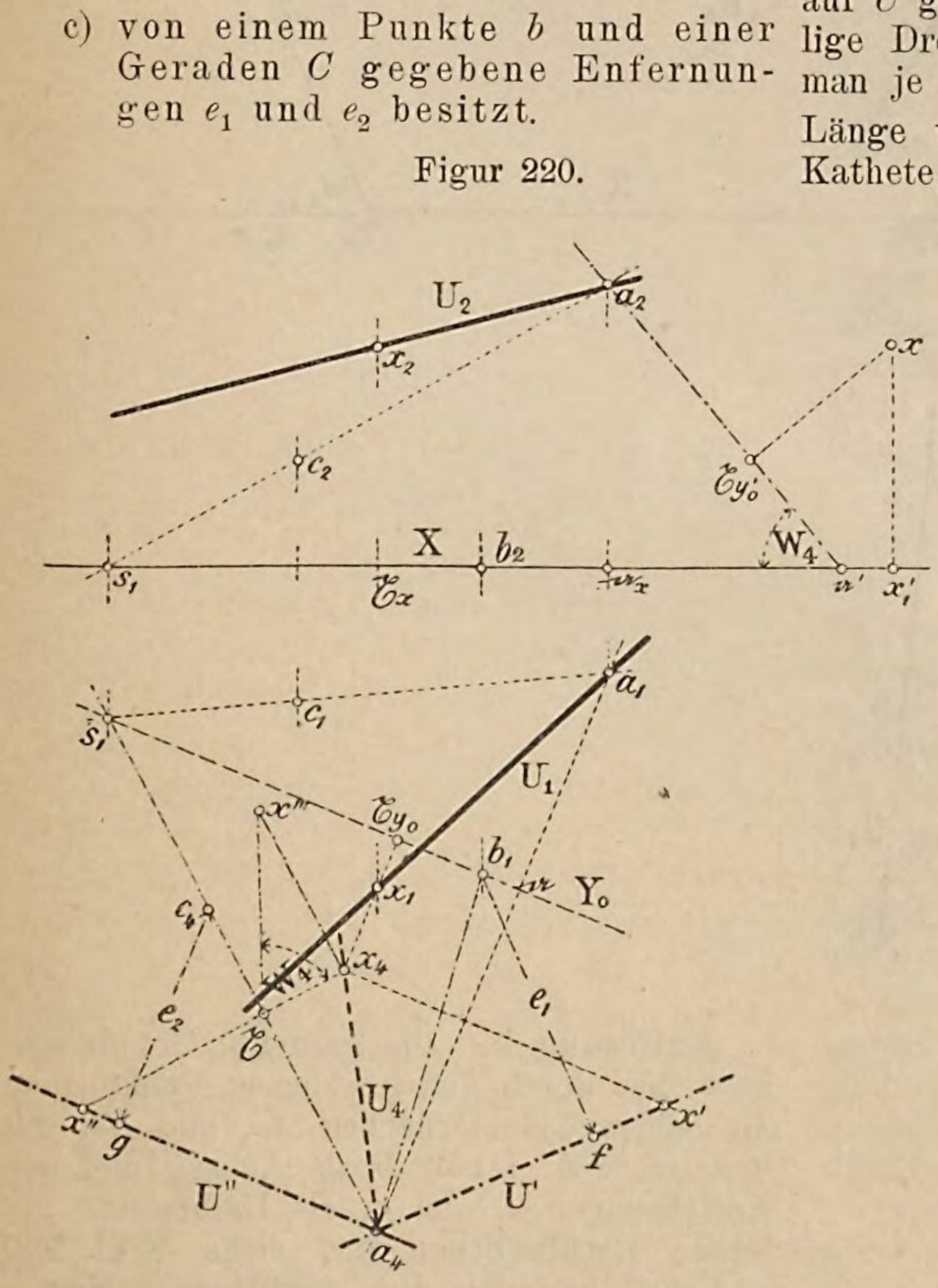
Aufgabe 115. Eine Gerade ist zu konstruieren, welche durch einen gegebenen Punkt a geht und

a) von zweien weiteren gegebenen Punkten b und c, oder

b) von zweien gegebenen Geraden A und B, oder endlich

c) von einem Punkte b und einer Geraden C gegebene Enfernungen e_1 und e_2 besitzt.

Figur 220.



Auflösung a. Denkt man sich die gesuchte Gerade U konstruiert und von den Punkten b und c Senkrechte bf und cg auf U gefällt, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke abf und acg, von welchen man je die Hypotenuse, nämlich die wahre Länge von $\overline{ab}$ bezw. $\overline{ac}$, sowie die eine Kathete, d. i. die gegebene Entfernung e_1 bezw. e_2 kennt. Man hat daher nur jene Dreiecke zu konstruieren und sie um ihre Hypotenuse so lange zu drehen, bis die Katheten af bezw. ag im Raume ineinander fallen.

Man erhält folgende

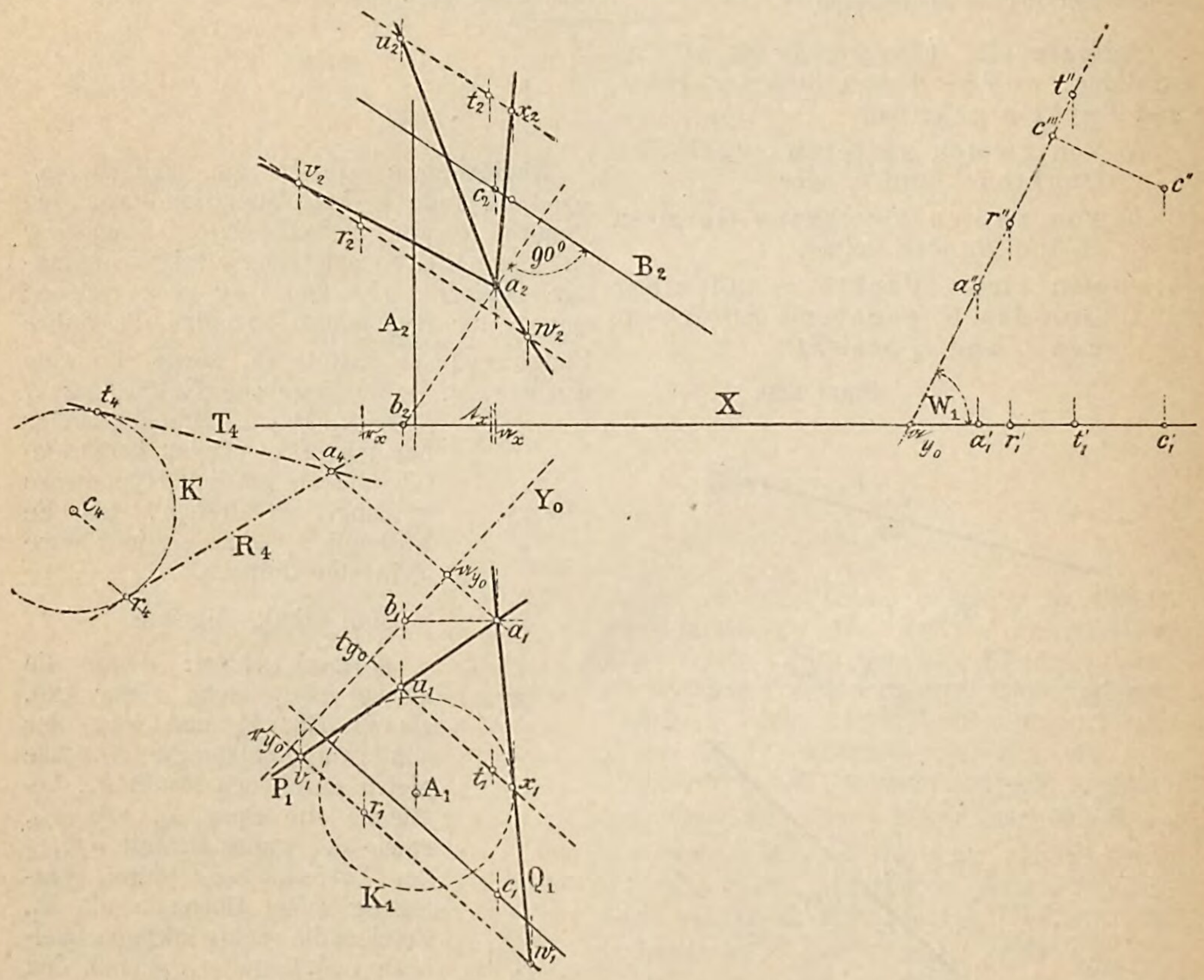
Konstruktion: Wähle die Ebene abc, siehe Figur 220, als **Pr. Eb.** E_4 und lege der Einfachheit halber die X-Achse gleich durch den Punkt b_2, bestimme die Spur Y_0 von E_4, sowie die wahre Gestalt $a_4 b_1 c_4$ des Dreiecks abc durch Umlegung seiner Ebene in die E_1. Zeichne die rechtwinkligen Dreiecke $a_4 b_1 f$ und $a_4 c_4 g$ mit den Katheten $\overline{b_1 f} = e_1$ und $\overline{c_4 g} = e_2$. Nimmt man nun auf U' bezw. U'' je einen Punkt x' bezw. x'' so an, dass $\overline{a_4 x'} = \overline{a_4 x''}$ ist, so werden bei der oben genannten Drehung die Punkte x' und x'' Kreise beschreiben, senkrecht zu den Linien $a_4 b_1$ bezw. $a_4 c_4$. Die

Projektionen genannter Kreise sind die Senkrechten durch x' und x'' zu $a_4 b_1$ und $a_4 c_4$ und schneiden sich im Punkte x_4, der vierten Projektion eines Punktes der Geraden U.

Mittels x_4 und x'' bestimmt sich das Konstruktionsdreieck $\mathfrak{x} x''' x_4$, in welchem $\overline{x_4 x'''}$ den Abstand des Punktes x von der Ebene E_4 angibt. Hierdurch ist aber auch das Konstruktionsviereck $\mathfrak{a}' x_1' x \mathfrak{x}_{y_0}'$ ($\overline{\mathfrak{a}' \mathfrak{x}_{y_0}'} = \overline{x_4 \mathfrak{x}_{y_0}}$, $\mathfrak{x}_{y_0}' x$ senkrecht zu $\mathfrak{a}' a_2$ und gleich $x_4 x'''$) und damit auch die Ordinate eins Null $\overline{\mathfrak{a}' x_1'} = \overline{\mathfrak{x}_{y_0} x_1}$, sowie die Ordinate zwei $\overline{\mathfrak{x}_x x_2} = \overline{x_1' x}$ bestimmt.

Wie viele Linien der gesuchten Art gibt es?

Figur 221.



Auflösung b. Die gesuchte Gerade gehört den durch den gegebenen Punkt a an die beiden Cylinderflächen Ae_1 und Be_2 mit den Geraden A und B als Achsen und den Entfernungen e_1 und e_2 als Halbmesser gelegten Berührebenen an, siehe Erkl. 262 und 263, ist somit die Schnittlinie beider.

Erkl. 262. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einer Geraden eine gegebene Entfernung haben, ist eine senkrechte Kreiscylinderfläche mit der gegebenen Geraden als Achse und der Entfernnng als Halbmesser."

Erkl. 263. Eine Berührebene an eine Kreiscylinderfläche ist eine Ebene, welche mit der Cylinderfläche nur eine, bezw. zwei einander unendlich naheliegende Mantellinien gemein hat.

Man erhält folgende

Konstruktion: Nehme der Einfachheit wegen, siehe Figur 221, die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zur Geraden A an, so sind die ersten Spuren der von a an die Cylinderfläche Ae_1 gelegten Berührebenen, die beiden von a_1 an den um A_1 mit e_1 als Halbmesser beschriebenen Kreis K_1 gezogenen Tangenten P_1 und Q_1. Eine durch b senkrecht zu B gelegte **Pr. Eb.** E_4 schneidet die Cylinderfläche Be_2 nach einem Kreise, dessen Umlegung der um c_4 mit e_2 als Halbmesser beschriebene Kreis K' ist. Die von a_4 an K' gezogenen Tangenten R_4 und T_4 geben die Schnittlinien der Berührebenen durch a an die Cylinderfläche Be_2 mit E_4 und letztere berühren die Cylinderfläche nach zweien zu B parallelen Geraden, gehend durch die Berührpunkte der eben genannten Tangenten R_4 u. T_4 an K'. Ermittelt man daher die ersten und zweiten Projektionen r_1, t_1 u. r_2, t_2 der Punkte r und t und zieht durch sie Parallele zu B_1 und B_2, so treffen die ersten Projektionen dieser Linien die Projektionen P_1 und Q_1 in den Punkten u_1, v_1, w_1, x_1, denen auf den zweiten Projektionen die Punkte u_2 bis x_2 entsprechen.

Die gesuchten Geraden sind daher die Linien au, av, aw und ax.

Auflösung c. Die gesuchten Geraden liegen in den durch den Punkt a an die Cylinderfläche Ce_2 gelegten Berührebenen und sind daher die in jenen Ebenen an eine um b mit dem Halbmesser e_1 beschriebene Kugel gezogenen Tangenten.

Behufs einfacher Durchführung der Konstruktion wähle man die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zur Geraden C, so sind die ersten Spuren der genannten Berührebenen die Tangenten durch a_1 an den um C_1 mit e_2 als Halbmesser beschriebenen Kreis K_1. Die erste Projektion der Kugel ist ein Kreis K_1 um b_1 mit dem Halbmesser e_1 und die zwischen die von den genannten Tangenten aus dem Kreise K_1 ausgeschnittenen Kreissehnen stellen die ersten Projektionen der Schnittkreise obengenannter Berührebenen mit der Kugel dar.

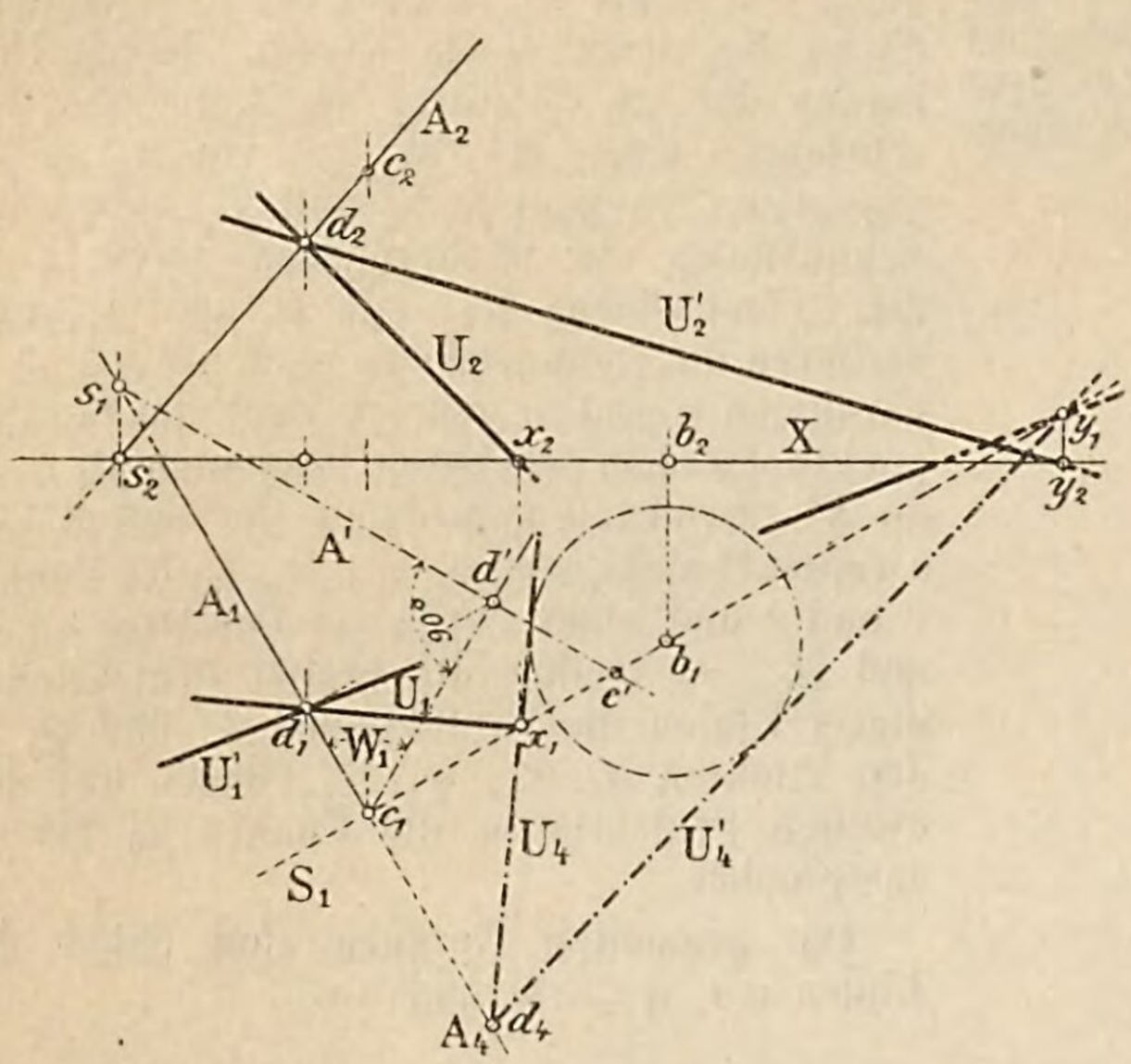
Mittels einer Umlegung dieser Berührebenen ergeben sich die vierten und hieraus auch die ersten ued zweiten Projektionen der gesuchten Geraden, von welchen zwei vorhanden sind.

Aufgabe 116. Durch eine gegebene Gerade A ist eine Ebene zu legen, welche:

a) von einem gegebenen Punkte b um eine Länge c_1 absteht, oder

b) von zweien gegebenen Punkten b und c Entfernungen hat, welche sich wie $m:n$ verhalten.

Figur 222.



Erkl. 264. Unter einer Berührebene an eine Kugelfläche versteht man eine Ebene, welche mit der Kugel einen Punkt, den Berührpunkt, derart gemein hat, dass der nach diesem Punkte gezogene Kugelhalbmesser auf der Ebene senkrecht steht.

Alle in der Berührebene durch den Berührpunkt gehende Gerade sind zugleich Tangenten an die Kugel, d. h. Tangenten an den Schnittkreis der durch den Mittelpunkt und die Tangente bestimmten Ebene mit der Kugel, weshalb obengenannte Berührebene auch Tangentenebene der Kugel heisst. In dem oben genannten Berührpunkt sind im Grunde genommen unendlich viele einander unendlich nahe liegende Punkte vereinigt, denn jede Kugeltangente hat als Kreistangente zwei unendlich nahe Punkte der Kugel gemein.

Auflösung a. Die gesuchte Ebene ist eine Berührebene an eine um b als Mittelpunkt mit der Strecke e_1 als Halbmesser beschriebene Kugel, siehe Erkl. 264. Legt man nun durch den gegebenen Punkt eine Ebene E_4 senkrecht zur Geraden A, so schneidet dieselbe die Gerade A in einem Punkte d, die Kugel nach einem Kreise K und die von d an K gezogenen Tangenten bestimmen je mit der Geraden A eine Ebene der gesuchten Art.

Man erhält folgende

Konstruktion: Ziehe, siehe Figur 222, durch b_1 die Spur S_1 oder Y_0 der Ebene E_4 senkrecht zu A_1 (die X-Achse geht durch b_2); lege zur Ermittelung von d die projizierende Ebene A_1 mit der Geraden nach A' in die **Pr. Eb.** E_1 um und fälle $c_1 d'$ senkrecht zu A'.

Nunmnhr kann E_4 um S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 umgelegt werden, wobei d nach d_4 gelangt ($\overline{c_1 d_4} = \overline{c_1 d'}$). Die Umlegung von b fällt mit b_1 zusammen. Die Tangenten U_4 und U_4' von d_4 an den um b_1 mit dem Halbmesser e_1 beschriebenen Kreis treffen S_1 in zweien Punkten x_1 und y_1, denen auf der X-Achse die Punkte x_2 und y_2 entsprechen. Die gesuchten Ebenen sind demnach die Ebenen Ax und Ay bezw. AU und AU'.

Auflösung b. Soll die gesuchte Ebene von zweien Punkten b und c ein bestimmtes Abstandsverhältnis $\frac{m}{n}$ besitzen, so geht sie durch den Teilungspunkt der Verbindungslinie bc, welcher die Strecke $\overline{bc}$ im Verhältnis $\frac{m}{n}$ teilt, vergleiche Erkl. 52. Da nun zwei solcher Teilungspunkte, ein innerer und ein äusserer vorhanden sind, so gibt es zwei Ebenen der verlangten Art.

Man erhält folgende

Konstruktion: Teile die Projektion der Strecke $\overline{bc}$ im Verhältnis $\frac{m}{n}$, siehe Antwort auf die Frage 17, so bestimmt je ein Teilungspunkt mit der Geraden A eine Ebene der gesuchten Art.

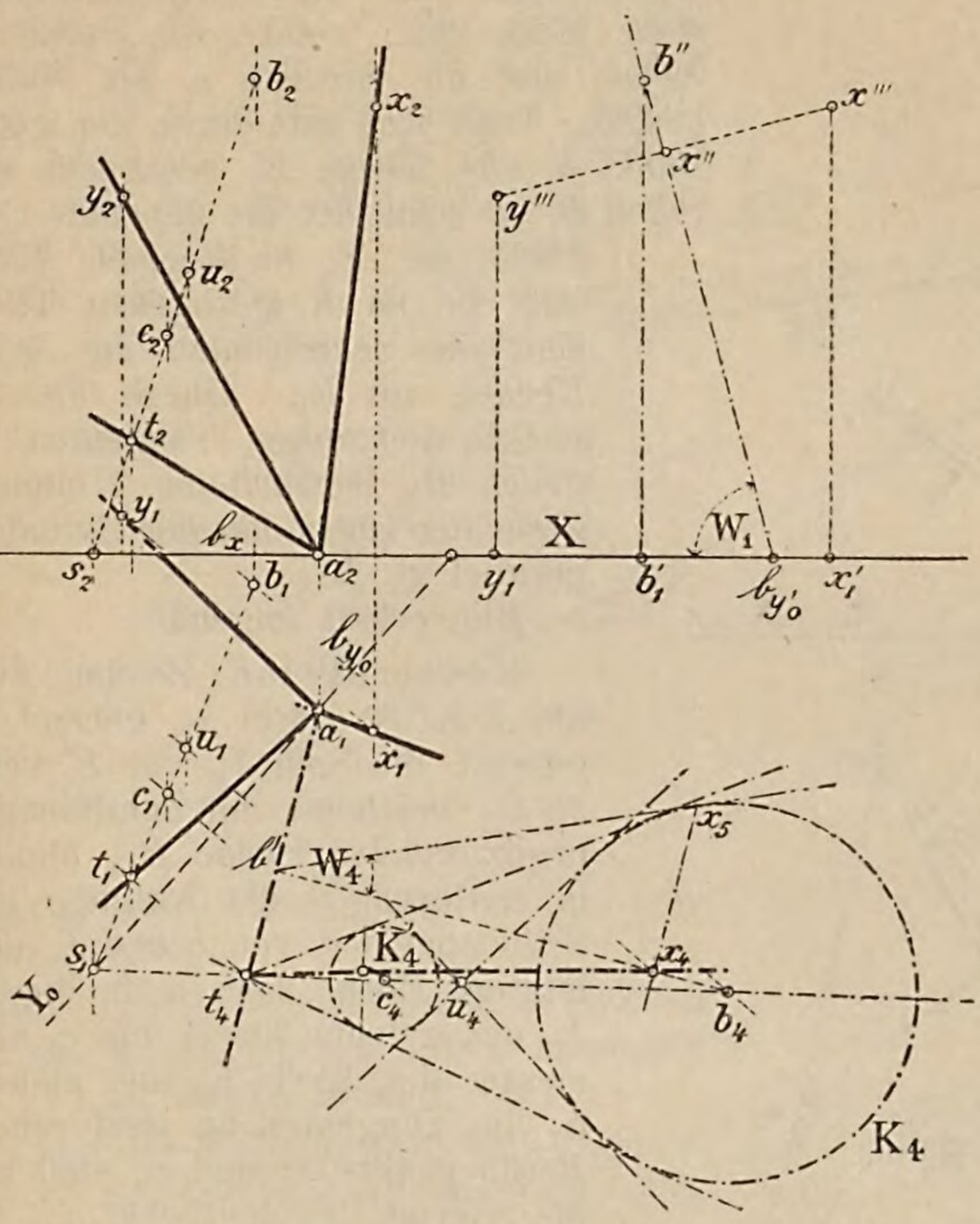
Aufgabe 117. Durch einen Punkt a ist eine Ebene zu legen, welche

a) von zweien weiteren Punkten b und c gegebene Entfernungen e_1 und e_2 hat, oder

b) von einer gegebenen Geraden B um die Strecke e_3 absteht, oder endlich

c) von dreien Punkten b, c, d Entfernungen besitzt, welche sich wie $m:n:p$ verhalten.

Figur 223.



Auflösung a. Die gesuchte Ebene ist gemeinsame Berührebene an die beiden um die Punkte b und c mit den Halbmessern e_1 und e_2 beschriebenen Kugeln, demnach auch Berührebene an den, beiden Kugeln umschriebenen senkrechten Kreiskegel. Solcher Kreiskegel gibt es aber zwei, welche die Verbindungslinie bc als gemeinsame Achse besitzen, während ihre Spitzen mit den die Strecke $\overline{bc}$ im Verhältnis $\frac{e_1}{e_2}$ teilenden Punkten zusammenfallen. Die Verbindungslinien dieser Teilungspunkte mit dem Punkte a gehören den gesuchten Ebenen an und durch jede derselben sind zwei Berührebenen der gesuchten Art möglich.

Man erhält folgende

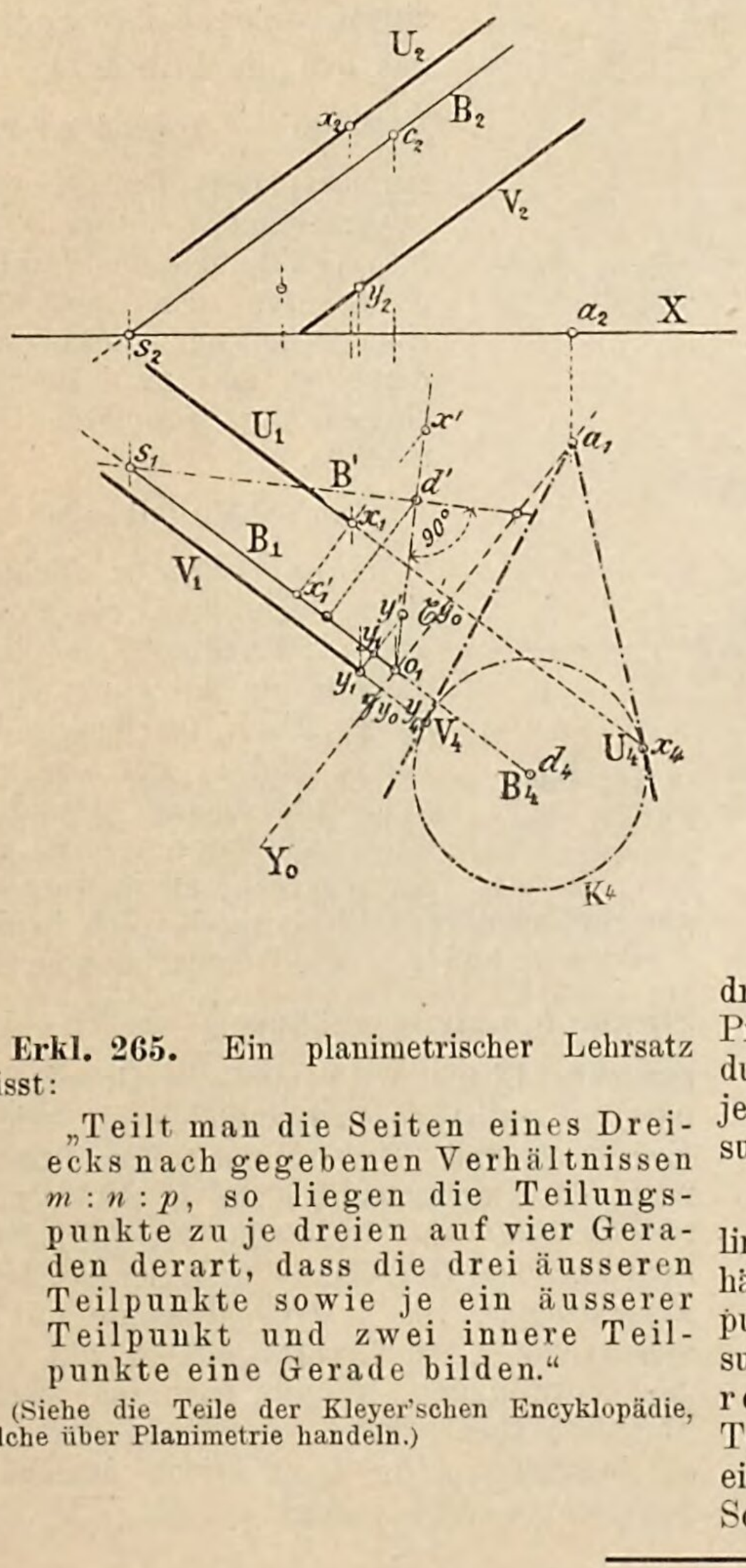
Konstruktion: Nehme, siehe Figur 223, die Ebene abc als **Pr. Eb.** E_4 und lege dieselbe um ihre Spur Y_0 in die **Pr. Eb.** E_1 um; beschreibe um b_4 und c_4 mit den gegebenen Strecken e_1 und e_2 als Halbmesser Kreise K_4 und K_4' und ziehe an letztere die gemeinsamen Tangenten, welche sich in den Punkten t_4 und u_4, den Teilungspunkten der Strecke $\overline{b_4 c_4}$ im Verhältnis $\frac{e_1}{e_2}$ treffen. Die gesuchte Ebene wird nun die Gerade at oder au enthalten und zugleich die beiden Kugeln K und K' berühren. Zur Bestimmung des Berührpunktes auf K denke man sich durch b_4 eine Senkrechte $b_4\mathfrak{b}'$ (als vierte Spur einer zur Geraden at senkrechten Ebene E') gezogen, von $\mathfrak{b}'$ eine Tangente an K_4 gelegt und ihren Berührpunkt x_5 auf $b_4\mathfrak{b}'$ nach x_4 projiziert. (Es gibt noch eine zweite Tangente von $\mathfrak{b}'$ an K_4, welche in einem zu x_5 bezüglich $\mathfrak{b}'b_4$ symmetrisch liegenden Punkte y_5 berührt.) Die Strecke $\overline{x_4 x_5}$ gibt

den Abstand des Punktes x von der **Pr. Eb.** E_4 an. Mittels der Konstruktionsvierecke $\mathfrak{b}_{y_0}{}'x''x'''x_1{}'$ bezw. $\mathfrak{b}_{y_0}x''y'''y_1{}'$ ($\overline{\mathfrak{b}_{y_0}x''} = \overline{\mathfrak{b}_{y_0}b_4}$, $\overline{x''x'''} = \overline{x''y'''} = \overline{x_4x_5}$) bestimmen sich die Projektionen x_1, y_1, x_2, y_2 der Punkte x und y und damit die Ebenen axt und ayt der gesuchten Art.

Mit Hinzuziehung der Geraden au erhält man noch zwei weitere Ebenen, so dass es demnach vier Ebenen gibt, welche die Aufgabe lösen.

Auflösung b. Die gesuchte Ebene ist Berührebene an eine Kreiscylinderfläche, siehe Erkl. 263, welche die Gerade B als Achse und die Strecke e_3 als Halbmesser besitzt. Legt man nun durch den gegebenen Punkt a eine Ebene E_4 senkrecht zur Geraden B, so schneidet die genannte Cylinderfläche die E_4 nach einem Kreise K und die an K gezogenen Tangenten sind die Schnittlinien der gesuchten Ebenen mit E_4. Durch die Berührpunkte genannter Tangenten mit K gehen die Berührlinien U und U' der gesuchten Ebene mit der Cylinderfläche parallel zu B.

Figur 224.



Man erhält folgende

Konstruktion: Zeichne durch a_1, die X-Achse durch a_2 gehend vorausgesetzt, die Spur Y_0 von E_4 senkrecht zu B_1, bestimme mit Zuhilfenahme der projizierenden Ebene B_1, ähnlich wie in Auflösung b. der Aufgabe 116, den Schnittpunkt d von B und E_4 und lege letztere Ebene samt d in die **Pr. Eb.** E_1 um, zeichne um d_4 mit e_3 als Halbmesser den Kreis K_4 und ziehe durch a_1 die Tangenten an letzteren; deren Berührpunkte x_4 und y_4 sind zugleich die vierten Projektionen U_4 und V_4 jener zu B parallelen, den gesuchten Ebenen angehörenden Geraden U u. V

Mittels der zugehörigen Konstruktionsdreiecke bestimme die ersten und zweiten Projektionen x_1, y_1 bezw. x_2, y_2 und ziehe durch sie parallel zu B_1 bezw. B_2 die Projektionen der Geraden U und V der gesuchten Ebene aU und aV.

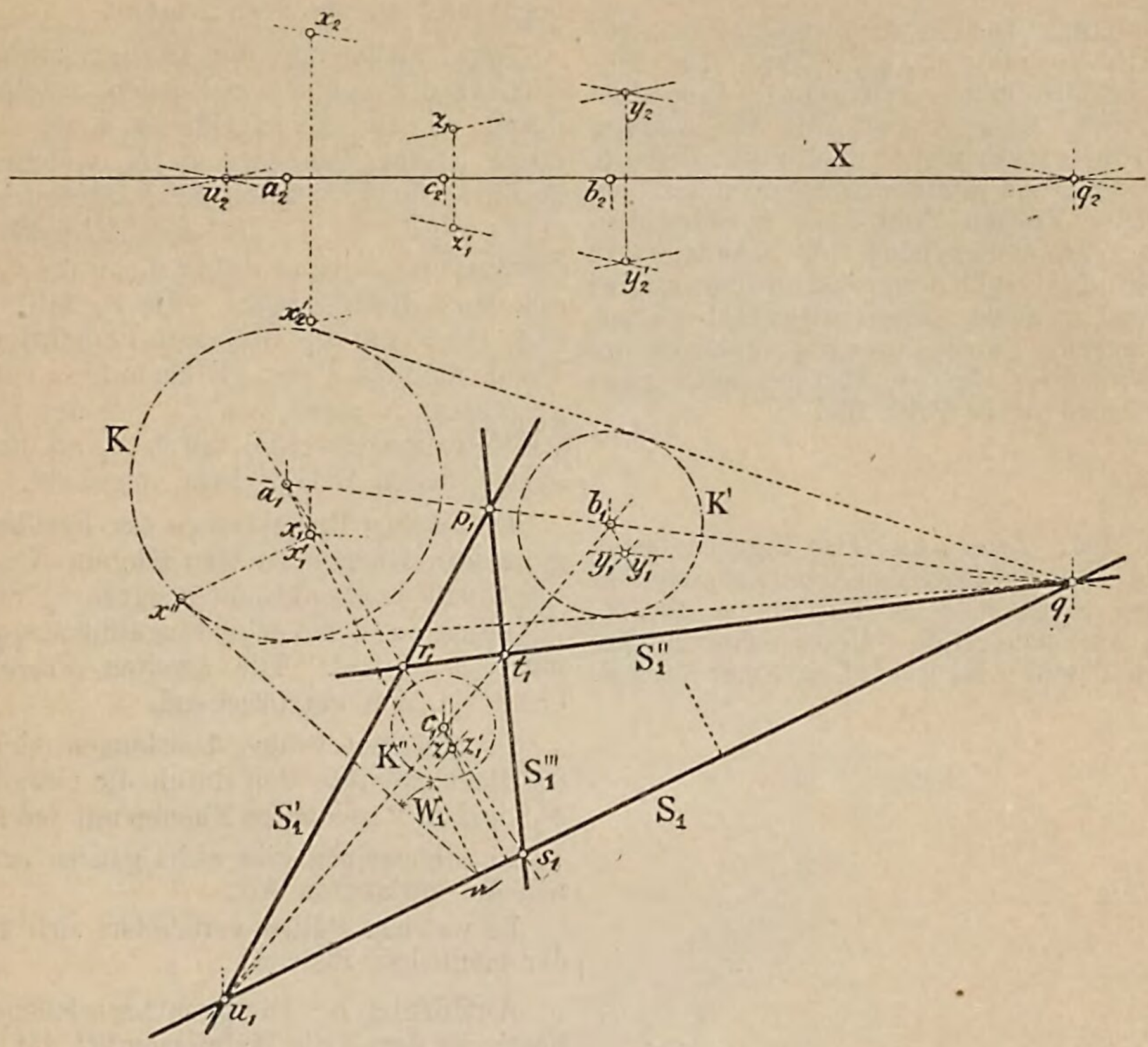
Auflösung c. Teilt man die Verbindungslinien $\overline{bc}$, $\overline{bd}$ und $\overline{cd}$ in den gegebenen Verhältnissen $m:n:p$, so bestimmen die Teilungspunkte mit dem gegebenen Punkte die gesuchten Ebenen derart, dass die drei äusseren Teilpunkte sowie je ein äusserer Teilpunkt und zwei innere Teilpunkte je eine Gerade der gesuchten Ebene bilden. Solcher Ebenen gibt es demnach vier.

Erkl. 265. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Teilt man die Seiten eines Dreiecks nach gegebenen Verhältnissen $m:n:p$, so liegen die Teilungspunkte zu je dreien auf vier Geraden derart, dass die drei äusseren Teilpunkte sowie je ein äusserer Teilpunkt und zwei innere Teilpunkte eine Gerade bilden."

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Figur 225.



Aufgabe 118. Eine Ebene ist zu konstruieren, welche

a) von dreien gegebenen Punkten a, b, c gegebene Entfernungen e_1, e_2, e_3 besitzt, oder

b) von vier gegebenen Punkten a, b, c, d gleich weit absteht, oder endlich

c) von vier Punkten a, b, c, d Entfernungen besitzt, welche sich wie $m:n:p:q$ verhalten.

Auflösung a. Die gesuchte Ebene ist gemeinsame Berührebene an die drei um die Punkte a, b, c mit den gegebenen Entfernungen als Halbmesser beschriebenen Kugeln.

Man erhält folgende

Konstruktion: Wähle, siehe Figur 225, der Einfachheit wegen die Ebene abc mit der **Pr. Eb.** E_1 zusammenfallend, so enthält dieselbe von den genannten Kugeln die drei Kreise K, K' und K'' mit den Mittelpunkten a_1, b_1, c_1 und den Halbmessern e_1, e_2, e_3 beziehungsweise. Die diesen Kreisen gemeinsamen Tangenten bestimmen auf den Verbindungslinien a_1b_1, a_1c_1 und b_1c_1 die Punkte p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1 als Teilungspunkte der Strecken $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_1c_1}$ und $\overline{b_1c_1}$ nach den Verhältnissen $\frac{e_1}{e_2}$, $\frac{e_1}{e_3}$ und $\frac{e_2}{e_3}$, welche zu je dreien auf vier Geraden S_1, S_1', S_1'', S_1''', s. Auflösung der Aufgabe 117 c. sowie Erkl. 265, den ersten

Erkl. 266. Die in Auflösung a. bezeichneten Teilungspunkte p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1 führen als Schnittpunkte gemeinsamer Tangenten von je zwei Kreisen auch die Bezeichnung „Aehnlichkeitspunkte“ und zwar deshalb, weil die durch sie gezogenen Strahlen auf den zugehörigen Kreisen Punkte so ausschneiden, dass die Verbindungslinien der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zu einander parallel laufen, und in beiden Kreisen ähnliche Figuren bestimmen. Für die äusseren Aehnlichkeitspunkte sind diese Figuren überdies noch ähnlich liegend, siehe Erkl. 267.

Erkl. 267. Zwei ähnliche Figuren liegen ähnlich, wenn die durch den Aehnlichkeitspunkt gezogenen Strahlen beide Figuren so treffen, dass die Aufeinanderfolge dieser Schnittpunkte in beiden Figuren im gleichen Sinne erfolgt.

Erkl. 268. Halbiert man eine Strecke $\overline{ab}$ in einem Punkte m, so kann derselbe als innerer Teilungspunkt der Strecke $\overline{ab}$ im Verhältnis $\frac{1}{1}$ gelten, der äussere Teilungspunkt liegt in unendlicher Ferne. Die vier zu den Tetraëderkanten gehörigen äusseren Teilungspunkte befinden sich nun auf einer Ebene in unendlicher Ferne.

Spuren der gesuchten Ebenen verteilt sind. Durch jede dieser Linien gehen zwei Ebenen, berührend an die drei Kugeln.

Zur Bestimmung der Berührpunkte, z. B. der durch S_1 gehenden Ebenen, zeichne man durch a_1 die Senkrechte $a_1\alpha$ zu S_1 und durch α eine Tangente an K, welche in x'' berührt; die Projektion des letzteren Punktes auf $a\alpha$ gibt in x_1 die erste Projektion des Berührpunktes einer durch S_1 an die Kugel K gehenden Berührebene. Mit x_1 fällt zusammen ein Punkt x_1' als erste Projektion eines Berührpunktes x' von gleichem aber entgegengesetztem Abstand von E_1 wie der Punkt x, welcher einer zweiten durch S_1 an die Kugel K möglichen Berührebene angehört.

Die ersten Projektionen der Berührpunkte genannter Ebenen mit den Kugeln K' und K'' liegen auf den Senkrechten durch b_1 und c_1 zu S_1, sowie auf den Verbindungslinien $x_1 q_1$, $y_1 u_1$ und $x_1 s_1$ bezw. Die zweiten Projektionen ermitteln sich entsprechend.

In gleicher Weise bestimmen sich auch die Berührpunkte der durch die Geraden S_1', S_1'' und S_1''' gehenden Ebenen mit den Kugeln.

Im allgemeinen gibt es im ganzen acht Ebenen der verlangten Art.

In welchen Fällen vermindert sich die Zahl der möglichen Ebenen?

Auflösung b. Die gesuchten Ebenen sind bestimmt durch die Halbierpunkte der Kanten des durch die Punkte a, b, c, d festgelegten Tetraëders und zwar gehen je vier Ebenen parallel zu den Seitenflächen, je drei parallel zu zweien gegenüberliegenden, windschiefen Kanten des Tetraëders. Es sind somit sieben Ebenen der verlangten Art vorhanden, wozu noch als achte Ebene die unendlich ferne Ebene hinzuzurechnen ist, siehe Erkl. 268.

Bezeichnet man die Mittelpunkte der acht Tetraëderkanten mit m_{ab}, m_{ac} etc., so sind die im Endlichen vorhandenen Ebenen wie folgt gebildet:

1) Ebene $m_{ad,\ bd,\ ac,}$ sie läuft parallel zur Ebene abc und geht durch die Mittelpunkte der Kanten ad, bd, ac.
2) „ $m_{ac,\ bc,\ dc,}$ „ „ „ „ „ abd
3) „ $m_{ab,\ cb,\ db,}$ „ „ „ „ „ acd
4) „ $m_{ba,\ ca,\ da,}$ „ „ „ „ „ bcd
5) „ $m_{cd,\ db,\ ab,\ ac,}$ sie läuft parallel zu den Kanten ad und bc
6) „ $m_{ab,\ bc,\ ad,\ cd,}$ „ „ „ „ „ „ ac und bd
7) „ $m_{ac,\ bc,\ ad,\ bd,}$ „ „ „ „ „ „ ab und cd
8) die unendlich ferne Ebene.

Die acht Halbierpunkte der Tetraëderkanten bilden die Ecken eines Achtflächners (Oktaëders), siehe Erkl. 269, in welchem die unter 1) bis 4) genannten

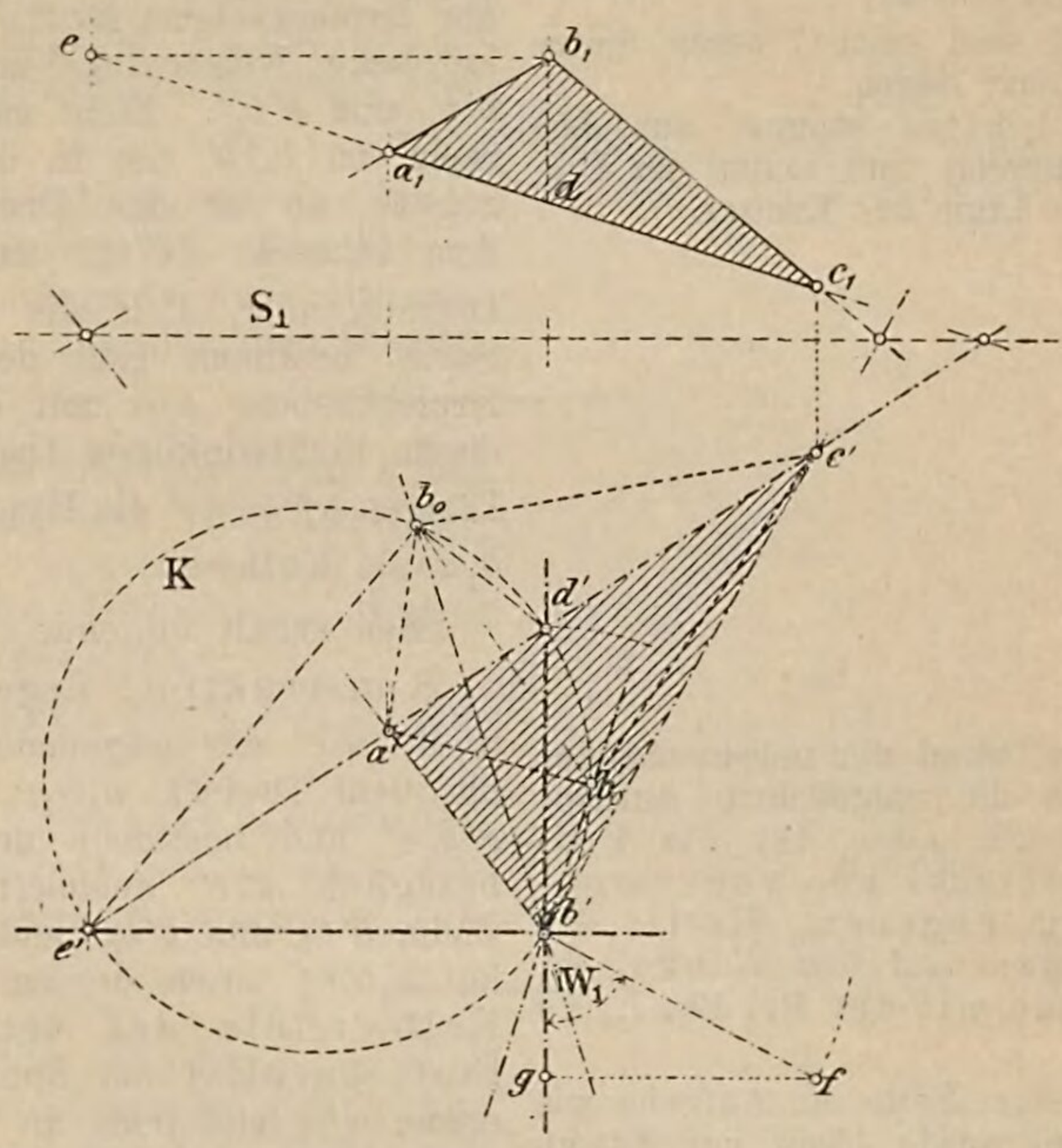
Erkl. 269. Unter einem „Achtflächner“ versteht man einen von acht Dreiecken begrenzten Körper. Sind die Dreiecke sämtlich gleichseitig, so heisst der Achtflächner regulär.

Das Wort „Oktaëder“ stammt aus dem Griechischen (octo, acht und hedra, Fläche), heisst also Achtflächner.

Ebenen im Verein mit den vier Ebenen des Tetraëders die Seitenflächen, die unter 5) bis 7) bezeichneten Ebenen die Diagonalflächen darstellen.

Auflösung c. Die gesuchten Ebenen sind bestimmt durch die Teilungspunkte der Kanten des durch die Punkte a, b, c, d festgelegten Tetraëders und zwar in ähnlicher Weise wie in Auflösung b., nur treten an Stelle der Halbierpunkte die inneren Teilungspunkte, während die sämtlichen äusseren Teilungspunkte in einer im Endlichen befindlichen Ebene liegen.

Figur 226.



Aufgabe 119. Ein Dreieck abc ist gegeben, dasselbe soll so gegen die **Pr. Eb.** E_1 gelegt werden, dass seine Projektion $a_1 b_1 c_1$ Winkel von vorgeschriebener Grösse habe, d. h. einem gegebenen Dreieck ähnlich werde.

Auflösung. Denkt man sich die Aufgabe gelöst und ist S_1, siehe Figur 226, die Spur der Dreiecksebene, ferner $a_1 b_1 c_1$ die Projektion, $a' b' c'$ die Umlegung des Dreiecks abc in die **Pr. Eb.** E_1, so lässt sich zunächst folgendes ermitteln:

Zieht man durch zwei zusammenhängende Punkte, etwa b_1 und b' je eine Senkrechte zur Projizierenden $b_1 b'$, so gewinnt man hierdurch auf $a_1 c_1$ und $a' c'$ zwei zusammengehörige Punkte e_1 und e' derart, dass dieselben im Verein mit den Durchschnittspunkten d_1 und d' der Projizierenden $b_1 b'$

Erkl. 270. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In einem Kreise stehen auf gleichen Bögen (oder gleichen Sehnen) gleiche Peripheriewinkel.“

(Siehe die Teile der Kleyer'schen Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Peripheriewinkel sind solche, deren Spitze auf der Kreisperipherie liegen.

Das Wort Peripherie stammt aus dem Griechischen (periphéreia) und heisst der Umkreis, d. h. also die Linie des Kreises.

Erkl. 271. Auf Grund der nebenstehenden Auflösung ist auch die umgekehrte Aufgabe gelöst: Ein Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ist als Projektion eines Dreiecks abc von vorgeschriebener Form gegeben. Es ist die Richtung der Spur und der Winkel W_1 der Dreiecksebene mit der **Pr. Eb.** E_1 zu bestimmen.

Man wird in diesem Falle die Aufgabe wie nebenstehend gezeigt wurde, lösen, nur tritt an die Stelle des Dreiecks $a' b' c'$ das Dreieck $a_1 b_1 c_1$.

Man löse die Aufgabe 119, sowie die in obiger Erklärung enthaltene, wenn statt der ersten die zweite **Pr. Eb.** gesetzt wird.

mit $a_1 c_1$ und $a' c'$ die Strecken $\overline{a_1 c_1}$ und $\overline{a' c'}$ im nämlichen Verhältnis teilen, siehe Frage und Antwort 17 sowie Erkl. 216. Ein über $d' e'$ als Hypotenuse konstruiertes, dem Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ähnliches Dreieck $d' e' b_0$ bestimmt mit dem Punkte b' ein Viereck derart, dass der über $\overline{d' e'}$ als Durchmesser beschriebene Kreis K die Punkte b_0 und b' enthält, siehe Erkl. 160, und zugleich durch den zu b_0 bezüglich $d' e'$ symmetrischen Punkt b_0' hindurchgeht. Zieht man nun $b' b_0$ und $b_1 b_0'$, so sind zufolge der Gleichheit der Kreisbögen $b_0 d$ und $b_0' d$ die Winkel $b_0 b' d'$ und $b_0' b' d'$ einander gleich, siehe Erkl. 270, d. h. die Linien $b' d'$ und $b' e'$, von denen erstere parallel, letztere senkrecht zur Spur S_1 der Dreiecksebene läuft, halbieren den Winkel, bezw. Nebenwinkel der Verbindungslinien $b' b_0$ und $b' b_0'$. Zieht man ferner $e' g$ senkrecht zu $b_0' b'$ (ist in der Figur nicht gezogen), so ist das Dreieck $e_1 g b'$ ähnlich dem Dreieck $e' d' b_0'$ und kongruent dem Dreieck edb, d. h. die Strecke $\overline{bg} = \overline{b_1 d}$. Somit bestimmt sich der Winkel W_1 der Dreiecksebene abc mit der **Pr. Eb.** E_1 aus einem rechtwinkligen Dreieck $b' gf$ mit den Längen $\overline{bf} = \overline{bd}$ als Hypotenuse und $\overline{b' g} = \overline{b_1 d}$ als Kathete.

Man erhält folgende

Konstruktion: Lege an eine der Seiten, z. B. $\overline{a' c'}$ des gegebenen Dreiecks $a' b' c'$, ein dem Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ähnliches Dreieck $a' b_0 c'$ und bestimme den dem Punkte b_0 bezüglich $a' c'$ symmetrischen Punkt b_0'. Ziehe $b' b_0$ und $b' b_0'$ und halbiere den Winkel $b_0 b' b_0'$ sowie dessen Nebenwinkel. Die Halbierlinie des letzteren Winkels läuft parallel zur Spur S_1 der Dreiecksebene abc und trifft die verlängerte $a' c'$ in einem Punkte e'. Die von e' auf die Linie $b' b_0'$ gefällte Senkrechte enthält den Punkt g. Mit $\overline{gb'}$ als Kathete und der Strecke $\overline{b' d'}$ der Halbierlinie $b' d'$ als Hypotenuse konstruiere man das Dreieck $b' gf$, so enthält dasselbe bei b' den Winkel W_1 der Dreiecksebene mit der **Pr. Eb.** E_1.

Jede zu $b' e'$ gezogene Parallele S_1 kann nun als Spur der Dreiecksebene genommen werden, womit in Verbindung mit W_1 die Projektion $a_1 b_1 c_1$ des Dreiecks abc sich wie früher bestimmt, siehe Erkl. 99.

Die Richtung der Spur S_1 ist unzweideutig bestimmt; dagegen gibt es durch S_1 zwei zur **Pr. Eb.** E_1 symmetrisch liegende unter dem Winkel W_1 gegen letztere geneigte Ebenen, welche als Dreiecksebenen aufgefasst werden können.

c) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 121. Die Aufgaben 115 und 117 sind zu lösen für den Fall, dass der gegebene Punkt in unendliche Ferne rücke, d. h. durch eine Gerade ersetzt werde, zu welcher die gesuchte Gerade (Ebene) parallel sein soll.

Aufgabe 122. Es sind vier Gerade A, B, C, D gegeben, von denen A und B sich schneiden. Man soll eine Gerade zeichnen, welche die sämtlichen vier Geraden schneidet.

Aufgabe 123. Man soll einen Punkt einer Geraden A bestimmen, dessen Abstände von den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 der Länge wie dem Vorzeichen nach gleich sind.

Aufgabe 124. Durch einen gegebenen Punkt einer Geraden ist parallel zu einer Ebene eine Gerade zu zeichnen, deren Projektionen zu einander parallel sind.

Aufgabe 125. Es sind ein Punkt a und vier in einem Punkt b sich schneidende Gerade C, D, E, F gegeben. Durch den Punkt a ist eine Ebene zu legen, welche die vier Geraden

a) nach den Ecken eines Parallelogramms,

b) nach einer Trapeze schneidet, dessen parallele Seiten sich wie gegebene Längen m und n verhalten.

Aufgabe 126. Vier Punkte a, b, c, d sind als die aufeinanderfolgenden Ecken eines windschiefen Vierecks gegeben. Man soll die Seiten desselben durch eine Ebene derart schneiden, dass

a) die Schnittpunkte einen Rhombus,

b) ein Parallelogramm von gegebenem Flächeninhalt $= l^2$ bilden.

Aufgabe 127. Es sind die Projektionen eines regelmässigen achtseitigen Prismas darzustellen, dessen Achse in eine gegebene Gerade A fällt, dessen eine Grundfläche durch einen gegebenen Punkt b geht, während eine Ecke der zweiten Grundfläche mit einem gegebenen Punkte c zusammenfällt.

Aufgabe 128. Ein Punkt s ist als Spitze, ein Punkt m als Mittelpunkt der Grundfläche einer regelmässigen sechsseitigen Pyramide gegeben, deren Höhe sich zur Seitenkante wie 3 : 4 verhält. Man soll die Projektionen der Pyramide darstellen, wenn eine Grundkante parallel zur **Pr. Eb.** E_2 läuft.

Aufgabe 129. Die Aufgaben 127 und 128 sind für einen Kreiscylinder bezw. Kreiskegel zu lösen, unter Wegfall der in Aufgabe 128 für die Lage der Grundkante gegebenen Bedingung.

Aufgabe 130. Die Projektionen eines rechtwinkligen Parallelepipedons sind darzustellen, wenn die Endpunkte der in einer Ecke zusammenstossenden Kanten durch ihre Projektionen gegeben sind.

Aufgabe 131. Ein Punkt a ist als Ecke eines Würfels gegeben, von dessen Kanten zwei unter gegebenen Winkeln gegen die **Pr. Eb.** E_1 geneigt sind, während die dritte Kante einen vorgeschriebenen Winkel w_2 mit E bildet. Die Projektionen des Würfels sind zu zeichnen.

Aufgabe 132. Es sind zwei Ebenen AB und CD, sowie eine Gerade E gegeben. Durch letztere Linie ist eine Ebene so zu legen, dass ihre Schnittlinien mit den gegebenen Ebenen

a) zu einander parallel sind,

b) auf einander senkrecht stehen.

Aufgabe 133. Es sind zwei Ebenen AB und CD, sowie eine Gerade E, letztere als Diagonale eines Rechtecks, gegeben, von welchem

a) zwei parallele,

b) zwei zusammenstossende Seiten

in die gegebene Ebene fallen sollen. Die Projektionen des Rechtecks sind zu zeichnen.

Aufgabe 134. Ein Punkt s ist als Spitze einer Pyramide gegeben, deren Grundfläche ein Rechteck sein soll; drei der Seitenkanten sind ihrer Lage nach als Gerade durch s, zwei auch ihrer Länge nach gegeben. Man soll die Projektionen der Pyramide zeichnen.

Aufgabe 135. Zwei Punkte a und b und eine Gerade C sind gegeben. Auf letzterer Linie ist ein Punkt x so zu bestimmen, dass

a) die Summe seiner Entfernungen von a und b, d. h. $\overline{ax} + \overline{bx}$, den grösstmöglichen,

b) die Differenz $\overline{ax} - \overline{bx}$ den kleinstmöglichen

Wert habe.

Aufgabe 136. Drei Punkte a, b, c sind gegeben. Es ist ein Punkt zu konstruieren, welcher von den drei gegebenen Punkten gegebene Entfernungen e_1, e_2, e_3 besitzt.

Aufgabe 137. Zwei Punkte a und b bilden die Ecken eines Dreiecks mit bekannten Seitenlängen. Die dritte Ecke soll

a) in einer gegebenen Ebene ST liegen, oder

b) von dieser Ebene einen gegebenen Abstand e haben.

Man soll die Projektionen des Dreiecks zeichnen.

Aufgabe 138. Es sind vier Punkte a, b, c, d und eine Ebene ST gegeben; in letzterer ist ein Punkt x zu konstruieren derart, dass die Dreiecke abx und cdx bei x rechtwinklig werden.

Aufgabe 139. Die Aufgaben 50, 51, 52 und 53 sind für das Projektionssystem I—II zu lösen.

Aufgabe 140. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche eine Gerade B senkrecht kreuzt und mit einer gegebenen Ebene ST einen Winkel α bildet.

Aufgabe 141. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen, welche mit dreien Geraden B, C, D gleiche Winkel bildet.

Aufgabe 142. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Ebene zu legen, welche mit einer Ebene ST einen Winkel α bildet und auf einer zweiten Ebene UV senkrecht steht.

Aufgabe 143. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Ebene zu legen, welche mit dreien weiteren Ebenen gleiche Winkel bildet.

Aufgabe 144. Die Projektionen eines dreiseitigen Prismas sind zu zeichnen, wenn eine der Grundflächen gegeben ist und ausserdem der Winkel beider Grundflächen, sowie die Längen der drei Seitenkanten, ebenso ihre Neigung gegen die Ebene der gegebenen Grundfläche bekannt sind.

Aufgabe 145. Ein Punkt a ist als Mittelpunkt der Seitenfläche eines Würfels gegeben. Die durch a gehende Quadratdiagonale schliesst mit den **Pr. Ebn.** E_1 u. E_2 gegebene Winkel $w_1 = 45^0$, $w_2 = 22^1/_2{}^0$ ein, während die diese Diagonalen enthaltende Quadratebene gegen die **Pr. Eb.** E_2 unter dem Winkel $W_2 = 60^0$ geneigt ist. Die Projektionen des Würfels sind zu zeichnen.

Aufgabe 146. Ein Punkt a ist als Ecke eines regelmässigen sechsseitigen Prismas von bekannter Höhe gegeben. Die den Punkt a enthaltende Grundfläche schliesst mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gegebene Winkel $w_1 = 75^0$ und $w_2 = 60^0$ ein; eine der durch a gehenden Sechseckssseiten ist gegen die **Pr. Eb.** E_2 unter dem Winkel $w_2 = 30^0$ geneigt. Es sind die Projektionen des Prismas zu zeichnen.

Aufgabe 147. Ein Dreieck $a_1 b_1 c_1$ der Projektionsebene E_1 ist gegeben. Ausserdem kennt man noch die zweite Projektion c_2 von c. Man soll die Projektionen eines regelmässigen Sechsecks zeichnen, das den Punkt c als Mittelpunkt und die Linie $\overline{ab}$ als Seite hat.

Aufgabe 148. Ein Punkt m ist Mittelpunkt eines Quadrates, dessen beide Projektionen zweien gegebenen Parallelogrammen $abcd$ und $a'b'c'd'$ ähnlich sein sollen. Es sind die Spuren und die Neigungswinkel der Quadratebene gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, sowie die Projektionen des Quadrates zu zeichnen.

Aufgabe 149. Vier Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 sind als die ersten Projektionen der Ecken eines regulären Tetraëders gegeben; eine

der Ecken hat gegebenen Abstand von der **Pr. Eb.** E_1. Man soll die zweite Projektion des Tetraëders zeichnen.

Aufgabe 150. Ein Parallelogramm $a_1 b_1 c_1 d_1$ ist als erste Projektion der Grundfläche eines Würfels gegeben. Der Endpunkt e der durch a gehenden zur Ebene $a\,b\,c\,d$ senkrechten Kante $a\,e$ soll von der **Pr. Eb.** E_2 gegebenen Abstand haben. Man soll die Projektionen des Würfels zeichnen.

H) Andeutungen zur Lösung der ungelösten Aufgaben.

Aufgabe 26. Die Differenzen der Abstände der Punkte a und c, ebenso b und c von der **Pr. Eb.** E, geben die Katheten zweier rechtwinkligen Dreiecke mit der wahren Länge $\overline{a\,b}$ als Hypotenuse. In den anderen Katheten dieser Dreiecke hat man die Längen der Projektionen von $\overline{a\,c}$ und $\overline{b\,c}$. Die Projektion c_1 bestimmt sich somit als Schnittpunkt zweier Kreise mit den Mittelpunkten a_1 und b_1 und den Halbmessern $\overline{a_1 c_1}$ und $\overline{b_1 c_1}$ beziehungsweise.

Aufgabe 27. Mittels des Abstandes des Diagonalschnittpunktes e von der **Pr. Eb.** E lassen sich die Trapeze $a\,a_1\,c_1\,c$ und $b\,b_1\,d_1\,d$ und damit auch die Spuren der Diagonalen $a\,c$ und $b\,d$ konstruieren, wodurch die Spur der Viereckseben bestimmt ist. Durch die Umlegung der letzteren in die **Pr. Eb.** E gewinnt man die wahre Gestalt des Vierecks sowie die Abstände der Viereckspunkte von der **Pr. Eb.** E, siehe Frage und Antwort 34 sowie Erkl. 93—99.

Aufgabe 28. Da die Spur der Fünfecksebene in der Verbindungslinie $s\,t$ gegeben ist, so lässt sich das Konstruktionsdreieck des Punktes d und damit die Umlegung des Fünfecks zeichnen. Aus Umlegung und Projektion bestimmen sich die Abstände der Fünfeckspunkte von der **Pr. Eb.** wie früher.

Aufgabe 29. Mittels der Projektion $a_1 c_1$ und des Winkels der Diagonale $a\,c$ mit der **Pr. Eb.** E bestimmen sich unmittelbar die Abstände der Punkte a und c von der **Pr. Eb.** E, wodurch auch die Umlegung des Vierecks sich herstellen lässt.

Aufgabe 30. Mittels des gegebenen Abstandes des Diagonalschnittpunktes sowie der Projektionen der Diagonalen $a\,d$ und $b\,c$ und ihrer Winkel mit E erhält man die Spuren dieser Diagonalen und damit auch die Spur der Sechsecksebene. Nach der Umlegung der Sechsecksebene in die **Pr. Eb.** E erscheint das Sechseck in wahrer Gestalt. Aus Umlegung und Projektion sind auch die Abstände der Sechseckspunkte von der **Pr. Eb.** E bestimmt.

Aufgabe 31. Bestimme die Spur der Dreiecksebene und lege letztere in die **Pr. Eb.** E um. Nach der Umlegung zeichne die unter a bis c verlangten Punkte und ermittele deren Projektionen entweder mit Zuhilfenahme der zugehörigen Konstruktionsdreiecke oder unter Benützung der zwischen Umlegung und Projektion bestehenden Affinitätsbeziehung.

Aufgabe 32. Verfahre wie in Aufgabe 31.

Aufgabe 33. Die durch die Gerade A und den Punkt b bestimmte Ebene lege in die **Pr. Eb.** E um. Ein Kreis mit der Umlegung von b als Mittelpunkt und der gegebenen Entfernung als Halbmesser schneidet die Umlegung von A in den Umlegungen der gesuchten Punkte x und y.

Es gibt im allgemeinen zwei Punkte der verlangten Art. Nur wenn die gegebene Ent-

fernung gleich der Entfernung des Punktes b von der Geraden ist, fallen die beiden Punkte in einen zusammen; es gibt aber keinen Punkt mehr, sobald genannte Entfernung kleiner als die Entfernung von b und A ist.

Aufgabe 34. Im Falle a führe durch einen der Punkte a oder b eine Ebene senkrecht zu ab, ihr Schnitt mit der Geraden D gibt die Ecke c. Die Parallelen durch c_1 und b_1 zu a_1c_1 und a_1b_1 vervollständigen die Projektion des Rechtecks. Im Falle b kennt man die Entfernung der Ecke c vom Mittelpunkt m von $\overline{ab}$ $\left(=\frac{1}{2}\overline{ab}\right)$, folglich ist die Lösung wie in Aufgabe 33.

Aufgabe 35. Die durch den Mittelpunkt m von $\overline{ab}$ senkrecht zu ab geführte Ebene schneidet auf der Geraden D die Ecke c aus. Das Weitere ist wie in Aufgabe 34.

Aufgabe 36. Die beiden aufeinanderfolgenden Hauptdiagonalen schliessen einen Winkel von 45^0 ein. Bezeichnet man nun die Spuren dieser Achtecksdiagonalen mit s und t, so bestimme mittels der Winkel 30^0 und 60^0 die Längen $\overline{ms}$, $\overline{m_1s}$, $\overline{mt}$, $\overline{m_1t}$, hieraus zunächst die wahre Gestalt des Dreiecks mst (von welchem man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt) desgleichen jene vom Dreieck m_1st. Beide Dreiecke mst und m_1st lassen sich nun längs der Seite st so aneinanderlegen, dass ersteres als Umlegung, letzteres als Projektion des räumlichen Dreiecks mst aufgefasst werden kann. Damit ist aber zugleich der Winkel der Achtecksebene mit der **Pr. Eb.** E, und damit auch die Umlegung des Achtecks selbst konstruierbar. Dabei ist die Seitenlänge des Achtecks sowie die Lage von st beliebig wählbar.

Aufgabe 37. Durch m und A ist die Sechsecksebene gegen die **Pr. Eb.** E bestimmt. Man zeichne daher die Spur der Ebene mA, lege letztere in die **Pr. Eb.** E um und bestimme die Umlegung des Sechsecks nach den vorhandenen Daten. Projektion und Abstände bestimmen sich wie früher.

Aufgabe 38. Lege durch die Gerade ab eine Ebene unter dem Winkel von 45^0 gegen E geneigt, ermittele ihre Umlegung in die **Pr. Eb.** E, zeichne in der Umlegung ein Quadrat mit $\overline{ab}$ als Seite und bestimme die Projektion des Würfels, ähnlich wie in Aufgabe 24b.

Aufgabe 39. Lege durch a eine Ebene senkrecht zur Geraden ab und bestimme deren Schnittpunkt c mit der Geraden A, lege hierauf die Quadratebene um ihre erste Spur in die **Pr. Eb.** um, zeichne über der umgelegten Linie ac als Diagonale ein Quadrat und bestimme dessen Projektion auf E.

Die Projektionen der übrigen Seitenkanten laufen parallel zu $\overline{ab}$ und sind der Länge nach gleich $\overline{a_1b_1}$.

Aufgabe 40. Lege durch die Gerade ma eine Ebene unter der gegebenen Neigung zur **Pr. Eb.** E und zeichne die wahre Gestalt sowie die Projektion der Grundfläche der Pyramide. Die Projektion der Pyramidenachse steht senkrecht zur Spur der Grundflächenebene.

In der Umlegung der die Pyramidenachse enthaltenden projizierenden Ebene erscheint die Pyramidenhöhe in wahrer Grösse, welche somit der Aufgabe gemäss auf der Pyramidenachse aufgetragen werden kann, wodurch sich die Umlegung und damit auch die Projektion der Pyramidenspitze bestimmt.

Aufgabe 54. Die gesuchte Gerade ist parallel zur Schnittlinie beider Ebenen.

Aufgabe 55. Die gesuchte Gerade liegt in der durch a senkrecht zur Geraden C geführten Ebene, ist daher die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Schnittpunkte von B und obiger Ebene.

Aufgabe 56. Die gesuchte Gerade ist parallel zur Schnittlinie von zweien zu B bezw. C senkrechten Ebene.

Aufgabe 57. Die gesuchte Gerade ist parallel zur Schnittlinie einer zu B senkrechten Ebene mit der gegebenen Ebene SW_1.

Aufgabe 58. Die gesuchte Gerade ist parallel zur Schnittlinie einer zu C senkrechten Ebene mit der Ebene SW_1. Die Aufgabe ist daher zurückgeführt auf Aufgabe 48.

Aufgabe 59. Verfahre umgekehrt wie in Aufgabe 50. Es gibt zwei Ebenen der verlangten Art.

Aufgabe 60. Fälle von dem Punkte a eine Senkrechte zur Ebene SW_1 und lege durch diese Senkrechte eine Ebene unter den Winkel β gegen Ebene TW_1' geneigt, siehe Aufgabe 52.

Aufgabe 61. Zeichne durch den Punkt a eine Gerade, welche mit den beiden Ebenen die Komplementswinkel der gegebenen Winkel einschliesst, so steht die gesuchte Ebene auf letzterer Linie senkrecht.

Aufgabe 77. Zeichne je zwei Punkte der Geraden in allen ihren möglichen Geraden zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 und projiziere diese Punkte mit Bezugnahme auf Frage und Antwort 62 auf die **Pr. Eb.** E_3.

Aufgabe 78. Die zweite Projektion der Geraden bestimmt sich unmittelbar in der Verbindungslinie a_2A_2 und letztere Linie schneidet B_2 in einem Punkte x_2, dem auf B_1 der Punkt x_1 entspricht. Die Verbindungslinie ax ist die gesuchte Gerade.

Aufgabe 79. Die zweite bezw. erste Projektion der gesuchten Geraden ist parallel zur X-Achse, und trifft die gleichnamige Projektion der Geraden B in einem Punkte x_2 bezw. x_1 der gesuchten Geraden.

Aufgabe 92. Man führe die in den bezüglichen Aufgaben angegebenen Konstruktionen für das Projektionssystem I—II durch.

Aufgabe 93. Man projiziere die gegebenen Stücke auf die **Pr. Eb.** E_3. Die dritte Projektion der gesuchten Senkrechten steht senkrecht zur dritten Projektion der Ebene, siehe auch Erkl. 234.

Aufgabe 94. Verfahre wie in Aufgabe 93.

Aufgabe 95 u. 106. Führe die in den genannten Aufgaben angegebenen Konstruktionen für das Projektionssystem I—II durch.

Aufgabe 121. Andeutung zu Lösung von Aufgabe 115, wenn Punkt a durch eine Gerade A' ersetzt wird:

a. Die gesuchte Gerade ist die Schnittlinie zweier Kreiscylinderflächen mit den durch die Punkte b und c zur gegebenen Geraden A gezogenen Parallelen als Achsen und den gegebenen Entfernungen als Halbmesser.

Zur Durchführung der Konstruktion wähle eine **Pr. Eb.** E_4 senkrecht zur Geraden A'; sie schneidet die beiden Cylinder nach Kreisen, mit den vierten Projektionen b_4 und c_4 als Mittelpunkt und den gegebenen Entfernungen als Halbmesser. In den Schnittpunkten dieser Kreise gewinnt man die vierten Projektionen der gesuchten Geraden.

b. Es gilt die gleiche Bemerkung wie in Auflösung b. der Aufgabe 115, nur hat man statt des Punktes a die Gerade A' in die vierte **Pr. Eb.** zu projizieren und parallel zu A_1' bezw. A_4' (die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zu A vorausgesetzt) die Tangenten an die Cylinderprojektionen zu zeichnen. Das übrige bleibt wie in Auflösung b. von Aufgabe 115.

c. Es gilt die gleiche Bemerkung wie in Auflösung c. der Aufgabe 115.

Man wählt wieder der Einfachheit wegen die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zur Geraden C, so gehen parallel zu A_1' die Spuren der Berührebene an die Cylinderfläche Ce_2, berührend an deren erste Projektion. Das Weitere ist wie in Auflösung c. der Aufgabe 115.

Aufgabe 122. Die gesuchte Gerade liegt in der Ebene AB, ist somit die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden C und D mit Ebene AB.

Aufgabe 123. Der gesuchte Punkt ist der Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden mit der Halbierebene des Winkels der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2.

Die konstruktive Lösung geschieht am einfachsten mittels eines Projektionssystemes I—III oder II—III.

Aufgabe 124. Die gesuchte Gerade ist parallel zur Schnittlinie der gegebenen Ebene mit der Coïncidenzebene, daher parallel zur Affinitätsachse der ersteren Ebene.

Aufgabe 125. a. Die gesuchte Ebene ist parallel zur Schnitttlinie der Ebenen AB und CD, sowie AC und BD.

Man hat demnach nur diese Schnittlinien herzustellen und durch a eine Ebene parallel zu denselben zu zeichnen.

Zur raschen Ermittelung der genannten Schnittlinien bestimme man entweder das Spurenviereck $s_1 t_1 u_1 v_1$ der gegebenen Ge-

Aufgabe 126. Die gesuchte Ebene ist in beiden Fällen *a.* und *b.* parallel zu den beiden Diagonalen des Vierecks $abcd$.

Im Falle a. teilt man ausserdem die Vierecksseiten in dem Verhältnis der Diagonalen, so bestimmen die Teilpunkte die gesuchte Ebene.

Im Falle b. schneidet man zunächst das Viereck durch eine zur gesuchten Ebene

raden, so geben die Schnittpunkte st und uv, ebenso su und tv Punkte der oben genannten Schnittlinien, welche ausserdem durch b gehen, oder man schneide die vier gegebenen Geraden durch eine willkürliche zu E_1 oder E_2 senkrechte Ebene und bestimme in deren Schnittviereck wieder die Schnittpunkte von gegenüberliegenden Seiten.

b. Denkt man sich die Ebene konstruiert, so schneidet dieselbe die vier gegebenen Geraden nach einem Trapeze $a'b'c'd'$, so dass $a'd'$ parallel $c'b'$ und ausserdem $\frac{\overline{a'd'}}{\overline{c'b'}} = \frac{m}{n}$ ist und es läuft die Trapezebene parallel zur Schnittlinie der Ebenen AD und BC.

Zieht man daher durch den Schnittpunkt b der vier gegebenen Geraden eine Parallele zur Schnittlinie eben genannter Ebenen und trägt auf derselben von b aus zwei Strecken im Verhältnis $\frac{m}{n}$ ab und zieht durch deren Endpunkte Parallele zu den Linien D oder A bezw. C oder B, so treffen diese die Geraden A oder D bezw. B oder C in Punkten a'' oder d'' bezw. b'' oder c'' derart, dass die gesuchte Ebene durch a parallel zu den Linien S und $a''b''$ oder S und $c''d''$ läuft. parallelen Ebene nach einem Parallelogramm $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, ähnlich dem gesuchten $\alpha\beta\gamma\delta$.

Nun verhalten sich aber die Flächeninhalte ähnlicher Figuren wie die Quadrate gleichliegender Seiten; es finden, wenn l'^2 den Flächeninhalt des Parallelogramms $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, $l_1'^2$ den seiner Projektion bezeichnet, folgende Verhältnisgleichheiten statt:

$$\frac{l^2}{l'^2} = \frac{l^2 \times \cos^2 W_1}{l'^2 \times \cos W_1} = \frac{l_1^2}{l_1'^2}$$

ferner:

$$\frac{\overline{\gamma\delta^2}}{\overline{\gamma'\delta'^2}} = \frac{\overline{\gamma\delta^2} \times \cos w_1}{\overline{\gamma'\delta'^2} \times \cos w_1} = \frac{\overline{\gamma_1\delta_1^2}}{\overline{\gamma_1'\delta_1'^2}}$$

Nunmehr ist aber:

$$\frac{l^2}{l'^2} = \frac{\overline{\gamma\delta^2}}{\overline{\gamma'\delta'^2}}$$

daher auch:

$$\frac{l_1^2}{l_1'^2} = \frac{\overline{\gamma_1\delta_1^2}}{\overline{\gamma_1'\delta_1'^2}}$$

Weiter ist aber auch mit Rücksicht auf die Aehnlichkeit der Dreiecke $a_1\gamma_1\delta_1$ und $a_1\gamma_1'\delta_1'$ die folgende Verhältnisgleichheit richtig:

$$\frac{a_1\gamma_1}{a_1\gamma_1'} = \frac{\gamma_1\delta_1}{\gamma_1'\delta_1} = \frac{l_1}{l_1'}$$

Verwandelt man daher den Inhalt des Parallelogramms $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'$ in ein Quadrat und bestimmt ferner den Inhalt der Projektion von l^2 mittels des Winkels W_1, so erhält man hiedurch die Längen l_1 und l_1' und hat nur nötig, auf der Projektion a_1d_1 einen Punkt so zu konstruieren, dass die Verhältnisgleichheit:

$$\frac{a_1\gamma_1}{a_1\gamma_1'} = \frac{l_1}{l_1'}$$

stattfindet. γ_1 ist die erste Projektion eines Punktes der gesuchten Ebene, welche nunmehr parallel zu den Viereckdiagonalen gezogen werden kann.

Aufgabe 127. Die durch den gegebenen Punkt c senkrecht zur Geraden A gelegte Ebene bestimmt die eine Grundfläche des Prismas und ihr Schnittpunkt mit A gibt den Mittelpunkt des Achtecks, dem ausserdem der Punkt c als Ecke angehört. Mittels Umlegung ergibt sich wahre Gestalt und Projektion des Achtecks. Eine durch b gleichfalls senkrecht zu A geführte Ebene liefert die zweite Grundfläche.

Aufgabe 128. Die durch m senkrecht zur Linie ms geführte Ebene gibt die Grundfläche der Pyramide. Aus dem Verhältnis zwischen Seitenkante und Höhe, sowie der bekannten Grösse der letzteren ergibt sich die Länge des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises. Mittels der Bedingung über die Lage einer Grundkante gewinnt man ferner eine Ecke der Grundfläche. Letztere kann nunmehr durch Umlegung der Grundflächenebene in wahrer Gestalt und Projektion gezeichnet werden.

Aufgabe 129. Der Lösungsweg bleibt der gleiche wie in den Aufgaben 127 und 128.

Aufgabe 130. Heissen die drei gegebenen Punkte abc und ist der den drei Kanten gemeinsame Punkt mit d bezeichnet, so sind die drei in d zusammenstossenden Dreiecke bei letzterem Punkte rechtwinklig und deren Katheten projizieren sich in der Ebene abc als die Höhen des Dreiecks abc. Wählt man daher die Ebene abc als **Pr. Eb.** E_4, zeichnet die wahre Gestalt des Dreiecks abc, so ist der Höhenschnittpunkt in letzterem die vierte Projektion d_4 von d, woraus sich d_1 und d_2 bestimmt. Damit sind aber auch die drei Kanten da, db u. dc durch ihre Projektionen gegeben, wodurch sich auch die übrigen zu diesen Linien parallelen Parallelepipedonkanten konstruieren lassen.

Aufgabe 131. Mittels der gegebenen Winkel bestimmt sich der Winkel W_1 der den Punkt a enthaltenden Würfelebene mit der **Pr. Eb.** E_1; damit ist zugleich der Winkel der dritten durch a gehenden Würfelkante mit der **Pr. Eb.** E_1 bekannt und da ausserdem ihre Neigung mit E_2 gegeben ist, so lässt sich diese Kante wie in Aufgabe 53 konstruieren, hiermit ist die Lage der oben genannten Würfelebene mit der **Pr. Eb.** E_1 bestimmt und mit Rücksicht auf den gegebenen Abstand des Punktes lassen sich nunmehr die Projektionen des Würfels herstellen.

Aufgabe 132. a. Die Schnittlinien der gesuchten Ebene mit den gegebenen Ebenen AB und CD gehen durch die Schnittpunkte x und y der Geraden E mit den letzteren Ebenen und laufen parallel zur Schnittlinie S dieser Ebenen.

b. Heisst z der Schnittpunkt der gesuchten Ebene mit der Schnittlinie S beider Ebenen, so ist das Dreieck xyz bei z rechtwinklig, daher sind die Entfernungen des Mittelpunktes m von $\overline{xy}$ von den Punkten x, y und z einander gleich, demnach ist z zu konstruieren wie in Aufgabe 33.

Aufgabe 133. a. Die durch die Schnittpunkte x und y von E mit den gegebenen Ebenen gehenden parallelen Rechtecksseiten laufen parallel zur Schnittlinie S beider Ebenen. Man kennt nun mit Rücksicht auf die Gleichheit der Rechtecksdiagonalen, die Entfernung des auf S liegenden Rechtecks-punktes vom Mittelpunkt m der Strecke $\overline{xy}$; siehe auch Aufgabe 33.

b. Ist ganz so wie Auflösung b. von Aufgabe 133.

Aufgabe 134. 1. Fall. Es seien gegeben die Geraden sa, sb, sc der Lage und $\overline{sa}$ und sb auch der Grösse nach. Durch letztere Bedingung bestimmen sich die Projektionen der Punkte a und b, indem man von s aus die gegebenen Längen abträgt. Durch die Bedingung, der Winkel acb soll ein Rechter sein, erhält man schliesslich noch die Entfernung des Punktes c von dem Mittelpunkte m der Strecke; daher Aufgabe 33.

2. Fall. Es seien gegeben die Längen sb und sc. Durch diese Bestimmung finden sich wieder die Punkte b und c. Da nun der Winkel bca ein Rechter sein soll, so hat man nur durch c eine zu cb senkrechte Ebene zu legen; deren Schnitt mit der dritten gegebenen Kante sa gibt den Punkt a, womit die Ebene der Grundfläche bestimmt ist.

Aufgabe 135. a. und b. Die gesuchten Punkte sind die gemeinsamen Spitzen von zweien senkrechten Kreiskegeln, welche die Gerade A als gemeinsame Achse besitzen

Aufgabe 136. Ist x der gesuchte Punkt, so kennt man von den Dreiecken abx, acx und bcx je die drei Seiten. Wählt man daher die Ebene abc als **Pr. Eb.** E_4 und legt die-

und deren Grundkreise bezw. durch die Punkte b und c gehen.

Man braucht daher nur von b und c Senkrechte auf die Gerade A zu fällen (Verbindungslinie der Schnittpunkte von A mit den durch b und c senkrecht zu A gelegten Ebenen mit den Punkten b bezw. c) und die hiedurch auf A begrenzte Strecke im Verhältnis der Längen dieser Senkrechten zu teilen. Der innere Teilungspunkt löst die Aufgabe a, der äussere die Aufgabe b.

Aufgabe 137. a. Nehme die gegebene Ebene als **Pr. Eb.** E_4, so lassen sich die vierten Projektionen der Seiten $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ mittels des Abstandes vier der Ecken a und b und der bekannten Seitenlängen $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ konstruieren, wodurch die vierte Projektion des Dreiecks abc hergestellt werden kann. Aus der vierten Projektion von c bestimme die erste und zweite. Vgl. auch Aufgabe 73.

b. Die Konstruktion bleibt dem Wesen nach die gleiche, wie in Auflösung a., nur bestimmen sich die vierten Projektionen der Seiten $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ mittels der Abstandsdifferenzen der Punkte a, b und c von der **Pr. Eb.** E_4.

Aufgabe 139. Führe die in den genannten Aufgaben angedeuteten Konstruktionen für das Projektionssystem I—II durch.

Aufgabe 141. Zieht man durch a Parallele B', C', D' zu den gegebenen Geraden, so ist die gesuchte Gerade parallel znr Schnittlinie der drei Halbierebenen der Winkel der Ebenen $B'C'$, $B'D'$ und $D'C'$. Letztere Linie fällt zusammen mit der Achse eines die Geraden B', C', D' als Mantellinien enthaltenden senkrechten Kreiskegels und steht somit auch senkrecht zu einer Ebene E', welche durch drei auf den Geraden B', C', D' angenommenen, gleich weit von a abstehenden Punkte hindurchgeht.

Aufgabe 143. Die gesuchte Ebene ist parallel zu der in Aufgabe 141 genannten Hilfsebene E'.

selbe in die **Pr. Eb.** E_1 um, so lassen sich in dieser Ebene die oben genannten Dreiecke mit Benützung der Seiten a_4b_4, a_4c_4, b_4c_4 konstruieren, wodurch sich die Punkte x', x'' und x''' ergeben, aus diesen bestimmt sich zunächst x_4, als Schnittpunkt der durch die Punkte x', x'' und x''' zu den Seiten a_4b_4, a_4c und b_4c_4 gefällten Senkrechten. Aus x_4 ermittelt man x_1 und x_2 mit Zuhilfenahme des aus x'' und x_4 bestimmten Abstandes von x von der **Pr. Eb.** E_4.

Einfacher wird die Konstruktion, falls die **Pr. Eb.** E_1 mit der Ebene abc zusammenfallend angenommen wird.

Aufgabe 138. Bestimmt man die Mittelpunkte m und m' der Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, so sind die Längen $\overline{mx}$ und $\overline{m'x}$ bestimmbar, nämlich gleich den Hälften von $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, daher von dem Dreieck $mm'x$ die drei Seiten bekannt. Man hat sonach Aufgabe 137.

Aufgabe 140. Die gesuchte Gerade liegt in einer den Punkt a enthaltenden zu B senkrechten Ebene. Man hat sonach Aufgabe 50.

Aufgabe 142. Die gesuchte Ebene enthält die von a auf die Ebene UV gefällte Senkrechte; das Weitere ist wie in Aufgabe 51.

Aufgabe 144. Zieht man durch die Endpunkte a_1, b_1, c_1 der gegebenen Grundfläche in derselben Parallele zu einer beliebigen Richtung und trägt von den Punkten a_1, b_1, c_1 die gegebenen Längen l_1, l_2, l_3 ab, so

treffen die Verbindungslinien der zweiten Endpunkte dieser Parallelen die Geraden ab, ac, bc in Punkten der ersten Spur der zweiten Grundflächenebene, welche nunmehr mit Hilfe des Winkels W_1 bestimmt werden kann. Mittels der Länge l_1 bestimmt sich nun auch der Winkel der durch a gehenden Seitenkante mit der zweiten Grundfläche und da auch jener mit der ersten bekannt ist, so lässt sich die Lage der Seitenkante nach Aufgabe 53 ermitteln.

Aufgabe 145. Ziehe zunächst wie in Aufgabe 73 eine Gerade unter den gegebenen Winkeln gegen die **Pr. Ebn.** geneigt und lege durch diese eine Ebene unter dem vorgeschriebenen Winkel W_2, siehe Aufgabe 98. Nehme die so bestimmte Ebene als **Pr. Eb.** E_4 und zeichne nach erfolgter Umlegung mit der bekannten Seitenlänge über der Diagonale ein Quadrat als vierte Projektion des Würfels. Bestimme aus der vierten Projektion die erste und zweite.

Aufgabe 146. Bestimme zunächst die durch a gehende Grundfläche wie in Aufgabe 99, hierauf die Projektion der Sechsecksseite mittels des Winkels w_2; lege die Sechsecksebene in die **Pr Eb.** E_1 um und zeichne das Sechseck als vierte Projektion des Prismas. Aus der vierten Projektion bestimme die erste und zweite.

Aufgabe 147. Ermittele zunächst mit Bezugnahme auf Aufgabe 119 und Erkl. 271 Spur und Neigungswinkel mit der **Pr. Eb.** E_1 einer Parallelebene E' zur Sechsecksebene und führe durch den gegebenen Punkt eine Parallelebene zu E'. Mittels Umlegung der Sechsecksebene bestimmen sich wie früher die Projektionen des Sechsecks.

Aufgabe 148. Bestimme die Richtungen der Spuren und die Neigungswinkel mit den **Pr. Ebn.** einer Parallelebene E' zur Quadratebene, siehe Aufgabe 120 und Erkl. 271 und führe zu E' eine Parallelebene durch m.

Aufgabe 149. Bestimme zunächst die Spuren und Winkel mit der **Pr. Eb.** E_1 zweier zu den Ebenen abc und abd parallelen Ebenen, führe durch den gegebenen Punkt a Parallelebenen hinzu und ermittele in denselben die zweiten Projektionen der zugehörigen Tetraëderecken, siehe Frage und Antwort 77.

Aufgabe 150. Bestimme wieder wie in der vorhergehenden Aufgabe Spur und Neigungswinkel W_1 einer Parallelebene E' zur Quadratebene. Damit ist aber zugleich die Länge der in der Ebene $abcd$ liegenden Würfelkante und jener zu ihr senkrechten Kanten und zugleich die Form der ersten Projektion des Würfels gegeben. Mittels des gegebenen Abstandes ergibt sich die zweite Projektion von e sowie die Lage der den Punkt e enthaltenden Würfelebene.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Nachstehende Bände von **Kleyers Encyklopädie** sind bis jetzt erschienen:

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Logarithmen nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 4. —.

Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: gebunden M. 2. 50.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Erstes Buch. Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 in den Text gedruckten Figuren. **Zweite Auflage.** Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 4. —.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Zweites Buch. Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Holzschnitten. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 9. —.

Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 4. —.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 8. —.

Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre) mit 307 Erklärungen und 52 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 7. —.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen nebst einem ausführlichen Formelnverzeichnis von über 500 Formeln. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 18. —.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Erster Teil: Die einfache und wiederholte Differentiation explizieter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 5. —.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie. (Planimetrie.) Erster Teil. Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 1. 80.

Lehrbuch des Projektionszeichnens. Erster Teil: Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. Vonderlinn**, Privatdocent an der techn. Hochschule in München. Preis: M. 3. 50.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen. Mit 71 Erklärungen und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **August Frömter** Rektor. Preis: M. 3. —.

Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik) mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelnverzeichnis nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert**, Physiker und Seminarlehrer in Bremen. Preis: M. 9. —.

Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelnverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richart Klimpert.** Preis: M. 5. 50.

Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von **Richard Klimpert.** Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 3. —.

Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben, erläutert durch 189 in den Text gedruckte Figuren und 10 Karten. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Reibungselektricität (Friktions-Elektricität, statischen oder ruhenden Elektricität) erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckte Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 7. —.

Lehrbuch der Kontaktelektricität (Galvanismus) nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit zahlreichen Figuren und einem Formelnverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May**, Elektrotechniker, Frankfurt a. M. Preis: M. 8. —.

Lehrbuch der Elektro-Dynamik (Erster Teil) mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: M. 3. —.

Lehrbuch des Elektromagnetismus mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelnverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May** und **Adolf Krebs.** Preis: M. 4. 50.

Demnächst kommen folgende Bände zur Ausgabe:

Lehrbuch der anorganischen Experimental-Chemie. Erster Teil: **Metalloide.** Bearbeitet in besonderer Rücksicht des praktischen Bedürfnisses nach **System Kleyer** von **Wilh. Steffen**, Chemiker in Homburg v. d. Höhe. Mit ca. 360 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Otto Prange.**

Lehrbuch der Dynamik fester Körper. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.**

Lehrbuch der Induktions- und Magneto-Elektricität. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Adolf Krebs.**

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lehrbuch des Projektionszeichnens

Bd.: 1

1889

Math.a. 324 m-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650634-5